GUSTAV HOLZMÜLLER

INGENIEUR-MATHEMATIK

II. TEIL

DAS POTENTIAL

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

Math. A.
114 m
C2 Holzmüller

Bibl. 21. I.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

DIE

INGENIEUR-MATHEMATIK

IN ELEMENTARER BEHANDLUNG.

VON

PROF. DR. GUSTAV HOLZMÜLLER,

DIREKTOR DER KGL. MASCHINENBAUSCHULE ZU HAGEN I.W., MITGLIED DER LEOPOLDINISCH-KAROLINISCHEN AKADEMIE.

ZWEITER TEIL,

ENTHALTEND DAS POTENTIAL UND SEINE ANWENDUNG AUF DIE THEORIEN DER GRAVITATION, DES MAGNETISMUS, DER ELEKTRIZITÄT, DER WÄRME UND DER HYDRODYNAMIK.

MIT 237 FIGUREN, ZAHLREICHEN ÜBUNGSBEISPIELEN UND EINEM ANHANGE ÜBER DIE MASSEINHEITEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

DAS

POTENTIAL

UND SEINE ANWENDUNG

AUF DIE THEORIEN DER GRAVITATION, DES MAGNETISMUS, DER ELEKTRIZITÄT, DER WÄRME UND DER HYDRODYNAMIK

IN ELEMENTARER BEHANDLUNG

DARGESTELLT

VON

PROF. DR. GUSTAV HOLZMÜLLER,

DIREKTOR DER KGL. MASCHINENBAUSCHULE ZU HAGEN I.W., MITGLIED DER LEOPOLDINISCH-KAROLINISCHEN AKADEMIE.

MIT 237 FIGUREN, ZAHLREICHEN ÜBUNGSBEISPIELEN UND EINEM ANHANGE ÜBER DIE MASSEINHEITEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Das Werk, welches hiermit der Öffentlichkeit übergeben wird, verdankt sein Entstehen einem Gespräche. Herr Geheimrat Professor G. Herrmann von der Technischen Hochschule zu Aachen erzählte mir vor etwa zwei Jahren, im dortigen Bezirksverein des Vereins deutscher Ingenieure sei der Wunsch ausgesprochen worden, es möchte auf elementarer Grundlage ein Vortrag über das Potential und seine Anwendungen in der Elektrotechnik gehalten werden, die Erfüllung des Wunsches sei aber unterblieben, denn dazu wäre höhere Mathematik für unentbehrlich gehalten worden. Herr G. Herrmann fragte mich nun, ob ich nicht in der Form der von mir in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure veröffentlichten mechanisch-technischen Plaudereien den Gegenstand bearbeiten möchte, die Angelegenheit schiene ihm für die große Mehrheit der praktischen Ingenieure von größter Wichtigkeit zu sein. So ging ich denn an die Arbeit, ließ zunächst eine Reihe von Aufsätzen dort und in anderen Zeitschriften erscheinen und studierte nebenbei die Arbeiten von Maxwell, Helmholtz und Hertz. Vorarbeiten fand ich in den Werken von Tumlirz (Potential) und an einigen Stellen bei Wallentin (Elektrizitätslehre). Daß auch die physikalischen Lehrbücher von Dressel, Müller-Lehmann und Börner den Potentialbegriff und die Faraday-Maxwellschen Anschauungen berücksichtigt haben, bestärkte mich in der Überzeugung, daß der Gegenstand nicht nur für die Elektrotechniker und praktischen Ingenieure, sondern auch für die Schule von großer Bedeutung sei. Die Versuche, die neueren Theorien in die Sprache der Elementarmathematik zu übersetzen, glückten in einer mich selbst überraschenden Weise. Es gelang, die Differentiationen und Integrationen zu umgehen, für die Differentialgleichungen praktische und verständliche Deutungen zu gewinnen und einen gewissen Abschluß zu erreichen. Der dritte Band von Wüllners Experimentalphysik erschien leider erst gegen den Abschlußtermin meiner Arbeiten und konnte daher nicht mehr verglichen werden, und zu meinem Bedauern wird der vierte Band, für den die elektromagnetische Lichttheorie zurückgestellt wurde, das Licht der Welt später erblicken, als das vorliegende Buch.

Was die elementare Behandlung betrifft, so verstehe ich darunter den Ausschluß der Differential- und Integralrechnung, nicht aber den der analytischen Geometrie, soweit sie ohne höhere Analysis zugänglich ist.

Daſs meine Arbeit eine besonders leichte war, will ich nicht behaupten. Herr Professor C. Neumann spricht sich auf Seite 247 seiner „Allgemeinen Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen“ (Leipzig bei Teubner) über die von Maxwell und Hertz veröffentlichten Schriften folgendermaſsen aus: „Leider muſs ich ebenso, wie z. B. seiner Zeit Kirchhoff, darüber klagen, daſs es mir nicht gelungen ist, von der Maxwellschen Theorie ein deutliches Bild zu gewinnen.“

Ferner Seite 251: „Aus unseren Betrachtungen ergiebt sich erstens, daſs die Hertzsche Abhandlung mit einem inneren Widerspruch behaftet ist.“

Der leider so früh verstorbene Hertz aber sagt selbst auf Seite 22 seiner „Untersuchungen über die elektrische Kraft“ (Leipzig bei Barth): „Mancher hat sich mit Eifer an das Studium des Maxwellschen Werkes gemacht und, ohne auf ungewöhnliche mathematische Schwierigkeiten gestoſsen zu sein, dennoch darauf verzichten gemuſst, sich eine völlig widerspruchsfreie Vorstellung von Maxwells Ansichten zu bilden. Mir selbst ist es nicht besser gegangen.“

Er fühlt sich durchaus nicht sicher, Maxwells wahre Meinung immer erfaſst zu haben. Von den eigenen Abhandlungen sagt er: „Keineswegs können sie den Anspruch erheben, genau Maxwells Gedanken wiederzugeben. Es ist im Gegenteil zweifelhaft, ob Maxwell, falls er lebte, die vorgetragene Darstellung als die seinige anerkennen würde.“

Wo derartige Schwierigkeiten vorliegen, muſs man für einen Versuch elementarer Darstellung der neueren Lehren gewiſs groſse Nachsicht beanspruchen.

Da diese Lehren eine vollständige Umwälzung der bisherigen Anschauungen bedeuten, hielt ich es für zweckmäſsig, sie nicht an die Spitze zu stellen, sondern von Newton, Laplace und Poisson auszugehen und das Neuere im Laufe des Vortrags entstehen zu lassen, wie es auch historisch sich allmählich entwickelt hat. Dies geschieht z. B. schrittweise mit den Betrachtungen über die Polarisation des Dielektrikums, die erst am Schlusse des Werkes in ihrer reinen Form und in der Auffassung der jetzigen Physik erscheint.

Pädagogische Gründe sind es, die mich veranlaſsten, die vorzutragenden Ideen in bisweilen etwas drastischer Ausdrucksweise zu besprechen. Wenn ich z. B. im Anschluſs an Faraday von einer Zugspannung innerhalb der Kraftlinien und von einer gegenseitigen Abstoſsung oder Anziehung dieser geometrischen Gebilde spreche, so ist dies selbstverständlich nur eine bildliche Redeweise. Eigentlich müſste von den betreffenden Reihen polarisierter Moleküle gesprochen werden. Dies würde aber die Sätze schleppend und schwerer verständlich

machen, als jene kurze, knappe Sprechweise. Herr Poske hat sich in der Zeitschrift für physikalischen Unterricht gegen solche Ausdrucksweisen ausgesprochen, und dies ist der Grund dafür, dafs ich dieses allgemein eingebürgerte Verfahren hier überhaupt verteidige. Die Lehren Maxwells würden sich weit schneller verbreitet haben, wenn er Zeit gehabt hätte, sein bedeutungsvolles Werk in leichter verständliche Form zu kleiden.

Den Plan des Werkes und die Begründung des eingenommenen Standpunktes findet man in der Einleitung. Dort ist aber nicht erwähnt, dafs ich schliefslich den Versuch gemacht habe, auch die Lehre von den Wirbelbewegungen mit hereinzuziehen. Dies geschieht nicht auf mathematischem Wege, sondern auf dem der einfachen Beschreibung der elektromagnetischen Analogien. Es ist nicht undenkbar, dafs Helmholtz ursprünglich in ähnlich elementarer Weise seine Analogieschlüsse machte und erst dann an die mathematische Formulierung der neuen Lehren ging. Sein unsterbliches Verdienst um die Förderung der Hydrodynamik würde dadurch in keiner Weise beeinträchtigt sein. Jedenfalls ist das in dem betreffenden Abschnitt Gegebene nicht ungeeignet, in den Gedankenkreis des grofsen Forschers einzuführen und einigen Einblick in die Auffassungen zu geben, die Thomson in die Lage versetzten, eine neue Theorie der Materie zu schaffen, die auf den Begriff der Wirbelatome gegründet ist.

Das Buch erscheint als zweiter Teil der Ingenieur-Mathematik. Mancher könnte sich an diese Bezeichnung stofsen. Von besonderer Wichtigkeit ist eine solche Ausdrucksweise nicht, um aber solchen, die Anstofs daran nehmen könnten, gerecht zu werden, ist eine gewisse Selbständigkeit des Buches durch einen zweiten Titel „Das Potential“ bezeichnet worden. In der That könnte gefragt werden, wozu der Ingenieur z. B. die komplizierteren Stromliniensysteme verwenden sollte. Allerdings braucht er die besonderen Beispiele nicht, aber ausgeführte Beispiele, die bis in alle Details hinein zur Durchrechnung und graphischen Darstellung gelangen, sind und bleiben das Einzige, was zum vollen Verständnis einer Theorie führen kann. Und so behaupte ich, dafs die Kraftlinientheorie für jeden, der nicht wenigstens einmal ein Beispiel für solche Wissensgebiete vollständig verarbeitet hat, nebelhaft und unbestimmt bleibt. Im übrigen ist kein Leser verpflichtet, die Rechnungen jedesmal sofort mitzumachen. Sollte an späterer Stelle auf diesen oder jenen Punkt zurückgegriffen werden, so ist das Versäumte leicht nachzuholen. Es ist stets zweckmäfsig, ein solches Buch zunächst flüchtig zu überblicken, um zu erfahren, was seine Absichten sind.

Als Leser denke ich mir einesteils praktische Ingenieure, die nachträglich genötigt sind, die Theorien der Elektrotechnik zu

studieren, anderenteils Studierende der Universität oder der technischen Hochschule, die sofort im ersten Semester durch Selbststudium in die mathematische Physik eindringen wollen. Beide werden damit einverstanden sein, wenn ihnen der Eintritt in die Vorhöfe der Wissenschaft auf elementarem Wege ermöglicht wird. Endlich denke ich dabei an die Lehrer der Physik und Mathematik an den höheren Lehranstalten, denen es von Wichtigkeit sein mufs, zu sehen, wie man mit den elementaren Hilfsmitteln der Schule die betreffenden Gebiete aufklärend bearbeiten kann. Nur das in diesen Punkten liegende pädagogische Interesse nimmt das Buch für sich in Anspruch. Es ist weit davon entfernt, auf eigentlich wissenschaftlichen Wert Anspruch zu erheben. Es ist zufrieden, wenn es als Ergänzung der üblichen physikalischen Lehrbücher eine einigermafsen freundliche Aufnahme findet. Jedenfalls eröffnet es auf leichte Weise Einblicke in die Lehren von der Gravitation und der kosmischen Physik bis zur Anziehung der Ellipsoidschalen, von der Elektrizität und dem Magnetismus bis zu den Hertzschen Schwingungen, in die neueren Theorien der Wärmeströmungen und der Hydrodynamik bis zur Lehre von den freien Ausflufsstrahlen, den Wirbelbewegungen und den Grundwasserströmungen hin, Einblicke, die man sonst nur unter grofsem Aufwande von Zeit und Arbeit gewinnen kann.

Um über die Mafseinheiten Klarheit zu schaffen, ohne den theoretischen Text zu belasten, ist ein besonderer Anhang über die Dimensionen und den Zusammenhang der Mafseinheiten der Elektrotechnik untereinander und ihre Beziehungen zu den gewöhnlichen Mafsen der Mechanik beigefügt worden, der jedenfalls das Eindringen in dieses überaus wichtige Gebiet erleichtert.

Wie in meinen früheren Arbeiten, so habe ich auch hier den Hauptwert auf ausführliche Erläuterungen, fertige Beispiele und graphische Veranschaulichung gelegt, und der Verlagsbuchhandlung bin ich dankbar dafür, dafs sie hinsichtlich der Ausstattung des Werkes mit Figuren keine Kosten gescheut hat. Auch hier gebe ich unter Verzicht auf lückenlose Vollständigkeit nur eine methodische Auswahl.

Vielleicht gelingt es mir, in einem dritten Bande die Darstellung dessen, was ich als Ingenieurmathematik in elementarer Behandlung verstanden sehen möchte, zum inneren Abschlufs zu bringen.

Hagen i/W., im November 1897.

Prof. Dr. **G. Holzmüller.**

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Einleitung . 1

Kapitel I.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz.

1) Die von der Erde auf den Mond ausgeübte Anziehung 6
2) Das Gesetz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung 7
3) Mond und Erde umkreisen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt 8
4) Formulierung des Newtonschen Gesetzes 9
5) Eins der Keplerschen Gesetze 10
6) Massenverhältnisse der Weltkörper 11
7) Fallbeschleunigung auf den Weltkörpern 12
8) Dichtigkeit der Erde und anderer Weltkörper 13
9) Die Gröfse der Gravitationskonstante 13
10) Bemerkungen über die Bedeutung des Newtonschen Gesetzes 13

Kapitel II.

Die Gravitationskurve $y = \frac{1}{x^2}$ und der Potentialbegriff.

11) Erste Konstruktion der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ 15
12) Eine Eigenschaft der Gravitationskurve 16
13) Zweite Konstruktion der Gravitationskurve 17
14) Die Diagrammfläche der Gravitation 18
15) Einfachste Konstruktion des Inhalts der Diagrammflächen 20
16) Tangentenkonstruktion für die Gravitationskurve 21
17) Mechanische Bedeutung der Diagrammfläche 22
18) Der Potentialbegriff . 24
19) Graphische Darstellung des Potentials durch die gleichseitige Hyperbel 25
20) Diagramme für verschiedene Massen 26
21) Arbeit bei beliebigen Wegen im Raume 28
22) Erhaltung der Energie oder Arbeit 30
23) Ein kosmisches Beispiel . 31

Kapitel III.

Anziehung der homogenen Kugelschale, der Vollkugel und Hohlkugel.

Seite

24) Vorbemerkung 33
25) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen äufseren Massenpunkt 33
26) Gesamtergebnis 36
27) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen im Innern liegenden Massenpunkt 36
28) Folgerungen für das Innere der homogenen koncentrischen Kugel . . . 37
29) Gegenseitige Anziehung zweier Kugeln 38
30) Berechnung der Hebungsarbeit vom Erdcentrum bis ins Unendliche 38
31) Berechnung der für eine bestimmte Schufshöhe nötigen Abschufsgeschwindigkeit 39
32) Fall eines Körpers in den Schacht der homogenen Erde 40
33) Einige andere Schachtprobleme 42
34) Abplattung der Erde 43
35) Statische Theorie der Ebbe und Flut und das Störungsgesetz 44
36) Berechnung der Mondmasse aus der Fluterscheinung 45
37) Bemerkungen über das Störungsgesetz 46
38) Präzession der Äquinoktien 46
39) Nutation der Erdachse 48
40) Verlangsamung der Erddrehung 48
41) Potential der Kugelschale für alle Raumpunkte in graphischer Darstellung 49
42) Potential der Vollkugel für alle Raumpunkte 50
43) Potential der koncentrischen Hohlkugel für alle Raumpunkte 52
44) Selbstpotential der homogenen Vollkugel 54
45) Summe der Potentialwerte aller Massenpunkte einer Vollkugel 54
46) Anwendung des Selbstpotentials auf kosmische Verhältnisse 55
47) Anziehung innerhalb der Erdkugel bei regelmäfsig zunehmender Dichte 60
48) Druck im Innern des mit Wasser gefüllten Erdschachtes 62
49) Druck im Innern der Erdkugel bei gleicher und veränderlicher Dichte . 62
50) Das Potential der Kugel bei regelmäfsig zunehmender Dichte für alle Raumpunkte 64

Kapitel IV.

Die einfachsten Kraftröhren und Niveauflächen; Zelleneinteilung des Raumes und physikalische Anwendungen.

51) Anziehung des Mittelpunktes auf eine homogene Massenbelegung der Kugelschalen 65
52) Einteilung der Kugelfläche in gleiche Felder 66
53) Kraftflufs, Kraftröhren, Geschwindigkeitspotential 67
54) Das Ohmsche Gesetz 70
55) Stationäre Wärmeströmung 72
56) Zelleneinteilung des Raumes 72
57) Anzahl der Kraftlinien für verschiedene Ladungen 73
58) Körperlicher Winkel des Kreiskegels 74

Seite
59) Andeutungen über die Kraftlinien 75
60) Centrische Influenz eines Konduktors auf eine homogene koncentrische Hohlkugel, die zur Erde abgeleitet ist 77
61) Vorläufige Bemerkung über die excentrische Lage des Konduktors . . 79
62) Alleinige Ladung des Leiters von Kugel- oder Hohlkugelform 80
63) Centrische Influenz auf die isolierte Hohlkugel 81
64) Fall der Ableitung der inneren Kugel 81
65) Potentielle Energie für den Fall koncentrischer Kugelschalen, von denen die eine abgeleitet ist . 82
66) Begriff der Kapazität . 83
67) Einfluſs benachbarter Leiter auf die Kapazität 84
68) Die Dielektrizitätskonstante eines isolierenden Mittels 84
69) Dichtigkeit der Ladungen auf einem System verbundener Kugeln . . . 85
70) Batterie Leydener Flaschen bei Parallelschaltung 86
71) Batterie Leydener Flaschen bei Säulenschaltung 87
72) Eine zweite Betrachtungsweise 93
73) Potential des geladenen kugelförmigen Kondensators in graphischer Darstellung . 93
74) Fall zweier unbegrenzter paralleler Ebenen 95
75) Kohlrauschs Kondensator . 96
76) Schutzringelektrometer von W. Thomson 98
77) Thomsons Quadrantenelektrometer 99

Kapitel V.

Die Mehrpunktprobleme.

78) Vorbemerkung . 102
79) Hilfssatz aus der Mechanik, algebraische Addition der Arbeiten betreffend . 103
80) Niveauflächen für das Problem zweier gleich stark anziehender Punkte . 105
81) Konstruktion dieser Niveauflächen 106
82) Bemerkungen . 108
83) Erhaltung der Energie im Felde des Zweipunktproblems 109
84) Gesetz der Abstände zwischen je zwei Niveaulinien 110
85) Eine mechanische Veranschaulichung 111
86) Tangentenkonstruktion für die Kurve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$ 112
87) Die Linien gleicher Intensität und gleicher Kraftrichtung für das Zweipunktproblem . 113
88) Konstruktion und Gleichung der Kraftlinien für das symmetrische Zweipunktproblem . 114
89) Mechanische Hilfsaufgabe über das Drehungspotential 117
90) Addition zweier Drehungspotentiale 118
91) Richtung der Normalen und Tangenten der Kraftlinien für das Zweipunktproblem . 119
92) Asymptoten der Kraftlinien . 120
93) Der Fall gleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten. . 121
94) Das Problem zweier anziehender Massen von ungleicher Gröſse . 122

Seite
95) Die Asymptoten dieses Problems 124
96) Bemerkungen . 125
97) Der Fall ungleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten 126
98) Folgerungen für allgemeinere Probleme 130
99) Allgemeines Mehrpunktproblem 131
100) Anordnung auf gerader Linie 132
101) Anordnung in der Ebene . 133
102) Vom Problem der drei Körper und seiner Verallgemeinerung 133
103) Beispiel mit Kreisen bezw. Kugeln 136
104) Geladener Konduktor im homogenen Felde 138

Kapitel VI.

Die Spannungssätze von Laplace und Poisson und ihre physikalischen Folgerungen.

105) Begriff der Spannung eines Zellenraumes 140
106) Einwirkung äufserer Punkte auf eine geschlossene Fläche (Satz von Laplace) . 142
107) Symmetrisches Zweipunktproblem 143
108) Allgemeinere Folgerungen . 144
109) Unendliche Kugel als Niveaufläche 145
110) Gesetz der Zelleninhalte . 145
111) Cylindrische Probleme . 146
112) Das zweidimensionale Einpunktproblem 147
113) Zweidimensionale Mehrpunktprobleme 148
114) Problem der unbegrenzten homogenen Ebene 149
115) Die logarithmische Abbildung 150
116) Stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit 152
117) Der Kugelsatz von Gaufs . 154
118) Physikalische Deutungen des Gaufsschen Kugelsatzes 156
119) Das entsprechende Fouriersche Wärmeproblem 156
120) Zweidimensionale Probleme entsprechender Art 158
121) Bemerkung . 159
122) Der Spannungssatz von Poisson 160
123) Zusammenhang zwischen Dichte und Spannung 162
124) Anwendung auf Belegungen von Niveauflächen 162
125) Influenz auf den Niveauflächen des symmetrischen Zweipunktproblems 164
126) Modifizierte Beispiele . 167
127) Allgemeinere Zweipunktprobleme und damit verbundene Induktionsprobleme . 168
128) Bemerkung über Mehrpunktprobleme 171
129) Bemerkungen zur Theorie der Kraftlinien und der elektrischen Verschiebung . 172

Kapitel VII.

Die Methode der elektrischen Bilder, der Symmetrie und der Inversion im Raume.

Seite
130) Vorbemerkungen über die Inversion 183
131) Inversionsbeziehungen am Kreise und an der Kugel 184
132) Anwendung auf das Zweipunktproblem 185
133) Influenz eines geladenen Konduktors auf die abgeleitete Kugel . . . 188
134) Identität dieses Influenzproblems mit dem Zweipunktproblem 189
135) Folgerungen für die Gravitation 190
136) Centrobarischer Charakter der Belegung 191
137) Sonderfall der Ebene. 192
138) Influenz zweier Punkte auf die abgeleitete Kugel. 194
139) Elektrische Bilder . 195
140) Inversionsbeziehungen bei elektrischen Bildern 195
141) Abbildung gleichwertiger Niveauflächen durch Inversion 198
142) Mehrfache Spiegelung bei parallelen Ebenen 201
143) Mehrfache Spiegelung bei Berührungskugeln 203
144) Übungsbeispiel für sich schneidende Ebenen 204
145) Übungsaufgabe für zwei koncentrische Kreise 206

Kapitel VIII.

Centrobarische Flächenbelegungen und Körper.

146) Rückblick auf frühere Resultate 211
147) Unterschied zwischen Flächen- und Körperbelegungen 212
148) Centrobarische Weltkörper . 212
149) Sätze über centrobarische Körper 214
150) Das Centralellipsoid centrobarischer Körper ist stets eine Kugel. . . 215

Kapitel IX.

Selbständiger Übergang zu den zweidimensionalen Problemen und zum logarithmischen Potential.

151) Allgemeine Vorbemerkungen . 217
152) Anziehung des homogenen Kreisbogens 218
153) Anziehung der homogenen Geraden 218
154) Niveauflächen und Kraftlinien der endlichen und homogenen Geraden 219
155) Arbeitsdiagramm für die unbegrenzte Gerade 220
156) Anziehung der unbegrenzten Ebene 220
157) Planpotential. 221
158) Stationäre Strömung eines geradlinigen Flusses von konstantem Querschnitt . 222
159) Druckhöhe in Wasserleitungsröhren von konstantem Querschnitt. . . 223
160) Ausdehnung der Analogien auf die Radialströmung in ebenen Platten 225
161) Konstruktion der Potentialkurven für radiale Strömung 227
162) Das Vertauschungsproblem der Radialströmung 230

Kapitel X.

Die zweidimensionalen Mehrpunkt- und Linearprobleme.

Seite
163) Symmetrisches Zweipunktproblem für gleiche Ladungen . 232
164) Einteilung der Ebene in kleine Quadrate durch Radien und Kreise . 233
165) Konstruktion für die Normale der Lemniskate; die Resultante des Problems . . . 235
166) Linien gleicher Stromstärke und Stromrichtung für das Problem. . . 236
167) Die Diagrammfläche des Problems . . . 236
168) Das elektrische Strömungsproblem . . . 237
169) Dasselbe Problem für entgegengesetzte Ladungen . . . 237
170) Konstruktion der Resultante für das Problem . . . 239
171) Zweipunktproblem für ungleiche positive Mengen . . . 241
172) Zweipunktproblem für ungleichartige Mengen . . . 242
173) Dreipunktproblem für positive Mengen . . . 242
174) Dreipunktproblem für ungleichartige Mengen . . . 243
175) Das n-Punktproblem für gleichartige Elektrizitäten . . . 243
176) Das n-Punktproblem für ungleichartige Elektrizitäten . . 244
177) Einige Beispiele . . . 245
178) Allgemeine Konstruktionsmethode der Kraft- und Niveaulinien . . . 246
179) Methode der konformen Abbildung . . . 246
180) Die Abbildung $Z = z^3$. . . 247
181) Rückblick auf die logarithmische Abbildung . . . 249
182) Ein Beispiel von praktischer Bedeutung . . . 250
183) Deutungen der Figur . . . 251
184) Eine Modifikation des Beispiels . . . 252
185) Bemerkungen . . . 253
186) Newtonsches Potential gewisser Kurven . . . 254
187) Die allgemeine isogonale Transformation . . . 255
188) Inversionsbeziehungen und elektrische Bilder . . . 256
189) Abbildung des homogen belegten Cylinders . . . 258
190) Unterschied zwischen den drei- und zweidimensionalen Problemen . . 258
191) Ein wichtiges Mehrpunktproblem . . . 258
192) Deutungen der Figur . . . 261
193) Konstruktion der Kurven des Problems . . . 264
194) Übergang zu den elliptischen Koordinaten . . . 265
195) Deutungen der Figur . . . 267
196) Tabelle der gegenseitigen Beziehungen . . . 268
197) Bemerkungen . . . 269
198) Abbildung $Z = \cos z$. . . 270
199) Diagonalprobleme und graphische Addition von Problemen 271
200) Übergang von den Mehrpunktproblemen durch das Vertauschungsproblem zu den Fourierschen Wärmeproblemen 273
201) Das Dreipunktproblem der Wärmeströmung . . . 274
202) Das zugehörige Vertauschungsproblem . . . 275
203) Andere Fouriersche Probleme . . . 277
204) Bemerkungen über Periodizität . . . 277
205) Grenzlinien für den elementaren Ausbau der Ingenieur-Mathematik . 278
206) Die Abbildung $Z = z + e^z$ und die entsprechenden Strömungen . . . 279
207) Hydrodynamische Deutung . . . 284

Seite
208) Elektrostatische Deutungen für zwei Halbebenen als Kondensatoren . 286
209) Anwendung auf den Thomsonschen Schutzring 286
210) Die Cylinder der logarithmischen und anderer Linien als Kondensatorplatten . 287
211) Beispiel zur Theorie der freien Ausflussstrahlen von Helmholtz und Kirchhoff . 287
212) Deutung des Problems im Helmholtzschen Sinne 291
213) Andere Beispiele freier Ausflussstrahlen 292
214) Übertragungen der Isothermenscharen auf krumme Oberflächen . . . 293

Kapitel XI.

Physikalisches über galvanische Ströme und ihr Potential.

215) Spannungsreihe der Leiter erster Klasse 296
216) Deutung der Versuche von Volta 297
217) Leiter zweiter Klasse . 299
218) Vergleichung von Ketten mit derselben Flüssigkeit 302
219) Verbindung gleichartiger Ketten hintereinander; Säulenschaltung. 302
220) Verbindung gleichartiger Ketten nebeneinander; Parallelschaltung 303
221) Vergleich beider Schaltungsarten 303
222) Vergleich der möglichen Kombinationen 305
223) Der Maximaleffekt . 305
224) Berechnung der günstigsten Kombination 306
225) Graphische Darstellung der Strömung in einer Kette 307
226) Verallgemeinertes Ohmsches Gesetz 308
227) Stromverzweigung . 310
228) Kirchhoffsche Sätze über Stromverzweigung 311
229) Brücke von Wheatstone . 311
230) Thomsonsche Doppelbrücke . 314
231) Messung der elektromotorischen Kraft 316
232) Das Joulesche Gesetz und der Stromeffekt 317
233) Nutzbarer Teil des Stromeffekts 318
234) Temperatur des Schliefsungsbogens 319
235) Erhaltung der Energie der Kette 321

Kapitel XII.

Magnetismus.

236) Grundbegriffe . 322
237) Schwingungszahl der Magnetnadel im homogenen Felde des Erdmagnetismus . 324
238) Das Newton-Coulombsche Gesetz 325
239) Kraftlinien und Niveauflächen 326
240) Schwingungen der Nadel im magnetischen Felde. 328
241) Berechnung der Feldstärke für einen Magnetstab 328
242) Bestimmung der Ablenkung der Magnetnadel durch einen Magnetstab für axiale Lage . 329

Seite
243) Dasselbe für äquatoriale Lage 330
244) Dasselbe für beliebige Lage 330
245) Magnetische Doppelschale oder Blatt 333
246) Para- und Diamagnetismus 337

Kapitel XIII.

Elektromagnetische und elektrodynamische Wirkungen galvanischer Ströme.

247) Ablenkung der Magnetnadel durch Ströme 341
248) Kraftlinien und Niveauflächen langer geradliniger Ströme 341
249) Die ablenkende Kraft und ihr Potential 342
250) Das magnetische Feld eines Stromes 343
251) Vergleich des Stromes mit einem magnetischen Blatte . . 344
252) Allgemeine Folgerungen . 345
253) Parallele Drähte mit gleich gerichteten gleich starken Strömen . . . 345
254) Parallele Drähte mit entgegengesetzten Strömen von gleicher Stärke . 346
255) Andere Beispiele . 347
256) Übergang zu geschlossenen Stromkreisen 348
257) Nichtebene Stromkreise . 350
258) Das Potential und die anziehende Kraft eines Kreisstromes zu berechnen . 350
259) Erläuterungen zum Biot-Savartschen Gesetze 352
260) Ersatz des Kreisstromes durch einen unendlich kleinen Magnet . . . 353
261) Kraftlinien des Kreisstromes 354
262) Die elektromagnetische Mafseinheit 355
263) Sinusboussole . 356
264) Tangentenboussole . 357
265) Elektromagnetische Wirkung einer Spule 357
266) Potentielle Energie geschlossener Ströme im magnetischen Felde . . 358
267) Potential zweier Stromkreise aufeinander 359
268) Induktionsströme . 360
269) Selbstinduktion und Extraströme 361
270) Erklärung der Induktionswirkungen nach Faraday 363
271) Berechnung der elektromotorischen Kraft des Induktionsstroms aus der Änderung der Kraftlinienzahl 363
272) Neuere Vorstellungen über das elektromagnetische Feld . 365
273) Elektrische Funken und Hertzsche Schwingungen 372
274) Hilfsbetrachtung aus der Mechanik 377
275) Zeitdauer der Hertzschen Schwingungen 378
276) Bemerkungen . 380
277) Die elektrische Strahlung im Äther 382

Kapitel XIV.

Hydrodynamische Analogien.

a) Allgemeines. Seite

278) Allgemeine Bemerkungen 384

b) Wirbelbewegungen.

279) Analogien zwischen einem Wirbelfaden und einem elektrischen Strome 386
280) Zwei und mehrere Elementarfäden 389
281) Ein vereinzelter kreisförmiger Wirbelring 392
282) Zwei parallele gleichartige Wirbelringe 393
283) Zwei ungleichartige Wirbelringe 394
284) Schlufsbemerkung über Wirbelfäden 394

c) Forchheimersche Theorie der Grundwasserbewegung in der Umgebung von Brunnen und Sickerschlitzen.

285) Die Grundhypothese 396
286) Die Parallelströmung 396
287) Radialströmung 400
288) Bemerkung über den Fall unendlicher Tiefe 404
289) Folgerungen 404
290) Beispiele 405
291) Schlufswort 407

Kapitel XV. Anhang A.

Zusätze zur Lehre von der Gravitation und der Elektrostatik, Flächen zweiten Grades betreffend.

1) Übergang von der Kugel zum Ellipsoid 409
2) Anziehung der ähnlich begrenzten Ellipsoidschale im Innern 409
3) Geometrische Folgerung 410
4) Physikalische Folgerungen 411

Kapitel XVI. Anhang B.

Von den Einheiten und Dimensionen.

A. Die wichtigsten Einheiten der Mechanik 419
a) Die Grundeinheiten: Zeit, Länge, Masse 419
b) Die abgeleiteten Einheiten 421
B. Die Einheiten des Magnetismus und ihre Dimensionen . . . 425
C. Die Einheiten der Elektrostatik 427
D. Elektrostatische Einheiten für galvanische Ströme 428
E. Elektromagnetische Einheiten für galvanische Ströme . . . 434

Kapitel XIV.

Elektrodynamische Analogien.

a) Allgemeines.

Seite
250. Allgemeine Bemerkungen [illegible]

b) Wirbelbewegungen.

251. Analogien zwischen einem Wirbelfaden und einem elektrischen Strome . . . [illegible]
252. Wirbel und [illegible] [illegible]
253. [illegible] [illegible]
254. Zwei parallele gleichstarke Wirbelfäden [illegible]
255. Zwei [illegible] [illegible]
256. [illegible] [illegible]

c) [illegible]

257. [illegible] [illegible]
258. [illegible] [illegible]
259. [illegible] [illegible]
260. [illegible] [illegible]
261. [illegible] [illegible]
262. Beispiel [illegible]
263. [illegible] [illegible]

Kapitel XV. Anhang.

[illegible]

a) [illegible] [illegible]
b) [illegible] [illegible]
c) [illegible] [illegible]
d) [illegible] [illegible]

Kapitel XVI. Anhang II.

[illegible]

A. [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible] [illegible]
B. [illegible] [illegible]
C. [illegible] [illegible]
D. [illegible] [illegible]
E. [illegible] [illegible]

[illegible]

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Einleitung.

Der Potentialbegriff beherrscht die neuere Physik und ihre technischen Anwendungen, besonders das Gebiet der Elektrotechnik derartig, dafs er weder in den Elementarbüchern der Physik noch im Schulunterrichte entbehrt werden kann. Insbesondere haben ihn die entsprechenden Fachschulen zu berücksichtigen, für die eine elementare Potentialtheorie zur Lebensfrage geworden ist. Aber auch für die Studierenden der Mathematik und Technik, die in den beiden ersten Semestern stehen, erscheint es wünschenswert, schon vor Absolvierung der Infinitesimalrechnung auf leichterem Wege in dieses Gebiet eingeführt zu werden. Machen doch schon die Einheiten der Elektrotechnik den Potentialbegriff zur Voraussetzung. Mit dem Begriffe allein ist aber sehr wenig gethan, man mufs auch mit Potentialen rechnen können. Wie in der Chemie auf die qualitative Analyse die schwierigere quantitative folgt, so mufs auch in der Physik der quantitative Teil als Ergänzung des qualitativen zur eigentlichen Krönung des Lehrgebäudes führen.

Die Frage, ob eine elementare Behandlung möglich sei, die über dem Niveau einer blofsen Beschreibung auf nur experimenteller Grundlage stehen soll, beschäftigt die Schulmänner in besonders hohem Mafse. Eine grofse Anzahl von Programm-Arbeiten dieser Art ist in den letzten Jahren erschienen. Sie scheinen mir sämtlich hinter dem Elementarwerke von Tumlirz: „Das Potential und seine Anwendung zu der Erklärung der elektrischen Erscheinungen“ (Wien, bei A. Hartleben) zurückzustehen, welches auf 302 Seiten ziemlich weit vorwärts geht. Aber auch dieses verdienstliche Werk läfst mancherlei unbewiesen und berücksichtigt die von Maxwell angebahnten Fortschritte zu wenig. Namentlich sind die elementaren Konstruktionen der Niveau- und Kraftlinien schwierigerer Probleme übergangen, obwohl gerade diese über den Zustand des elektrischen oder magnetischen Feldes in vorzüglicher Weise aufklären. Auch bleibt die Theorie stationärer Strömungen in Raum und Ebene, wo sich Wärmetheorie, Elektrizitätslehre, Gravitationstheorie und Hydrodynamik in so wunderbarer Weise begegnen, aufserhalb der

Betrachtung, so daſs gerade die Forschungen von Faraday, Maxwell, Helmholtz und Kirchhoff, die jetzt die wissenschaftliche Welt bewegen, fast unberührt bleiben.

Was aber die neueren Lehrbücher der Experimentalphysik bieten, unter denen die von Börner, Dressel, Joh. Müller-Lehmann, besonders aber die Darstellungen der Elektrizitätslehre von Wallentin rühmend hervorgehoben werden mögen, so geben auch diese nur einen Abriſs des Gebietes für ihre besonderen Zwecke auf experimenteller Grundlage.

Bahnbrechend hat das berühmte Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus von James Clerk Maxwell gewirkt, dessen zweite Auflage von Weinstein übersetzt bei Springer in Berlin erschienen ist. Zwar nennt der Verfasser seine Darstellung eine elementare (vgl. Kap. II), da aber Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, Integrale (bis zu sechsfachen) und die Hamiltonsche Vektorenrechnung eine Hauptrolle darin spielen, so versteht er unter elementar doch wohl etwas anderes, als die deutschen Schulmänner. Die letzteren denken sich darunter eine Behandlungsweise, welche die Infinitesimalrechnung vollständig ausschlieſst und von der analytischen Geometrie nicht mehr verlangt, als etwa die Gymnasien, die Real- und Ober-Realschulen darzubieten pflegen. Auf das Unendlichkleine kann allerdings dabei ebensowenig verzichtet werden, wie bei der Lehre von den Trägheitsmomenten und dergl. Die anzuwendenden Diagramme aber ermöglichen eine derartige Veranschaulichung und Vereinfachung der Darstellung, daſs eigentliche pädagogische Schwierigkeiten kaum zu befürchten sind.

Wichtig erscheint es, bei der Einführung in die Elektrizitätslehre auf mechanische Anwendungen und Deutungen an möglichst vielen Stellen einzugehen, da die Begriffe der Mechanik dem Anfänger geläufiger sind, als die der übrigen physikalischen Gebiete; ebenso wichtig aber ist es, die letzteren sofort mit in die Betrachtung zu ziehen, so daſs der geistige Zusammenhang der oben genannten Lehren dem Leser stets vor Augen steht und sein Interesse stärker fesselt, als die einseitige Betrachtung der Einzelgebiete. Aus Gründen der Mechanik folge ich auch dem Rat des bekannten Lehrbuches von Thomson und Tait, bei den Gravitationsproblemen nicht $-\frac{m}{r}$, sondern $+\frac{m}{r}$ als das Potential zu betrachten. Der für die Elektrizitätslehre einzuführende Zeichenwechsel macht keine Schwierigkeit, dagegen ist es für den Anfänger zweckmäſsig, sich zunächst mit dem Begriffe der positiven Arbeit zu beschäftigen.

Daſs man mit elementaren Mitteln nicht alles erreichen kann,

ist selbstverständlich. Ich meine aber, dafs jeder, der das hier Gegebene bewältigt, einen Einblick in die betreffenden Gebiete gewinnen wird, mit dem sich schon einiges anfangen läfst. Ich hätte noch weiter vordringen können, möchte mich aber doch nach einigen Richtungen hin noch abwartend verhalten.

Ich hätte ferner an zahlreichen Stellen zeigen können, dafs die Resultate die eigentliche Deutung der partiellen Differentialgleichungen von Laplace, Poisson u. s. w. für Raum und Ebene darstellen, unterliefs dies aber, um den Anschein zu vermeiden, als ob es ohne Differentialgleichungen nicht ginge. Der materielle Inhalt jener Formeln kommt aber hier naturgemäfs in höherem Grade zur Geltung, als es bei den analytischen Darstellungen zu geschehen pflegt. Auf die Hamiltonschen Vektorenrechnungen bin ich nicht eingegangen, da sie aus dem üblichen elementaren Standpunkte ganz heraustreten.

Der Zweck des Buches ist nicht ein wissenschaftlicher, sondern ein pädagogischer. Bestimmt ist es z. B. für die Lehrer der Mathematik und Physik an höheren Schulen und technischen Lehranstalten, besonders auch für die Fachlehrer an elektrotechnischen Fachschulen und für die Studierenden der ersten Semester an Universitäten und technischen Hochschulen. Dafs besonders auch der praktische Ingenieur das Buch zur Selbstbelehrung benutzen kann, ist selbstverständlich. Die höher organisierte elektrotechnische Mittelschule, für deren Gebrauch es in erster Linie bestimmt erscheinen könnte, existiert leider noch nicht, aber die Zukunft wird sie voraussichtlich bald bringen.

An einigen Stellen wird auf mein Lehrbuch der Elementarmathematik und auf meine Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften verwiesen, die beide bei B. G. Teubner erschienen sind. Das letztere Werk giebt auch einen Überblick über die reiche Litteratur der zweidimensionalen Probleme bis zum Jahre 1882. Nimmt man dazu, was für die dreidimensionalen seit Newton, Mac Laurin, Lagrange, Laplace, Ivory bis auf Poisson, Fourier, Green, Gaufs, Riemann, Heine, Helmholtz, Kirchhoff, Neumann, Clausius, Maxwell, W. Thomson, Tait, Klein u. s. w. geschaffen ist, so würde nur die Aufzählung nebst kurzer Inhaltsangabe einen ziemlichen Band anfüllen. Darauf soll hier verzichtet werden. Gelegentliche Andeutungen über die historische Entwickelung dürften dem Leser vorläufig genügen.

Um die einzelnen Kapitel möglichst unabhängig voneinander hinzustellen und damit das Studium zu erleichtern, habe ich an einigen Stellen Wiederholungen nicht gescheut. Solche gehören zwar nicht in ein systematisches Werk, wohl aber in ein pädagogisches, wo sie zugleich zur Repetition dienen und den Gegenstand auch von anderen

Seiten zu betrachten lehren. Die Bestätigung der durch bloſse Gedankenkombination gefundenen Resultate durch wirkliche Rechnung hat noch niemals Schaden gebracht.

Wem dieses oder jenes Beispiel zu schwierig erscheint, der überschlage es vorläufig. Dasselbe gilt auch für einzelne theoretische Erörterungen, die für das Folgende nicht unbedingt notwendig sind. Um den Umfang nicht allzusehr anschwellen zu lassen, verweise ich an einzelnen Stellen auf Anwendungen, die man in den besseren Lehrbüchern der Physik befriedigend dargestellt findet. Dies gilt besonders bezüglich der Instrumente für elektrische Messungen. Hier handelt es sich mehr um die mathematische Entwickelung der Theorie auf elementarem Wege. Wenn im Anhang die Lehre von den Dimensionen und den Maſseinheiten kurz dargestellt ist, so hat dies seinen Grund darin, daſs zahlreiche Lehrbücher leider noch nicht darauf eingehen. Der Leser wird im Texte mehrfach auf diesen Anhang verwiesen.

Die Forchheimersche Theorie der Grundwasserbewegungen in gleichmäſsig durchlässigem Terrain ist von einigen Seiten angefochten worden. Nachdem mir aber praktische Ingenieure des betreffenden Gebietes über ihre Brauchbarkeit für Annäherungsüberlegungen befriedigende Mitteilungen gemacht haben, entschloſs ich mich, sie als ein sehr lehrreiches Beispiel aufzunehmen und dabei zugleich eine einfachere Begründung zu geben. Diese Lehre ist offenbar der Methode der konformen Abbildung angepaſst worden. Ist aber mit den hydrodynamischen Theorien von Helmholtz nicht dasselbe der Fall? Die Analogie zwischen den Anziehungen und den Strömungen einer inkompressiblen idealen Flüssigkeit lag für ihn auf der Hand, die zweidimensionalen Probleme gestatteten weitergehende Folgerungen über stationäre Bewegungen und freie Ausfluſsstrahlen, die konsequente Ausdehnung der Analogien auf die elektromagnetischen Erscheinungen, die bei Annahme des Biot-Savartschen Gesetzes für unendlich lange, geradlinige Drähte ebenfalls mit dem logarithmischen Potential in Verbindung stehen, führte auf die Theorie geradliniger Wirbelfäden, von wo aus zu den kreisförmigen Wirbelringen nur noch ein leichter Schritt war. Die Theorien also muſsten so formuliert werden, daſs die Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$ für drei bezw. zwei Dimensionen erfüllt blieb. Der erste Gedankengang des Forschers war offenbar ein elementarer, die zweite Arbeit bestand in der geschickten analytischen Formulierung bezw. Anpassung der Theorie. Für ihre Richtigkeit ist damit noch gar nichts bewiesen, denn es handelt sich um eine ideale Flüssigkeit, die sich recht sehr von den wirklichen unterscheidet. In derselben Lage befindet sich die Forchheimersche Theorie jener Grundwasserbewegungen, die unter der Voraussetzung gewisser idealer

Verhältnisse stehen. Vielleicht werden manche Wasserleitungsingenieure für die elementare Einführung in dieses Gebiet dankbar sein.

Die vielfach auftretenden krummlinigen Koordinaten könnten den Eindruck machen, als ob sie eigentlich in die höhere Mathematik gehörten. Sie sind aber sämtlich elementar konstruierbar. Bei einigen wird allerdings vorausgesetzt, dafs man die Zahlen e, π u. s. w. wenigstens mit grofser Annäherung als eine Strecke darstellen kann. An einer Stelle wird auf die Dreiteilung des Winkels hingedeutet, deren Begriff übrigens durchaus elementar ist. Es würde als Prinzipienreiterei aufzufassen sein, wenn man den elementaren Zugang in die neuere Physik ablehnen wollte, weil diese Dreiteilung mit Zirkel und Lineal nicht exakt durchgeführt werden kann.

Elementare Einführungen werden bisweilen als Versuche eines Kampfes gegen die höheren analytischen Methoden aufgefafst. Sie müssen sich solche Mifsdeutungen gefallen lassen, obwohl sie nur den Anspruch erheben, eine Vorbereitung, eine nur propädeutische und vorläufige Darstellung des Wissensgebietes zu geben. Schon als Beitrag zu der Frage, wie man mit geringen Hilfsmitteln möglichst weit vordringen könne, und wie weit die Herrschaft der elementaren Methoden reicht, sollten sie nicht unwillkommen sein. Dafs aber ein Vorteil darin liegt, erst nach solcher Vorbereitung an die feinere analytische Behandlung zu gehen, kann vom pädagogischen Standpunkte aus gar nicht angezweifelt werden. In systematischer Hinsicht mag der gerade Weg der kürzeste sein, in pädagogischer ist er es nicht, weder auf dem niederen, noch auf dem höheren Unterrichtsgebiete. Nur von solchen Gesichtspunkten aus möchte die nachstehende Darstellung beurteilt werden.

Die anwachsende Fülle des zu verarbeitenden Materials drängt auch bezüglich der Lehrbücher zur Arbeitsteilung. Im vorliegenden Buche ist das mathematische Element der neueren Physik so verarbeitet worden, dafs das Werk als Ergänzung zu jedem Lehrbuche der Experimental-Physik und der hierhergehörigen Technik dienen kann. Man könnte es als eine elementare Einführung in die mathematische Physik, soweit diese mit dem Potentialbegriff zu thun hat, bezeichnen. Das Studium von Werken, wie des „Handbuchs der Elektrotechnik“ von Kittler wird jedenfalls erheblich erleichtert, wenn man vorher diese elementare Potentialtheorie verarbeitet hat. Aber auch die Originalabhandlungen der oben genannten Forscher, die zum Teil nicht gerade bequem zu lesen sind, wird man leichter verstehen, wenn man durch die Elementarbetrachtung die wichtigsten Resultate bereits kennen gelernt hat und weifs, um welches Ziel es sich handelt.

Kapitel I.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz.

1) Die von der Erde auf den Mond ausgeübte Anziehung.

Die Lehre vom Potential hat ihren Ausgangspunkt nicht in der Technik, sondern in der kosmischen Physik gefunden. Newton war es, der vor mehr als 200 Jahren die Vermutung aussprach, die Centripetalkraft, die z. B. den Mond an die Erde fesselt, sei im Grunde dieselbe Kraft, die jeden aufgehobenen Stein zur Erde niederzieht und die wir als Schwerkraft bezeichnen; nur sei die Wirkung in großser Entfernung weit schwächer als an der Erdoberfläche. Er berechnete die jener Centripetalkraft entsprechende Beschleunigung g_1 und fand, daſs sie etwa der 3600. Teil der Fallbeschleunigung $g = 9{,}81$ m an der Erdoberfläche sei. Da aber der Mond nach trigonometrischen Messungen, die gleichzeitig von zwei Stellen der Erdoberfläche aus vorgenommen werden können, etwa 60 mal soweit vom Erdmittelpunkt entfernt ist wie ein auf der Erdoberfläche befindlicher Stein, so vermutete Newton, jene anziehende Kraft sei umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung.

In der wirklichen Berechnung ergiebt sich dies folgendermaſsen. Man betrachte die Bewegung des Mondes um die Erde als eine Kreisbewegung; dann ist die Centripetalkraft $p = mg_1 = \frac{4\,m r_1 \pi^2}{t^2}$, wo r_1 der Radius der Bahn, t die Umlaufszeit, m die Masse des Mondes ist. Daraus folgt als Centripetalbeschleunigung $g_1 = \frac{4\,r_1 \pi^2}{t^2}$. Setzt man $60\,r$ für r_1 ein, wo r den Erdradius bedeutet, und setzt man die Umlaufszeit des Mondes gleich 27 Tg. 7 St. 43 Min. oder 2 360 580 Sek., so wird $g_1 = \frac{4 \cdot 60\,r \cdot \pi^2}{2\,360\,580^2} = \frac{2\,r\pi \cdot 120\,\pi}{2\,360\,580^2}$. Setzt man ferner den Erdumfang $2\,r\pi$ abgerundet gleich 40 000 000 m, was der ursprünglichen Definition des Meters entspricht, so ergiebt sich als Centripetal-

beschleunigung $g_1 = 0{,}00276$ m, also etwas mehr als $\frac{1}{4}$ cm. Jetzt folgt:

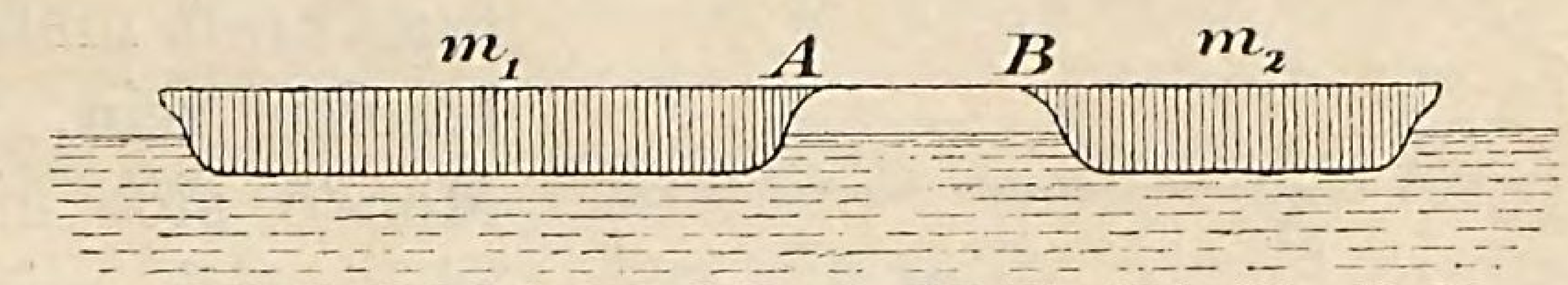
$$\frac{g}{g_1} = \frac{9{,}81}{0{,}00276} = \text{rd. } 3555.$$

Dafs nicht genau 3600 erhalten wird, hat seinen Grund in der Annahme der abgerundeten Zahlen 60 und 40000000. Auch müfste 9,81 um den Betrag vergröfsert werden, um den g infolge der Erddrehung vermindert worden ist. Der Näherungswert reicht aber für unsere Zwecke aus. (Will man genauer rechnen, so addiere man zu dem Äquatorialwerte $g = 9{,}780$ den durch die Centrifugalkraft verloren gegangenen Anteil 0,033, was 9,813 giebt und nehme z. B. das arithmetische Mittel zwischen diesem Werte und dem Polarwerte 9,831, was auf 9,822 führt.) Nimmt man umgekehrt das Newtonsche Gesetz als richtig an, so ergiebt sich die Mondentfernung aus $\frac{g}{g_1} = \frac{(x\varrho)^2}{\varrho^2}$ oder $\frac{g}{x^2} = \frac{4\pi^2 x\varrho}{t^2}$ als $x = \sqrt[3]{\frac{gt^2}{4\pi^2\varrho}} = 60{,}144$ Erdradien, denn hier bedeutet $1 : x$ das Verhältnis der Entfernungen.

2) Das Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Newton stellte ferner das Gesetz von der Gleichheit der Wirkung und der Gegenwirkung auf, das uns als etwas Selbstverständliches erscheint, damals aber bei manchen Gelehrten auf Widerspruch stiefs. Er behauptete also: Die Erde wird vom Monde mit derselben Kraft angezogen wie der Mond von der Erde.

Fig. 1.



Zur Erläuterung dieser Annahme diene folgendes Beispiel: Zwei Schiffe von den Massen m_1 und m_2, Fig. 1, seien durch ein Tau AB miteinander verbunden, dieses Tau aber werde auf irgend eine Weise angespannt, sei es, dafs bei A oder bei B oder gleichzeitig bei A und B gezogen wird, was ganz gleichgültig ist. Ist nun p die spannende Kraft, so setzen sich beide Schiffe in Bewegung, das eine gemäfs der Formel $p = m_1 g_1$, das andere gemäfs der Gleichung $p = m_2 g_2$, sobald nur vom Widerstande des Wassers und der Luft abgesehen wird. Daraus aber folgt: $m_1 g_1 = m_2 g_2$ und $m_1 : m_2 = g_2 : g_1$, d. h. die Beschleunigungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen der Schiffe.

Man kann nun die spannende Kraft durch irgend eine andere ersetzen; man denke sich z. B. bei A den Nordpol eines starkwirkenden Magnetstabes, bei B den Südpol eines anderen Magneten. Auch dabei

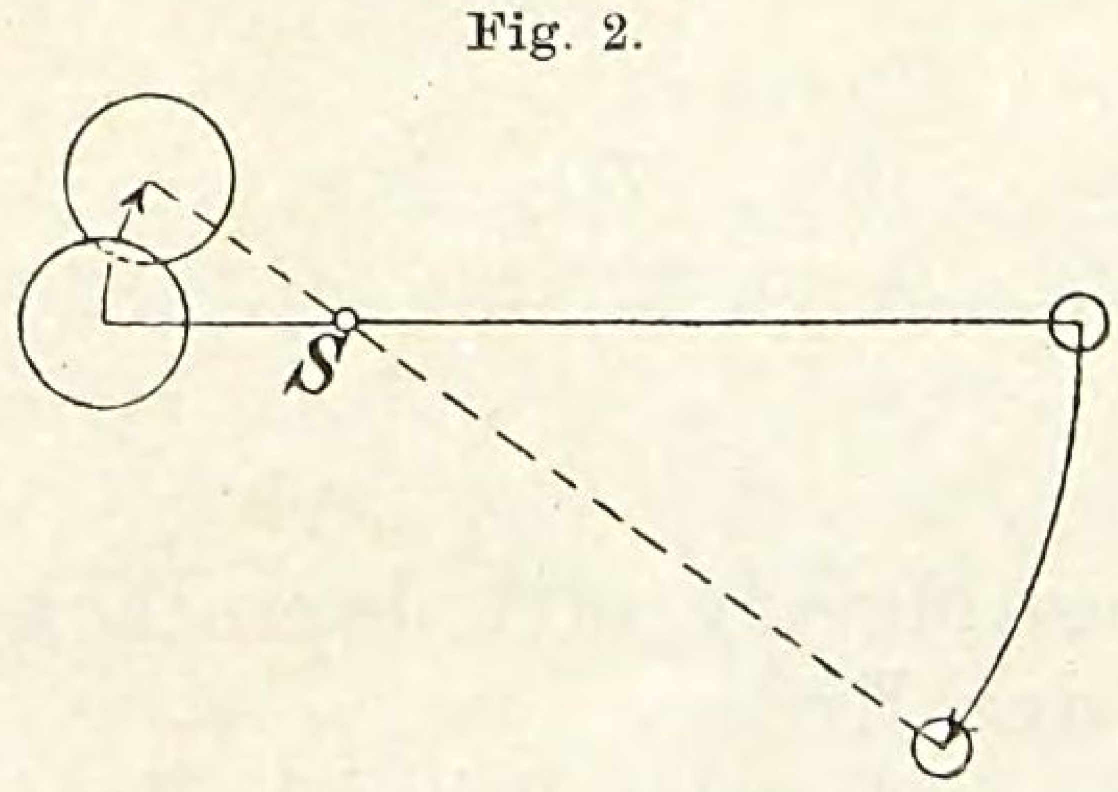
ist die Anziehung eine gegenseitige, d. h. es wird wiederum für jede Stellung $m_1 g_1 = m_2 g_2$ oder $p_1 = p_2$. Eine ähnliche gegenseitige Anziehung nimmt Newton, ohne ihr Wesen weiter zu erklären*), auch bei dem Monde und der Erde an. Würden also beide zunächst stillgestellt, so würden sie sich einander entgegen bewegen, und zwar würde der Mond mit der oben berechneten Beschleunigung von etwa $\frac{1}{4}$ cm beginnen, die Erde aber, deren Masse nach unten anzugebender Berechnung etwa 81 mal so grofs ist wie die des Mondes, mit dem 81. Teile dieser Beschleunigung. Schliefslich würden sie sich in dem Punkte treffen, der den ursprünglichen Abstand im Verhältnis 1 : 81 teilt, d. h. (wenn man beide Körper als Punkte betrachtet, so dafs die Mittelpunkte einander unendlich nahe rücken können) in dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte, der während der ganzen Bewegung seine Lage nicht ändern würde.

Hierin lag der erste Keim zu dem später entwickelten Schwerpunktsprinzip der Mechanik.

3) Mond und Erde umkreisen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt.

Nach dem Gesagten wird der Mond durch die Centripetalkraft an die Erde gefesselt, jedoch durch eine ebenso grofse Centrifugalkraft gehindert, sich ihr zu nähern. Eine ebenso starke Centripetal- und Centrifugalkraft mufs auch bei der Erde vorhanden sein, wenn ihr Abstand vom Monde sich nicht ändern soll. So ergiebt sich mit Notwendigkeit die Annahme, dafs beide Körper um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt kreisen, Fig. 2. Dabei wirken, wenn r_1 und r_2 die Abstände von diesem sind, die entgegengesetzt gerichteten Centrifugalkräfte $m_1 r_1 \vartheta^2$ und $m_2 r_2 \vartheta^2$, wo ϑ die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit ist. Beide sind gleich, denn es ist $m_1 = 81\, m_2$, $r_1 = \frac{1}{81} r_2$, also $m_1 r_1 = 81\, m_2 \cdot \frac{1}{81} r_2 = m_2 r_2$. Ebenso grofs wie die Centrifugalkräfte sind die wirkenden Centripetalkräfte.

Fig. 2.



In dieser neuen Auffassung lag der Keim zu der von Newton angebahnten Himmelsmechanik, die durch Laplace und Gaufs erfolgreich ausgebaut wurde, obwohl z. B. das Problem der drei Körper

*) Die neuere Physik ersetzt die Fernwirkungen durch vermittelnde Aktionen der Ätherteilchen aufeinander, die wie elektrische und optische Ätherschwingungen mit grofser Geschwindigkeit den Weltraum durcheilen.

noch heute die Kräfte der Analysis übersteigt und mit Hilfe der Störungstheorie nur Näherungslösungen gefunden hat. Dafs in Wahrheit beide Körper sich (von den Störungen abgesehen) nicht in Kreisen, sondern in ähnlichen Ellipsen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen, der dabei in je einem der Brennpunkte der Ellipsen liegt, sei beiläufig bemerkt. Die Bahnen könnten ebenso gut Parabeln oder Hyperbeln sein, also Kegelschnitte überhaupt. Darin hat man das Gesetz für die Bewegung der Doppelsterne.

4) Formulierung des Newtonschen Gesetzes.

Aus der Erfahrung wufste man von jeher, dafs ein Stein von doppelter Masse das doppelte Gewicht eines solchen von einfacher Masse hat, und so drängte sich Newton die Annahme auf, dafs die gegenseitigen Anziehungen den Massen der Körper proportional sein müfsten. Oben war aber schon gezeigt, dafs sie umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung seien, demnach konnte die Anziehung oder Gravitation nur in der Form $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ oder in der Form $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ dargestellt werden, wo k irgend eine konstante Gröfse ist.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz sagt demnach folgendes aus:

Je zwei Weltkörper ziehen sich gegenseitig an mit einer Kraft $p = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$, die also proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ihrer Mittelpunkte ist.

Die Annahme, dafs bei Kugeln die Mittelpunkte mafsgebend seien, war zunächst nur eine instinktive Vermutung, die später von Newton durch eine interessante Berechnung als richtig nachgewiesen wurde. Unten wird sie in vereinfachter Form ausgeführt werden.

Die Bedeutung der Konstante k ergiebt sich aus folgendem: Ist sowohl m_1 als auch m_2 gleich der Masseneinheit und r gleich der Längeneinheit, so ist die Anziehung $p = k\frac{1 \cdot 1}{1^2} = k$. Demnach ist k diejenige Anziehung, die zwei irgendwie gewählte Masseneinheiten in einem Abstande, der gleich der irgendwie gewählten Längeneinheit ist, aufeinander ausüben. Selbstverständlich kann man die Wahl der Masseneinheit so treffen, dafs $k = 1$ wird; auch kann man k zunächst willkürlich gleich 1 setzen. Davon soll bisweilen Gebrauch gemacht werden, weil es sich dann um die einfachere Form $p = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ handelt. Die Gröfse von k soll unten bestimmt werden. Zu ihrer Kenntnis ist die der mittleren Dichte des Erdkörpers nötig.

Ist nämlich m_1 die Masse des Erdkörpers, m_2 die eines Steines,

so ist an der Erdoberfläche nach dem Newtonschen Gesetze die Anziehung

$$p = k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

zugleich nach der Definition der Schwerkraft

$$p = m_2 g.$$

Da die linken Seiten gleich sind, sind auch die rechten gleich, also ist

$$k\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 g$$

oder

$$k = \frac{r^2 g}{m_1},$$

wo g die mittlere Schwerebeschleunigung 9,822, r der Erdradius, m_1 die Erdmasse ist. Vorläufig folgt daraus die Beziehung

$$g = k\frac{m_1}{r^2}.$$

Diese giebt zunächst die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche an, wenn m_1 die Erdmasse, r die Entfernung des Steines vom Mittelpunkte der Erde ist; sie gilt aber auch für die Centripetalbeschleunigung des von der Erde angezogenen Mondes, sobald nur r die Entfernung desselben vom Erdmittelpunkte bedeutet.

Setzt man für m_1 die Sonnenmasse, so gilt die Gleichung für die Centripetalbeschleunigung, welche einen Planeten abhält, sich von der Sonne zu entfernen.

5) Eins der Kepplerschen Gesetze. Das hier zu sagende gilt zunächst für Kreisbahnen. Die Anziehung der Sonne gebe einem Planeten die Centripetalbeschleunigung

$$g_1 = \frac{mk}{r_1^2} = \frac{4 r_1 \pi^2}{t_1^2},$$

einem andern

$$g_2 = \frac{mk}{r_2^2} = \frac{4 r_2 \pi^2}{t_2^2}$$

dann folgt durch Division

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{t_2^2}{t_1^2}$$

oder

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Folglich: Die Quadrate der Umlaufszeiten beider Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Entfernung.

Ist z. B. m_2 doppelt so weit von der Sonne entfernt, wie m_1, und ist t_1, die Umlaufszeit von m_1, gleich einem Jahre, so ist

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8},$$

folglich $t_2 = t_1\sqrt{8} = \sqrt{8}$ Jahre $= \sim 2{,}83$ Jahre.

Aus der Entfernung erhält man so die Umlaufszeit, aus der Umlaufszeit die Entfernung. Die erstere ergiebt sich durch Beobachtung, die letztere durch Rechnung.

6) Massenverhältnisse der Weltkörper.

Man kann dieselbe Methode benutzen, die Verhältnisse der Massen zu ermitteln, indem man einen der Sonne gehorchenden Planeten und einen zum letzteren gehörigen Trabanten (Mond) betrachtet.

Die Anziehung der Erde auf den Mond giebt als Beschleunigung

$$\frac{4\, r\pi^2}{t^2} = k\frac{m}{r^2},$$

die von der Sonne auf die Erde ausgeübte Anziehung giebt als Beschleunigung

$$\frac{4\, R\pi^2}{t_1^2} = k\frac{M}{R^2},$$

wo R die Entfernung der Erde von der Sonne, t_1 ihre Umlaufszeit, M die unbekannte Masse der Sonne ist. Durch Division erhält man

$$\frac{r}{R}\frac{t_1^2}{t^2} = \frac{m}{M}\cdot\frac{R^2}{r^2},$$

folglich ist

$$M = m\frac{R^3}{r^3}\frac{t^2}{t_1^2}.$$

Setzt man die Umlaufszeit des Mondes gleich 39 343 Minuten, die der Erde (das Jahr) gleich 525 950 Minuten, setzt man ferner die mechanisch oder trigonometrisch zu berechnenden Entfernungen R und r gleich 20 000 000 bezw. 50 000 Meilen, also $\frac{R}{r} = \frac{400}{1}$, so folgt

$$M = 400^3 \cdot \frac{39\,343^2}{525\,950^2} m = \sim 358\,120 \text{ m}.$$

Unter den gemachten Annahmen ist also die Sonnenmasse das 358 000fache der Erdmasse. Genauere Berechnungen ergeben das 355 000fache.

Kennt man also bei einem Planeten seine Umlaufszeit um die Sonne und die Umlaufszeit eines seiner Trabanten, kennt man ferner die Entfernung des Trabanten vom Planeten und die (z. B. aus der Umlaufszeit und dem Vergleiche mit dem Erdjahr zu berechnende) Entfernung des Planeten von der Sonne, so kann man das Massenverhältnis zwischen der Sonne und dem Planeten berechnen.

So hat man z. B. die Jupitermasse gleich 340 Erdmassen, die Saturnmasse gleich 102 Erdmassen, die des Uranus gleich 14,5 Erdmassen gefunden.

Dividiert man jede der gefundenen Massen durch den Inhalt $\frac{4}{3}r^3\pi$ des betreffenden Weltkörpers (dessen Durchmesser sich aus dem scheinbaren Durchmesser und der Entfernung berechnen läſst), so findet man die Dichtigkeit des Weltkörpers im Verhältnis zu der der Erde.

Die Sonne hat 1 409 725 Erdvolumina, der Jupiter 1491, der Saturn 772, der Uranus 86,5.

Setzt man die Dichte der Erde gleich 1, so ergiebt sich für die Sonne die Dichtigkeit 0,252, für den Jupiter 0,227, für den Saturn 0,131, für den Uranus 0,167. Aus der geringen Dichte der Sonne wird man auf hohen Hitzegrad schlieſsen dürfen, der dem starken Massendruck im Innern dieses Weltkörpers entgegen zu wirken hat, möge dieser nun flüssig oder gasförmig sein.

7) Fallbeschleunigung auf den Weltkörpern.

Die Masseneinheit wird auf der Sonne die Beschleunigung

$$g_1 = \frac{m_1 k}{r_1^2}$$

erhalten, auf der Erde ist

$$g = \frac{mk}{r^2},$$

folglich ist

$$\frac{g_1}{g} = \frac{m_1}{m}\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{355\,000}{1} \cdot \frac{1^2}{112^2},$$

denn der Durchmesser der Sonne, also auch der Halbmesser, ist etwa 112 mal so groſs, als der der Erde. Demnach findet man als Fallbeschleunigung auf der Sonnenoberfläche

$$g_1 = \frac{9,82 \cdot 355\,000}{112^2} = \sim 272\,\text{m},$$

also etwa das 28,3 fache von der Fallbeschleunigung auf der Erde.

Ebenso hat man die Fallbeschleunigung auf den Planeten des Sonnensystems bestimmt.

8) Dichtigkeit der Erde und anderer Weltkörper. Weiter kommt man von hier aus nur, wenn man die Dichtigkeit der Erde kennt. In den Lehrbüchern der Physik wird beschrieben, wie Mackelyne und Hutton im Jahre 1772 auf beiden Seiten des Berges Schuhallien in Schottland die von der Bergmasse auf das Bleilot ausgeübte Ablenkung maſsen und 4,71 als die Dichte der Erde im Vergleich zum Wasser fanden. Cavendish hat auf Anregung Michells die Torsion, die eine an der Torsionswage hängende und von groſser seitlich befindlicher Bleimasse angezogene Bleikugel anzeigte, mit Hilfe des Gesetzes der Torsionselastizität benutzt, den Vergleich mit der Erdanziehung zu machen. Entsprechende Versuche wurden im Jahre 1837 von Reich angestellt. Das Mittel ergab sich als 5,44. Baily hat im Jahre 1843 aus langen Versuchsreihen 5,66 abgeleitet. Reich wiederholte die Versuche und gab im Jahre 1852 den Wert 5,58 an. Weitere Versuche aus neuerer Zeit lassen **5,56** bis **5,6** als den wahrscheinlichen Wert der mittleren Dichte der Erde erscheinen.

Oben waren die Dichtigkeiten einiger Weltkörper im Vergleich zu der der Erde angegeben. Jetzt kann man sie auf Wasser beziehen und findet z. B. als Dichte der Sonne 1,38, des Jupiter 1,25, des Saturn 0,72, des Uranus 0,92 u. s. w.

9) **Aufgabe.** Wie groſs ist die Gravitationskonstante?

Auflösung. An der Erdoberfläche gilt für jede Anziehung die Gleichung

$$p = mg,$$

gleichzeitig soll sein

$$p = k\frac{m \cdot m_1}{r^2},$$

wo m_1 die Erdmasse, r der Erdradius, z. B. in Metern, ist. Aus beiden Gleichungen folgt:

$$k\frac{m_1}{r^2} = g,$$

also

$$k = \frac{g \cdot r^2}{m_1} = \frac{g \cdot r^2}{\frac{4}{3} r^3 \pi p'} = \frac{3g}{4 r \pi p'}.$$

Hier ist $g = 9{,}8224$, $4r\pi$ als doppelter Erdumfang gleich 80 000 000 zu setzen; das spezifische Gewicht p' der Erde soll als 5,56 angenommen werden. Dann wird

$$k = \frac{3 \cdot 9{,}8224}{80\,000\,000 \cdot 5{,}56} = 6{,}625 \cdot 10^{-8}.$$

10) Bemerkungen über die Bedeutung des Newtonschen Gesetzes. Wir werden noch mehrfach auf kosmische Verhältnisse

zu reden kommen, obwohl diese Dinge mit den beabsichtigten technischen Lehren nichts zu thun haben. Sie klären aber über andere physikalische Verhältnisse auf, die sich experimentell kaum mit entsprechender Genauigkeit nachweisen lassen.

Das Newtonsche Gesetz gilt nämlich nach Coulomb auch von den gegenseitigen Anziehungen kleiner magnetischer Massen, ebenso von den gegenseitigen Abstofsungen bei entgegengesetztem Magnetismus. Das Gleiche gilt von elektrischen Teilchen. Das Gesetz lehrt uns ferner die Entstehung des galvanischen Stromes kennen. Die gegenseitigen Einwirkungen bewegter Stromteilchen aufeinander, die sich in verschiedenen Drähten bewegen, erfolgen allerdings nach einem anderen Gesetze. Dieses aber schliefst das Newtonsche als besonderen Fall in sich. Auf andere Anwendungen kann jetzt noch nicht eingegangen werden.

Die Aufstellung des Gravitationsgesetzes durch Newton, welches den gesamten Weltraum beherrscht, war eine Grofsthat, der wir den Ausbau der Astronomie und der mathematischen Physik verdanken, wie er besonders in den letzten 100 Jahren im Sturmschritt vor sich gegangen ist.

Erst seit Newtons Entdeckung konnte man die Kepplerschen Gesetze begründen und die Dynamik des Sonnensystems in derartiger Schärfe ausbauen, dafs man z. B. aus den Abweichungen der Uranus-Bewegung auf die Existenz eines noch nicht bekannten Planeten schliefsen durfte, der auf Grund der Berechnungen Leverviers von Galle aufgesucht und gefunden wurde. Auch die Erklärung der Ebbe und Flut, die man von Aristoteles bis auf Newton vergeblich gesucht hatte, wurde durch den letzteren gegeben. Auf Jahrhunderte hinaus war man jetzt imstande, Tag und Stunde hervorragend starker Fluten für jeden Küstenort vorher zu berechnen. Die Resultate dieser Zeitberechnungen sind in neuerer Zeit als kritische Tage erster Ordnung vielfach für meteorologische Zwecke mifsbraucht worden.

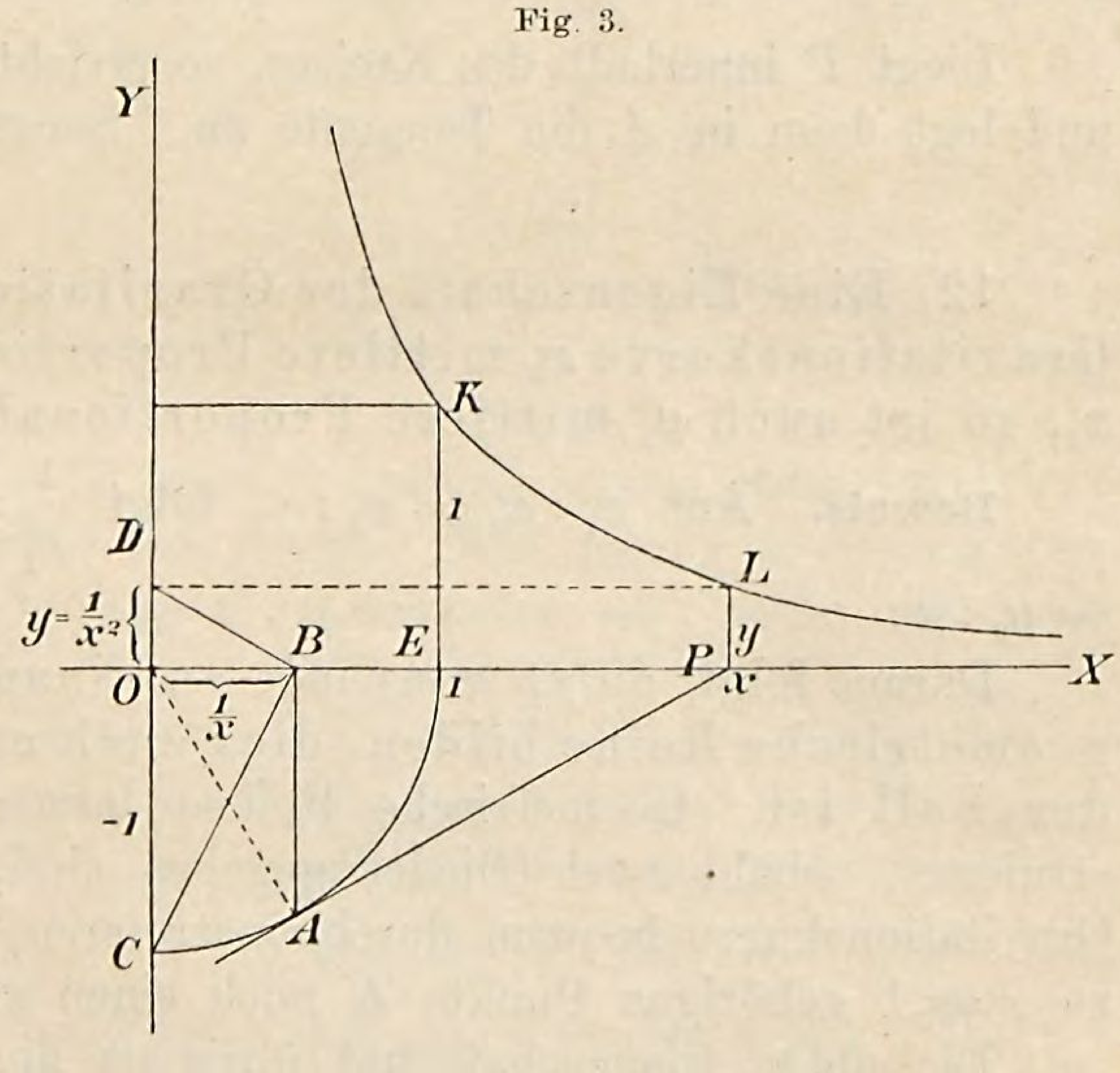
Kapitel II.

Die Gravitationskurve $y = \frac{1}{x^2}$ und der Potentialbegriff.

11) Erste Konstruktion der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$.

Angenommen im Punkte O befinde sich die dort festgehaltene Masse 1, auf der X-Achse befinde sich frei beweglich ebenfalls die Masse 1, und diese werde von der ersteren nach dem Newtonschen Gesetz angezogen, dann ist die Anziehung $p = k\frac{1 \cdot 1}{x^2} = \frac{k}{x^2}$. Um jedoch ganz einfache Formeln zu erhalten, wollen wir die Gravitationskonstante $k = 1$ setzen, so daſs $p = \frac{1}{x^2}$ wird. Um ein Bild von dem Verhalten in verschiedenen Lagen zu bekommen, errichte man an jeder Stelle der X-Achse ein Lot $y = \frac{1}{x^2}$, dann liegen die Endpunkte der Lote auf einer Kurve, deren Gleichung durch die letzte Beziehung gegeben ist. Ihr Lauf soll nur im ersten Quadranten verfolgt werden.

Fig. 3.



Man erhält einigen Überblick schon dadurch, daſs man an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ die Lote

$$y_1 = \frac{1}{1^2} = 1,\quad y_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},\quad y_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9},\quad y_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}, \ldots$$

errichtet, an den Stellen $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ die Lote 4, 9, 16, 25, ... Auch beliebig viele Zwischenwerte kann man konstruieren, und leicht erkennt man, dafs für $x = \infty$ der Wert von $y = 0$, für $x = 0$ dagegen $y = \infty$ wird, so dafs die Koordinatenachsen Asymptoten der Kurve werden.

Man findet für jeden beliebigen Punkt P der X-Achse vom Abstand $OP = x$ die Ordinate bequem folgendermafsen: Man schlage um O den Einheitskreis, lege an ihn von P aus die Tangente PA, fälle vom Berührungspunkte A aus auf die X-Achse das Lot AB (so dafs nach Pythagoras $OB \cdot OP = OA^2$ oder $OB \cdot x = 1$, also $OB = \frac{1}{x}$ ist), verbinde B mit C und errichte auf CB im Punkte B ein Lot bis zum Schnittpunkte D mit der Y-Achse, dann ist $CD = y$ die gesuchte Ordinate. Vollendung des Rechtecks $PODL$ giebt den zu P gehörigen Punkt L der Kurve.

Beweis. Es war $OB = \frac{1}{x}$. Nach bekanntem Satze ist $OD : OB = OB : OC$ oder $OD : \frac{1}{x} = \frac{1}{x} : 1$, also ist $OD = \frac{1}{x^2}$, und ebenso $PL = \frac{1}{x^2}$. L ist also ein Punkt der gesuchten Kurve.

Liegt P innerhalb des Kreises, so errichtet man erst das Lot PA und legt dann in A die Tangente an. Sonst ändert sich nichts.

12) Eine Eigenschaft der Gravitationskurve. Ist bei der Gravitationskurve x_2 mittlere Proportionale zwischen x_1 und x_3, so ist auch y_2 mittlere Proportionale zwischen y_1 und y_3.

Beweis. Aus $x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ folgt $\frac{1}{x_1^2} : \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{x_2^2} : \frac{1}{x_3^2}$ oder $y_1 : y_2 = y_2 : y_3$.

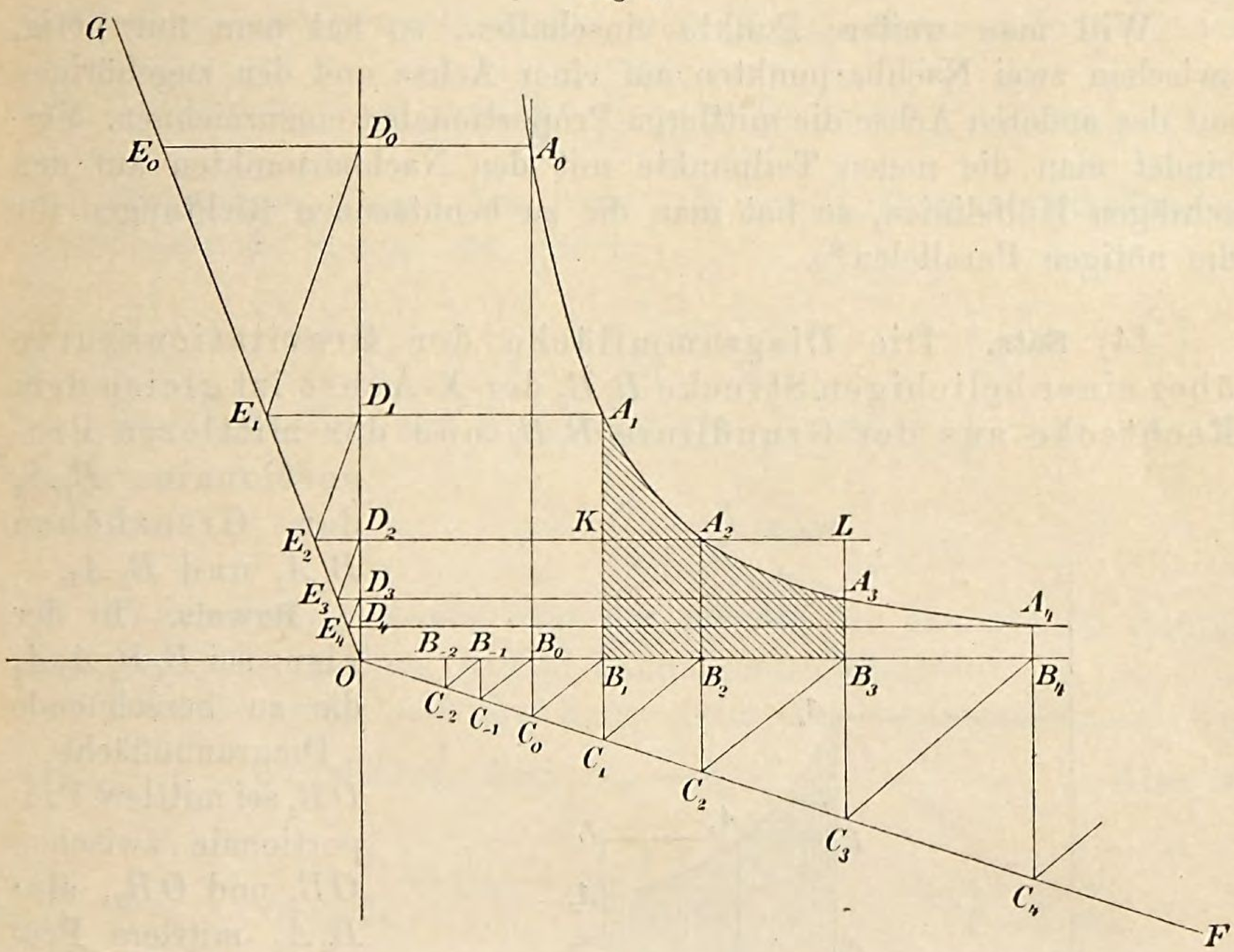
Daraus folgt, dafs, wenn die aufeinander folgenden x eine geometrische Reihe bilden, dies auch mit dem zugehörigen y der Fall ist. Geometrische Reihen lassen sich aber leicht konstruieren, sobald zwei Glieder gegeben sind, folglich läfst sich die Gravitationskurve bequem durchkonstruieren, sobald man neben dem zu $x = 1$ gehörigen Punkte K noch einen zweiten, L, kennt.

Die obige Eigenschaft hat übrigens die vorliegende Kurve mit allen Kurven von der Gleichung $y = x^p$ gemein, d. h. mit allen Parabeln höherer Ordnung, zu denen auch die gleichseitige Hyperbel als Isotherme oder Mariottesche Kurve, die Adiabate für Luft und Wasserdampf und andere gehören. (Vgl. Method. Lehrbuch der Math. III, von Seite 162 ab.)

Die nachstehende Konstruktion gilt also von allen diesen Kurven

13) **Aufgabe.** (Zweite Konstruktion der Kurve.) Aus zwei Punkten A_1 und A_2 der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ (allgemeiner $y = x^p$) beliebig viele ihrer Punkte zu konstruieren.

Fig. 4.



Auflösung. A_1 ($x = 1$, $y = 1$) und A_2 (nach voriger Art konstruiert) seien zwei Punkte der Kurve. Man lege eine beliebig gerichtete Hilfslinie OF in den 4. Quadranten und ziehe die Senkrechten $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ bis zu dieser Geraden, darauf noch C_1B_2. Legt man Parallele zur letzteren B_1C_0 und C_2B_3 durch B_1 und C_2, und darauf Senkrechte C_0B_0 und B_3C_3, und setzt man diese Zickzack-Konstruktion beiderseits fort, so erhält man beliebig viele Punkte

$$\ldots, B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$$

auf der X-Achse, deren Abstände eine geometrische Reihe bilden.

Ebenso lege man eine beliebig gerichtete Gerade OG in den 2. Quadranten, ziehe von A_1 und A_2 aus die Horizontalen $A_1D_1E_1$ und $A_2D_2E_2$, verbinde D_1 mit E_1 und mache dieselbe Konstruktion wie vorher, so daſs man auf der Y-Achse Punkte

$$\ldots, D_{-3}, D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1, D_2, D_3 \ldots$$

erhält.

Die Senkrechte und Wagerechte durch je zwei gleichzahlige der auf beiden Koordinatenachsen gefundenen Punkte geben je einen Schnittpunkt, und so erhält man beliebig viele Punkte

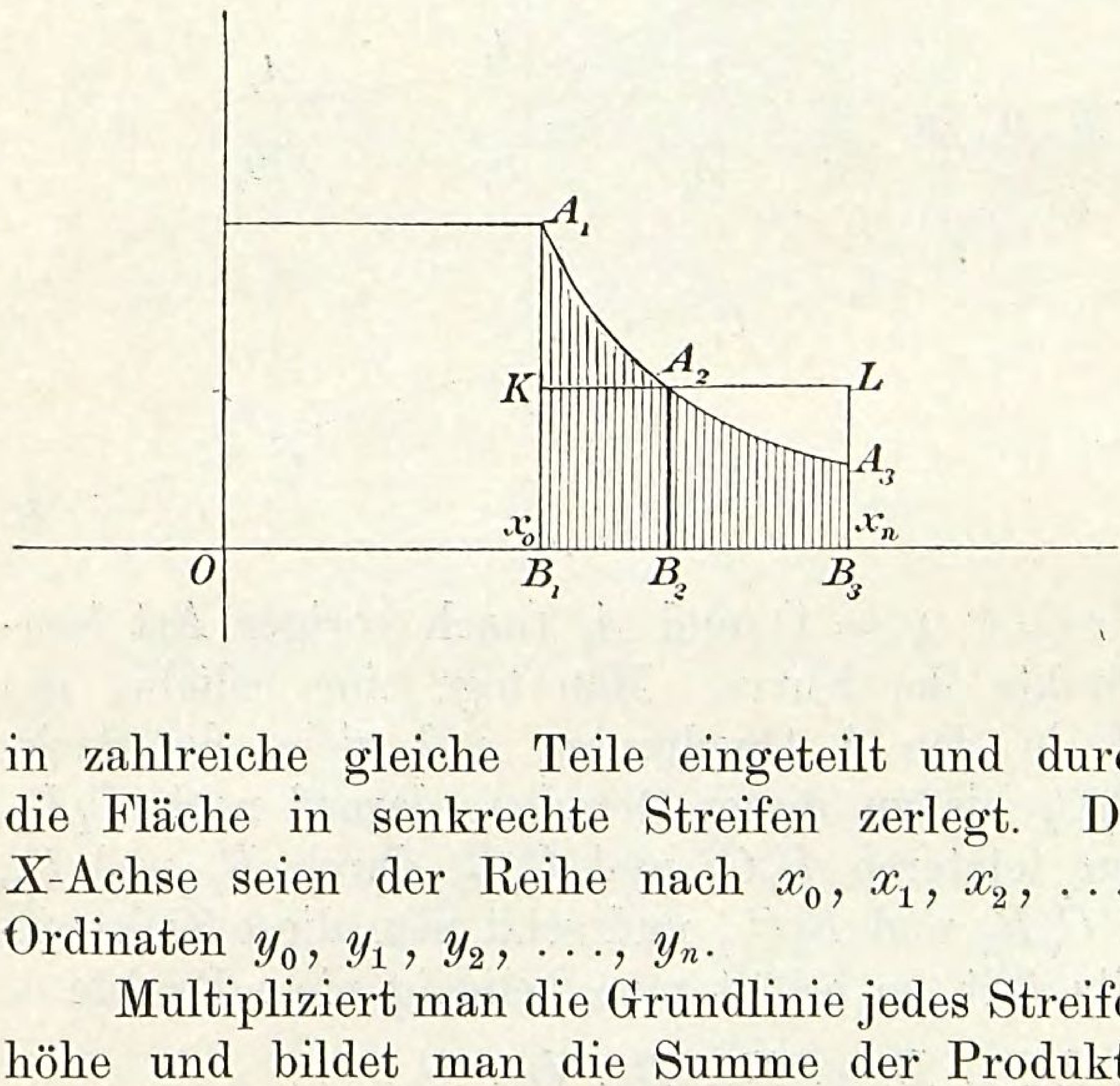
$$\ldots, A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$$

der Kurve.

Will man weitere Punkte einschalten, so hat man nur nötig, zwischen zwei Nachbarpunkten auf einer Achse und den zugehörigen auf der anderen Achse die mittleren Proportionalen einzuzeichnen. Verbindet man die neuen Teilpunkte mit den Nachbarpunkten auf den schrägen Hülfslinien, so hat man die zu benutzenden Richtungen für die nötigen Parallelen*).

14) **Satz.** Die Diagrammfläche der Gravitationskurve über einer beliebigen Strecke B_1B_3 der X-Achse ist gleich dem Rechtecke aus der Grundlinie B_1B_3 und der mittleren Proportionale B_2A_2 der Grenzhöhen B_1A_1 und B_3A_3.

Fig. 5.



Beweis. In der Figur sei $B_1B_3A_3A_1$ die zu berechnende Diagrammfläche, OB_2 sei mittlere Proportionale zwischen OB_1 und OB_3, also B_2A_2 mittlere Proportionale zwischen B_1A_1 und B_3A_3. Man denke sich B_1B_3 in zahlreiche gleiche Teile eingeteilt und durch entsprechende Lote die Fläche in senkrechte Streifen zerlegt. Die Teilpunkte auf der X-Achse seien der Reihe nach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, die zugehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Multipliziert man die Grundlinie jedes Streifens mit seiner Anfangshöhe und bildet man die Summe der Produkte, so erhält man bei endlicher Anzahl der Streifen zu Grofses, aber für $n = \infty$ den richtigen Inhalt. Wählt man die Endhöhen, so erhält man zunächst zu Kleines,

*) Diese Art des Konstruierens ist in technischen Kreisen sehr beliebt, da nur Verschiebung des Winkelhakens auf der Reifsschiene erforderlich ist. Sie gilt auch für die Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel und der adiabatischen Kurven. Bildet man auf der einen Achse die Punkte der geometrischen Reihe, trägt man aber auf der andern Achse gleiche Abstände ab, so erhält man eine logarithmische Linie.

aber für $n = \infty$ das Richtige. Also mufs man erst recht für $n = \infty$ Richtiges erhalten, wenn man irgend welchen Mittelwert zwischen Anfangs- und Grenzhöhe als Höhe jedes Streifens wählt, z. B. das arithmetische Mittel, oder, was besondere Einfachheit giebt, die mittlere Proportionale. Für den ersten Streifen wird bei Anwendung der letzteren die Höhe gleich $\sqrt{y_0 y_1}$, also sein Inhalt gleich

$$(x_1 - x_0)\sqrt{y_0 y_1} = (x_1 - x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{1}{x_1^2}} = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}.$$

Bildet man ebenso den Inhalt für jeden folgenden Streifen, so erhält man als Summe der Inhalte

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right).$$

Hier hebt sich mit Ausnahme von $\frac{1}{x_0}$ und $-\frac{1}{x_n}$ alles weg, so dafs man erhält

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n}.$$

Für unendlich grofse Zahl der Streifen ist dies absolut richtig. Aber für jede beliebige Anzahl kommt dasselbe heraus.

Dasselbe erhält man aber auch, wenn man die Grundlinie $x_n - x_0$ mit $\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_n}$ multipliziert, denn $(x_n - x_0)\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n}$. Also ist

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = (x_n - x_0)\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_n} = (x_n - x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{1}{x_n^2}}$$

$$= (x_n - x_0)\sqrt{\frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{y_n}}.$$

$\sqrt{\frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{y_n}}$ ist aber die mittlere Proportionale der Grenzhöhe, also ist der Satz als richtig bewiesen. Zugleich aber ist gezeigt, dafs der Inhalt auch gleich dem Produkte aus der Längeneinheit und dem Unterschiede der reziproken Werte der Anfangs- und End-Abscisse ist.

Reicht das Diagramm von x_0 bis $x = +\infty$, so erhält man als Fläche

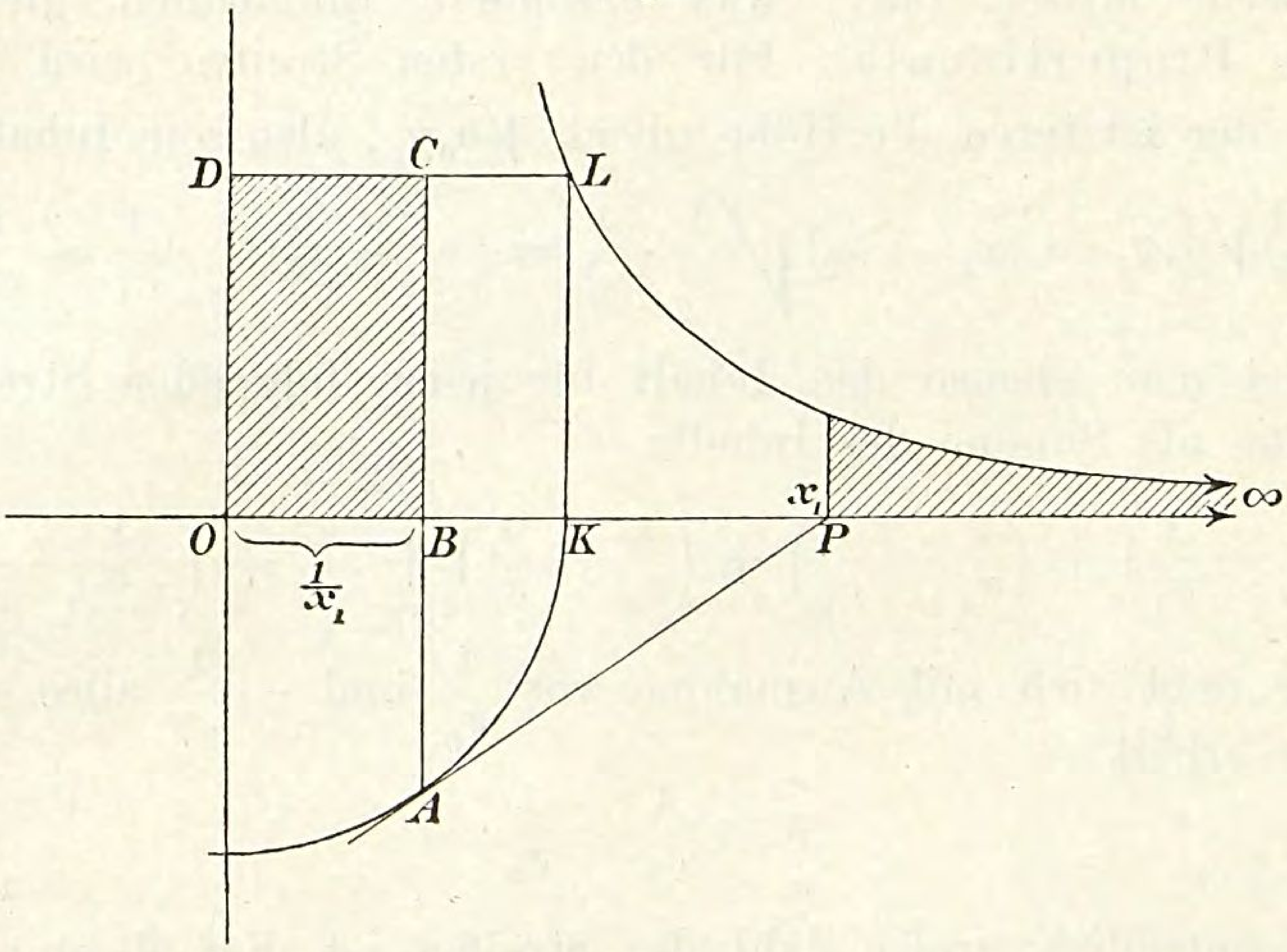
$$\overset{x=\infty}{\underset{x_0}{F}} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{x_0} - o = \frac{1}{x_0}.$$

Also: Die Diagrammfläche von x_0 bis ∞ ist gleich dem Rechtecke aus der Längeneinheit und dem umgekehrten Werte von x_0.

15) Einfachste Konstruktion des Inhalts der Diagrammflächen.

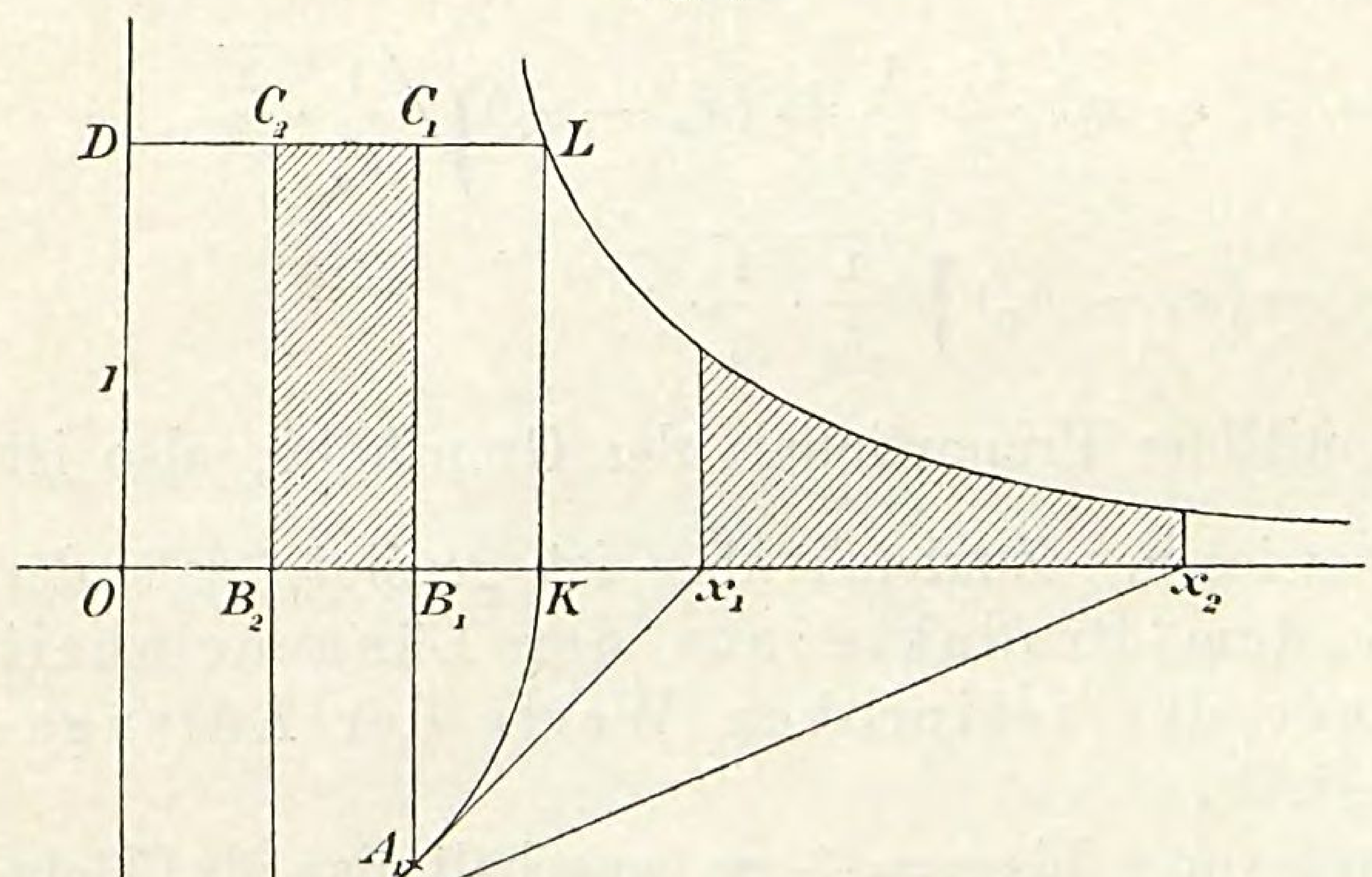
a) Um die Fläche des von x_1 bis ∞ reichenden Diagramms zu konstruieren, ziehe man von $P(OP = x_1)$ aus an den um O geschlagenen

Fig. 6.



Einheitskreis die Tangente PA und lege durch den Berührungspunkt A die Senkrechte ABC. Diese schneidet vom Quadrate $OKLD$ über der Einheitsstrecke OK das Rechteck $OBCD$ ab. Der Inhalt des letzteren ist, da nach dem Früheren $OB = \frac{1}{x_1}$ ist, gleich $\frac{1}{x_1} \cdot 1$ und damit gleich der Fläche des Diagramms. Ist $x_1 = 1$, so ist das Diagramm gleich 1. Ist $x_1 < 1$, so ist erst das Lot, dann die Tangente zu ziehen, und das Rechteck wird gröſser als die Flächeneinheit. Ist $x_1 = o$, so ist es unendlich groſs.

Fig. 7.



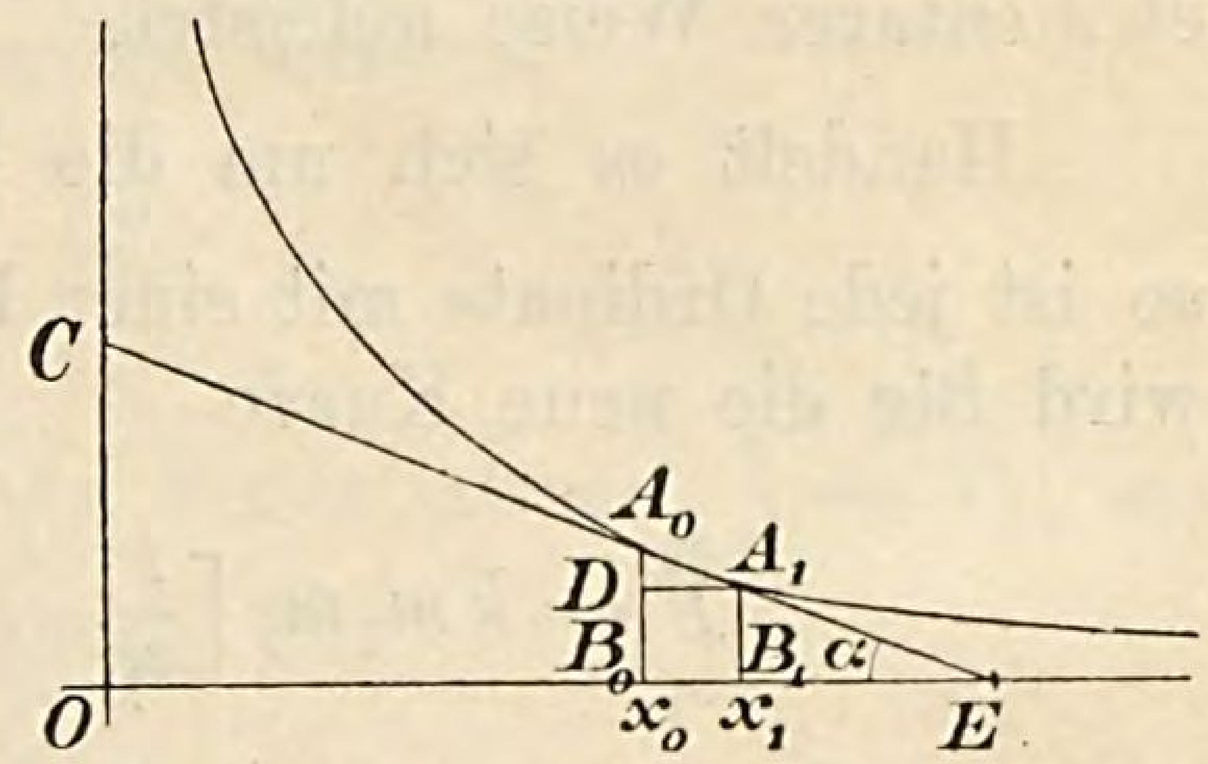
Ist die Einheit nicht gegeben, so findet man sie durch Halbierung des rechten Winkels BOD. Die Winkelhalbierende schneidet in L.

b) Um die Diagrammfläche $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ graphisch darzustellen,

ziehe man die Tangenten P_1A_1 und P_2A_2. Die von den Berührungspunkten aus gezogenen Senkrechten geben im Einheitsquadrate das Rechteck $B_1C_1C_2B_2$, welches den Inhalt des Diagramms angiebt. Denn

$$OB_1C_1D - OB_2C_2D = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}.$$

Fig. 8.



16) **Aufgabe.** Die Tangenten der Gravitationskurve zu konstruieren.

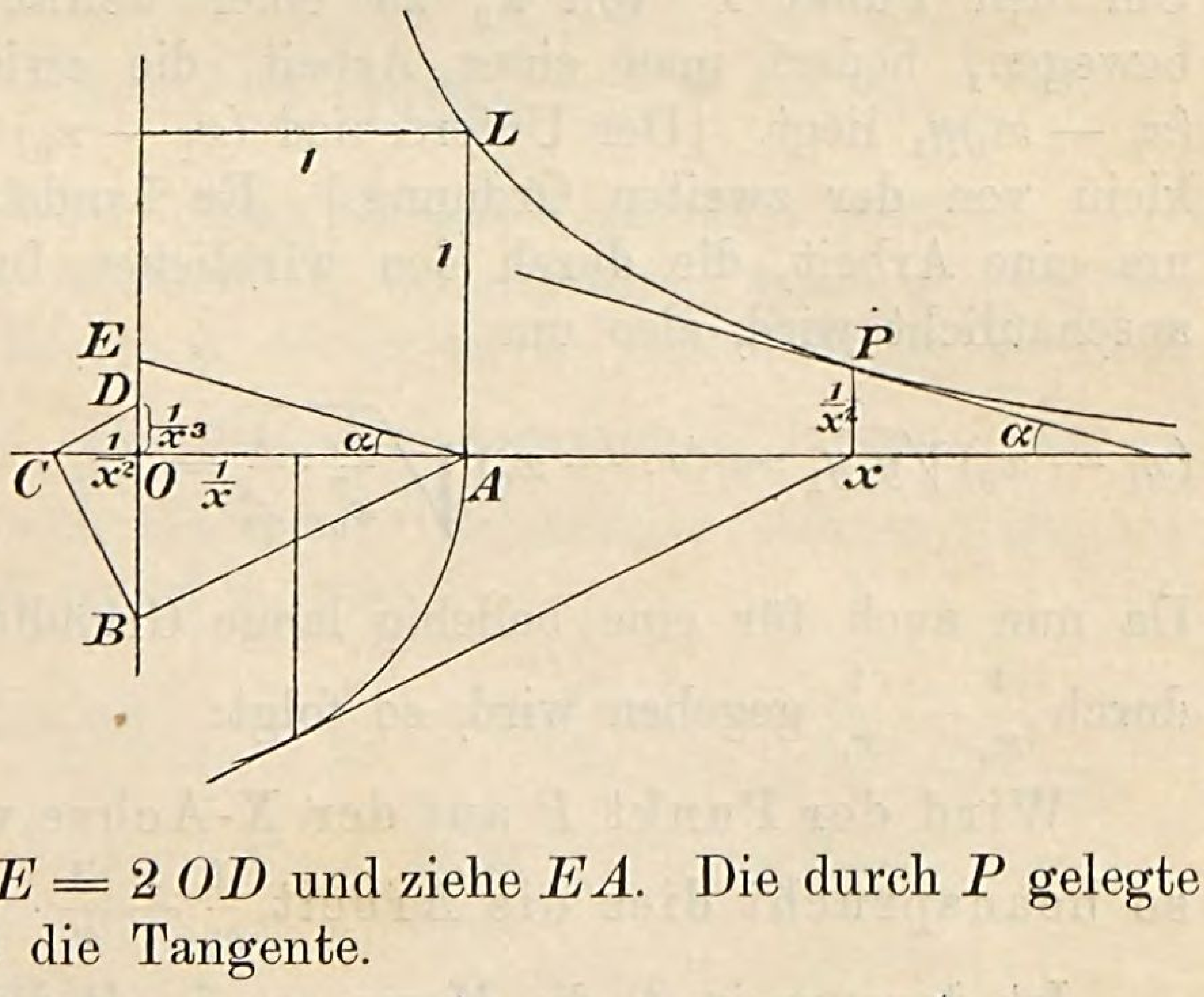
Auflösung. Man denke sich zwei benachbarte Punkte A_0 und A_1 der Kurve verbunden. Die Verbindungslinie gebe auf den Koordinatenachsen die Schnittpunkte C und E. Sind die Abscissen x_0 und x_1, die Ordinaten y_0 und y_1, und setzt man $\sphericalangle OEC = \alpha$, so ist

$$\tan\alpha = \frac{y_0 - y_1}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_1^2}}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_0^2 x_1^2 (x_1 - x_0)} = \frac{(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)}{x_0^2 x_1^2 (x_1 - x_0)} = \frac{x_1 + x_0}{x_0^2 x_1^2}.$$

Läſst man nun die Punkte x_0 und x_1 so nahe aneinander rücken, daſs man $x_1 = x_0$ setzen kann, so wird $\tan\alpha = \frac{2x_0}{x_0^4} = \frac{2}{x_0^3}$.

Dies giebt folgende Tangentenkonstruktion für einen Punkt P mit der Abscisse x. Man mache auf der Y-Achse $BO = \frac{1}{x}$, ziehe AB $(OA = 1)$, errichte auf AB in B ein Lot bis zum Schnitte C mit der X-Achse, errichte auf BC in C ein Lot bis zum Schnitte D mit der Y-Achse, mache $OE = 2\,OD$ und ziehe EA. Die durch P gelegte Parallele zu EA giebt die Tangente.

Fig. 9.



Beweis. $OB = \frac{1}{x}$, folglich $OC = \frac{1}{x^2}$, folglich $OD = \frac{1}{x^3}$, folglich $OE = \frac{2}{x^3}$, folglich $\tan\alpha = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{x^3}$.

Beispiel. Für $x = 1$ erhält man $\tan\alpha = \frac{2}{1}$. Die Neigung in L ist also leicht zu konstruieren. Man macht auf der X-Achse $AV = +\frac{1}{2}$ und verbinde V mit L, was die Tangente giebt.

Damit ist alles Erforderliche für die Gravitationskurve in elementarer Weise geleistet.

Handelt es sich um die Kurve $y = k\frac{m_1 m_2}{x^2}$, oder um $y = k\frac{m_1}{x^2}$, so ist jede Ordinate mit einer Konstanten zu multiplizieren. Demnach wird für die neue Kurve

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = k\,m_1 m_2\left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right] \text{ bezw. } k m_1\left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right].$$

Die Konstruktion der Kurve geschieht so, dafs man wie früher $\frac{1}{x^2}$ konstruiert, aber das km_1m_2-fache oder km_1-fache als Lot aufträgt. Bei der Tangentenkonstruktion wird $\tan\alpha = \frac{2\,k\,m_1 m_2}{x^2}$ bezw. $\frac{2\,k\,m_1}{x^2}$. Beispiele werden unten gegeben.

17) Mechanische Bedeutung der Diagrammfläche. Befindet sich im Punkte O die festgehaltene Masse 1 und ist der Massenpunkt P auf der X-Achse freibeweglich und ebenfalls mit der Masse 1 belegt, so ist die Anziehung für jede Lage x von der Gröfse $y = \frac{1}{x^2}$. Um den Punkt P von x_0 zu einer benachbarten Stelle x_1 zu bewegen, bedarf man einer Arbeit, die zwischen $(x_1 - x_0)y_0$ und $(x_1 - x_0)y_1$ liegt. [Der Unterschied $(x_1 - x_0)(y_0 - y_1)$ ist unendlich klein von der zweiten Ordnung.] Es handelt sich in Wirklichkeit um eine Arbeit, die durch den wirklichen Inhalt des Streifens veranschaulicht wird, also um

$$(x_1 - x_0)\sqrt{y_0 y_1} = (x_1 - x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{1}{x_1^2}} = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}.$$

Da nun auch für eine beliebig lange Grundlinie $x_1 - x_0$ der Inhalt durch $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$ gegeben wird, so folgt:

Wird der Punkt P auf der X-Achse von x_0 bis x_1 geführt, so beansprucht dies die Arbeit $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$.

Ist dagegen in O die Masse m_1, in P die Masse m_2 angebracht, so ist, wenn aufserdem die Anziehungskonstante k berücksichtigt wird die Arbeit $A = km_1 m_2\left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right]$.

Sind wiederum x_0 und x_1 benachbarte Werte, so entspricht dem kleinen Wege $w = x_1 - x_0$ eine Arbeit

$$pw = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0 x_1},$$

oder, wenn x_0 und x_1 gleich gesetzt werden können,

$$(x_1 - x_0)\frac{1}{x_0^2} = pw.$$

Setzt man den Potentialwert $\frac{1}{x_0} = V_0$, den Potentialwert $\frac{1}{x_1} = V_1$, so folgt als Arbeit für diese kleine Bewegung

$$pw = V_0 - V_1,$$

oder Kraft mal Kraftweg = Potentialdifferenz.

Daraus aber folgt

$$p = \frac{V_0 - V_1}{w},$$

d. h. Kraft = $\frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Weg}}$ = Potentialgefälle = G.

Berücksichtigt man noch m_2 und die Anziehungskonstante k, so ist die Kraft nicht gleich, aber proportional dem Potentialgefälle d. h.

$$p = km_2 \frac{V_0 - V_1}{w} = km_2 G = km_1 m_2 \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_0} = km_1 m_2 \frac{1}{r_0 r_1}.$$

Von diesem Satze wird häufig Gebrauch gemacht werden.

Giebt man dem im Abstande x_1 befindlichen Punkte P eine Geschwindigkeit v in der Richtung der positiven reellen Achse, so kann er infolge seiner Wucht (Energie) eine Arbeit $m_2 \frac{v^2}{2}$ leisten. Bis zu welcher Stelle wird er sich bewegen? Er entfernt sich so weit, bis seine Energie aufgezehrt ist, d. h. bis

$$km_1 m_2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right) = m_2 \frac{v^2}{2}$$

ist, oder bis

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} = \frac{v^2}{2km_1}$$

ist, also bis zum Abstande

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x_1} - \frac{v^2}{2km_1}} = \frac{2kx_1 m_1}{2km_1 - x_1 v^2}.$$

Setzt man den Inhalt des Diagramms gleich A, so bewegt sich der Punkt soweit, bis

$$A = m_2 \frac{v^2}{2}$$

ist.

Läſst man den Punkt P an einer Stelle x_1 los, und fällt er infolge der Anziehung in der Richtung nach O, so erreicht er an der Stelle x eine Geschwindigkeit, die sich aus

$$\frac{m_2 v^2}{2} = A = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right]$$

ergiebt. Es wird also

$$v = \sqrt{\frac{2A}{m_2}},$$

wo A das Arbeitsdiagramm ist.

Wird der Punkt in unendlicher Entfernung losgelassen, so handelt es sich um

$$\frac{m_2 v^2}{2} = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right] = \frac{k m_1 m_2}{x},$$

seine Geschwindigkeit an der Stelle x ist also

$$v = \sqrt{\frac{2 k m_1}{x}} = \sqrt{2 k m_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Das Geschwindigkeitsdiagramm, welches entsteht, wenn man für jeden Punkt x die Geschwindigkeit, mit der er passiert wird, als Lot errichtet, ist also eine Parabel von der Ordnung $-\frac{1}{2}$. Für $2 k m_1 = 1$ läſst sich die Kurve am einfachsten konstruieren, denn $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist mittlere Proportionale zwischen 1 und $\frac{1}{x}$.

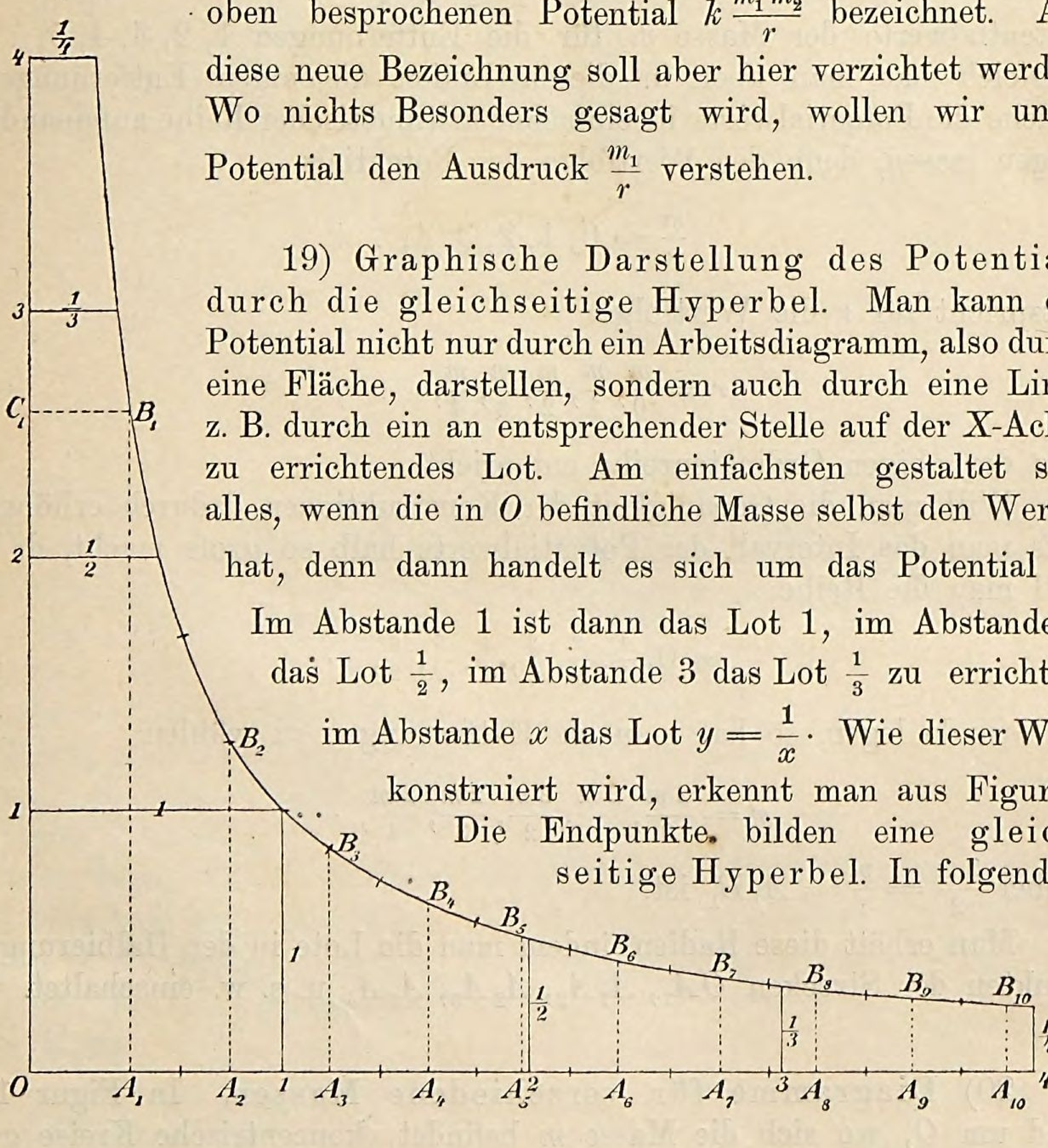
18) Der Potentialbegriff. Die Arbeit, die nötig ist, um den Punkt P aus der Lage x in unendliche Entfernung zu bringen, bezeichnet man als **das Potential** des in O befindlichen Punktes m_1 in Bezug auf den Massenpunkt m_2 für die Lage x. Das Potential wird also durch das bis ins Unendliche reichende Arbeitsdiagramm graphisch dargestellt Es ist gleich $\frac{k m_1 m_2}{x}$.

Andere verstehen unter Potential den Ausdruck $-\frac{k m_1 m_2}{x}$, also die Arbeit, die vom anziehenden Punkte an dem beweglichen geleistet wird, um ihn aus unendlicher Entfernung in die Lage x zu bringen.

Dieser Unterschied ist aber hier ohne wesentliche Bedeutung. Wenn hier +, statt — genommen wird, so geschieht dies im Anschlufs an Thomson und Tait, lediglich des leichteren Verständnisses wegen.

Man spricht häufig von dem Potentialwerte der in O befindlichen Masse m_1 für irgend einen Punkt des Raumes oder der Ebene, der etwa in der Entfernung r liegen möge. Dabei wird dann angenommen, dafs der freie Massenpunkt die Masse 1 habe, so dafs es sich um $\frac{m_1 \cdot 1}{r}$ oder $\frac{m_1}{r}$ handelt. Zugleich ist dabei $k = 1$ gesetzt. Diesen auf die Einheit von m_2 und auf $k = 1$ reduzierten Wert hat man als die Potentialfunktion im Gegensatze zum oben besprochenen Potential $k\frac{m_1 m_2}{r}$ bezeichnet. Auf diese neue Bezeichnung soll aber hier verzichtet werden. Wo nichts Besonders gesagt wird, wollen wir unter Potential den Ausdruck $\frac{m_1}{r}$ verstehen.

Fig. 10.



19) Graphische Darstellung des Potentials durch die gleichseitige Hyperbel. Man kann das Potential nicht nur durch ein Arbeitsdiagramm, also durch eine Fläche, darstellen, sondern auch durch eine Linie, z. B. durch ein an entsprechender Stelle auf der X-Achse zu errichtendes Lot. Am einfachsten gestaltet sich alles, wenn die in O befindliche Masse selbst den Wert 1 hat, denn dann handelt es sich um das Potential $\frac{1}{r}$. Im Abstande 1 ist dann das Lot 1, im Abstande 2 das Lot $\frac{1}{2}$, im Abstande 3 das Lot $\frac{1}{3}$ zu errichten, im Abstande x das Lot $y = \frac{1}{x}$. Wie dieser Wert konstruiert wird, erkennt man aus Figur 6. Die Endpunkte bilden eine gleichseitige Hyperbel. In folgendem tritt häufig an den Lehrer die Anforderung heran, für eine anziehende Masse m die Werte $\frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \frac{m}{5}, \cdots$ schnell zu zeichnen. Zu diesem Zwecke konstruiere man sich eine Schablone, ein Kurven-

lineal, welches von den Schenkeln eines rechten Winkels und von der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ begrenzt wird, wobei $OP = 1$ ein für allemal bestimmt angenommen ist. Ist nun z. B. $OC_1 = \frac{m}{1}$, so giebt die Horizontale $C_1 B_1$ die Ordinate

$$A_1 B_1 = \frac{m}{1}.$$

Trägt man $C_1 B_1$ von O aus beliebig oft auf der X-Achse ab, was $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ giebt, so hat man in den Ordinaten $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \ldots$ die gesuchten Strecken $\frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \cdots$ Dies sind z. B. die Potentialwerte der Masse m für die Entfernungen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Zugleich hat man aber in diesen Linien diejenigen Entfernungen, welche die Potentialwerte in einfacher arithmetischer Reihe aufeinander folgen lassen, denn der Wertfolge des Potentials

$$\frac{m}{r} = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

entspricht für r die Wertfolge

$$r = \frac{m}{0}, \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \ldots,$$

was der obigen Ordinatenreihe entspricht.

Will man die Genauigkeit der Konstruktionen dadurch erhöhen, daſs man das Intervall der Potentialwerte halb so groſs macht, d. h. will man die Reihe

$$\frac{m}{r} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \ldots$$

zu Grunde legen, so hat man als Entfernungen zu wählen

$$r = \frac{2m}{0}, \frac{2m}{1}, \frac{2m}{2}, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{4}, \ldots$$

wobei $\frac{2m}{2} = \frac{m}{1} = A_1 B_1$ ist.

Man erhält diese Radien, indem man die Lote in den Halbierungspunkten der Strecken $OA_1, A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4$ u. s. w. einschaltet.

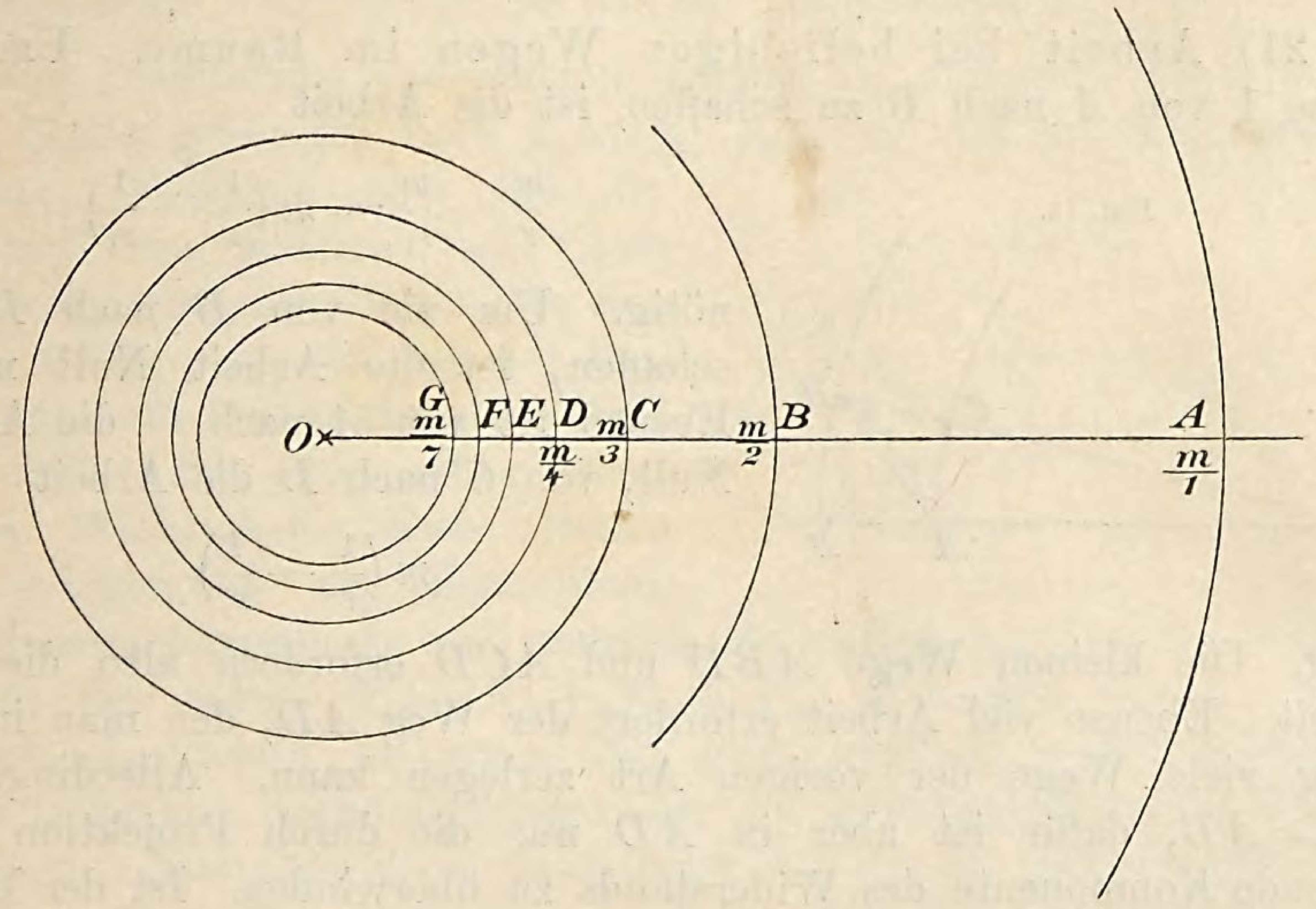
20) Diagramme für verschiedene Massen. In Figur 11 sind um O, wo sich die Masse m befindet, koncentrische Kreise geschlagen, an deren Stelle Kugeln zu denken sind. Die Radien sind der Figur 10 entnommen, der gröſste ist gleich $A_1 B_1$, der folgende gleich $A_2 B_2$, der dritte gleich $A_3 B_3$ u. s. w. Es handelt sich also um die Radien

$$r = \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \ldots$$

denen die Potentialwerte

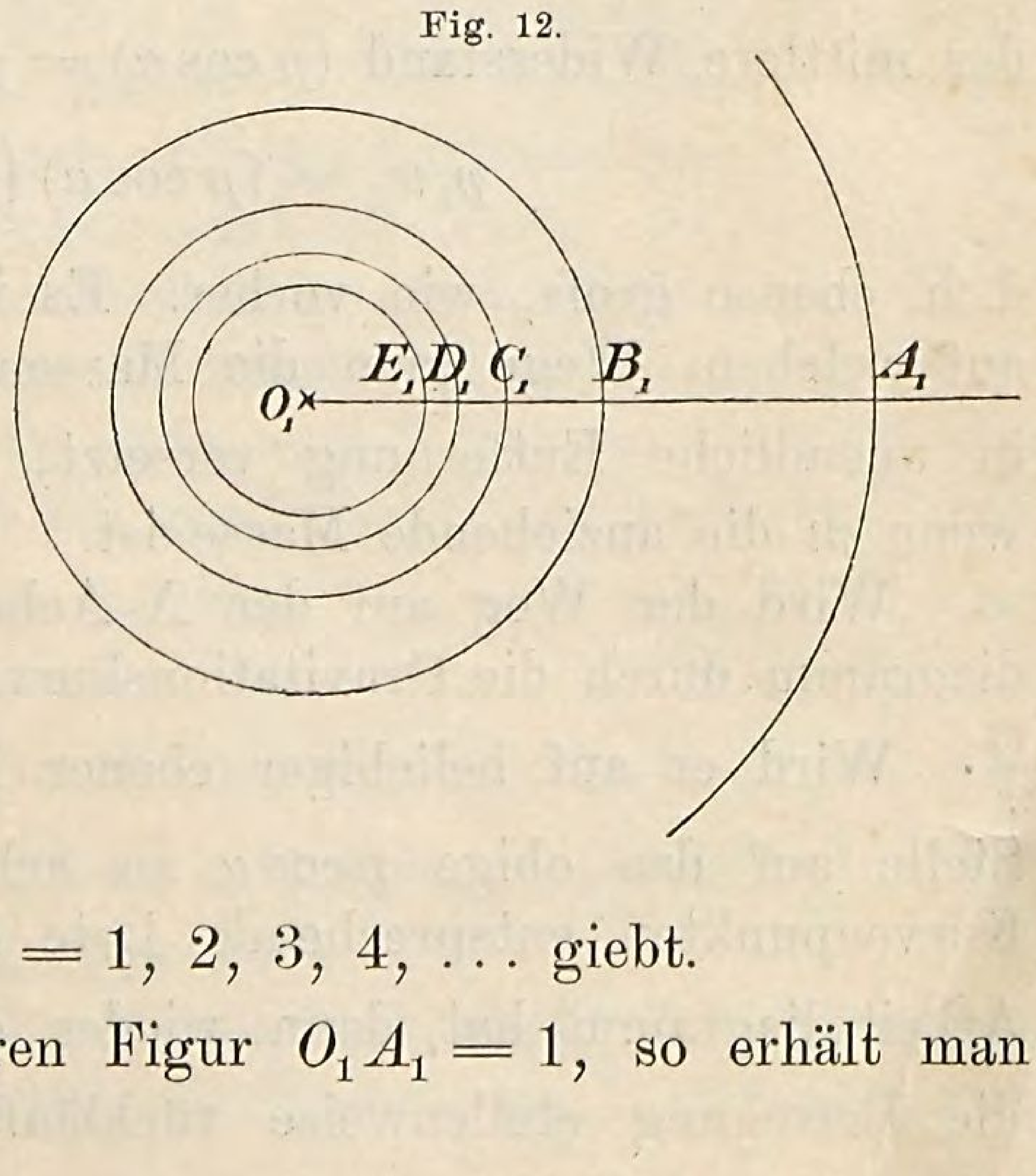
$$V = \frac{m}{r} = 1, 2, 3, 4 \cdots$$

Fig. 11.



entsprechen, so dafs die Potentialdifferenzen von Kreis zu Kreis konstant gleich 1 sind. Es kostet die Arbeit 1 um die Masse 1 von A aus ins Unendliche zu bringen, die Arbeit 1_1 die Masse 1 von B nach A zu bringen, ebenso viel Arbeit ist nötig, sie von C nach B zu bringen u. s. w.

Fig. 12.



In Figur 12 ist dasselbe für eine halb so grofse Masse m_1 in O_1 durchgeführt, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, ... entsprechen den Radien

$$r = \frac{m_1}{1}, \frac{m_1}{2}, \frac{m_1}{3}, \frac{m_1}{4}, \ldots$$

was die Potentialwerte $V_1 = \frac{m_1}{r_1} = 1, 2, 3, 4, \ldots$ giebt.

Setzt man in einer weiteren Figur $O_1 A_1 = 1$, so erhält man das Diagramm für die Masse 1.

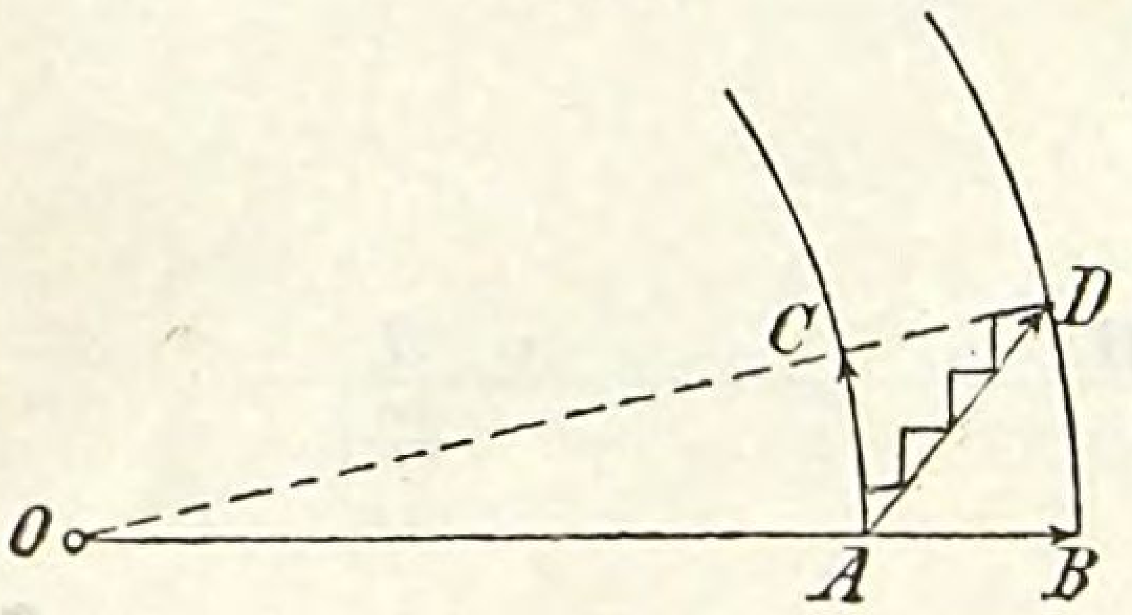
Am zweckmäfsigsten ist es, die Quadratseite OA_1 der Figur 10 gleich einem Centimeter zu machen, was den Einheiten des Centimeter-, Gramm-, Sekunden-Systems entsprechen würde.

Solche Diagramme werden später bei den Mehrpunktproblemen zu wichtiger Anwendung gelangen.

21) Arbeit bei beliebigen Wegen im Raume. Um die Masse 1 von A nach B zu schaffen, ist die Arbeit

$$\frac{m}{r} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Fig. 13.



nötig. Um sie von B nach D zu schaffen, ist die Arbeit Null nötig. Ebenso ist von A nach C die Arbeit Null, von C nach D die Arbeit

$$m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

nötig. Die kleinen Wege ABD und ACD erfordern also dieselbe Arbeit. Ebenso viel Arbeit erfordert der Weg AD, den man in beliebig viele Wege der vorigen Art zerlegen kann. Allerdings ist $AD > AB$, dafür ist aber in AD nur die durch Projektion entstehende Komponente des Widerstands zu überwinden. Ist der kleine Weg $AB = w$, der mittlere Widerstand gleich p, so ist die Arbeit gleich pw. Ist Winkel $BAD = \alpha$, so ist der kleine Weg

$$AD = \frac{w}{\cos\alpha} = w_1,$$

der mittlere Widerstand $(p\cos\alpha) = p_1$, die Arbeit also

$$p_1 w_1 = (p\cos\alpha)\left(\frac{w}{\cos\alpha}\right) = pw,$$

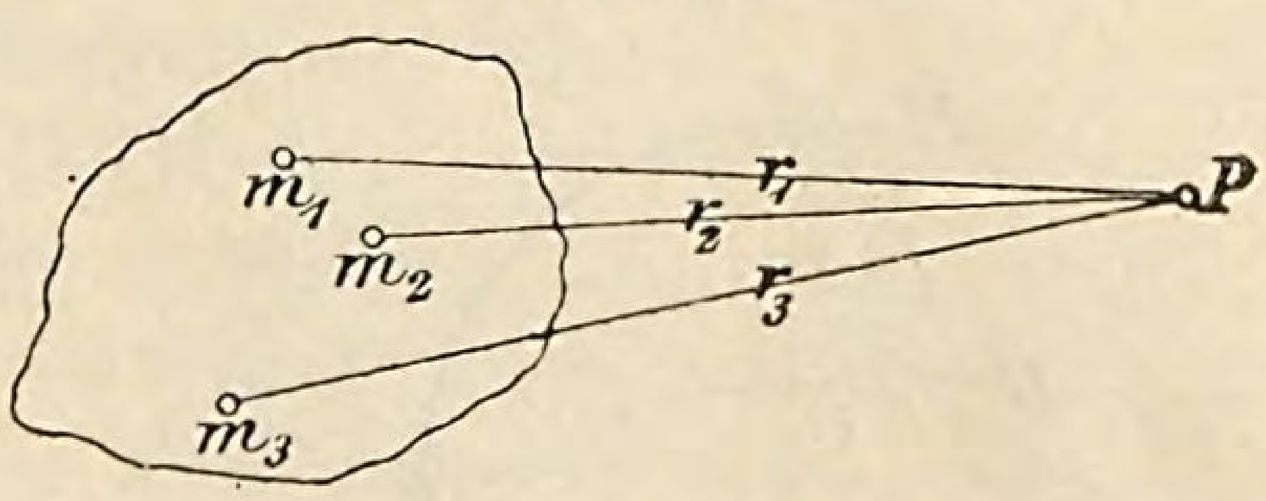
d. h. ebenso grofs, wie vorher. Es ist also vollständig gleichgültig, auf welchem Wege man die Masseneinheit aus einer Entfernung r in unendliche Entfernung versetzt, stets ist die Arbeit gleich $\frac{m}{r}$, wenn m die anziehende Masse ist.

Wird der Weg auf der X-Achse gemacht, so ist das Arbeitsdiagramm durch die Gravitationskurve dargestellt und hat den Inhalt $\frac{m}{r}$. Wird er auf beliebiger ebener Kurve gemacht, wobei an jeder Stelle auf das obige $p\cos\alpha$ zu achten ist, so kann man in den Kurvenpunkten entsprechende Lote auf die Ebene aufsetzen. Das Arbeitsdiagramm hat dann wieder den Inhalt $\frac{m}{r}$, nur mufs, wenn die Bewegung stellenweise rückläufig ist, das Widerstandslot als

negativ nach unten gerichtet sein. Die Fläche ist an solchen Stellen ebenfalls als negativ aufzufassen.

Bemerkung. Aus dieser Unabhängigkeit von der Wegrichtung läfst sich ein sehr wichtiger Schlufs ziehen. Befindet sich die von mehreren z. B. von drei Massen m_1, m_2, m_3 angezogene Masseneinheit in P_1 und bewegt man die letztere auf beliebigem ebenen Wege bis in unendliche Entfernung, so ist der Arbeitsbedarf $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m^3}{r_3}$. Die drei Diagramme sind nämlich einfach zu addieren, indem die zu jeder Stelle gehörigen Lote $p_1 \cos \alpha_1$, $p_2 \cos \alpha_2$ und $p_3 \cos \alpha_3$ vereinigt werden. Während also bei der Addition von Kräften nach dem Parallelogramm die Richtungen eine Rolle spielen, ist dies bei der Vereinigung von Potentialwerten nicht der Fall. Bei der aufserordentlichen Wichtigkeit dieses Satzes soll gelegentlich der Behandlung der Mehrpunktprobleme von anderem Gesichtspunkte aus ein weiterer Beweis des Satzes $V = V_1 + V_2 + V_3$, nach dem die Potentiale einfach algebraisch zu summieren sind, gegeben werden. Auf die darin liegenden Rechnungsersparnisse sei schon an dieser Stelle hingedeutet. Insbesondere darf man an Stelle des Diagramms einer beliebigen Bewegung stets das der entsprechenden radialen Bewegung setzen, was für das sogenannte Energieprinzip welches oben nur in Bezug auf die Radialbewegung besprochen wurde, von Bedeutung ist.

Fig. 14.



Man denke sich die freie Masse z. B. auf einem beliebigen ebenen Wege in unendliche Entfernung geführt. Der Weg mache wellenförmige Schwankungen, Windungen, Rückkehrbewegungen aller Art. Die an jeder Stelle wirkende Anziehungskraft werde auf die dortige Tangente der Bahn projiziert, die Projektion ist dort als Lot auf die Ebene zu setzen, nach oben, wenn die Anziehung positiv, nach unten, wenn sie negativ ist. Ist m_1 die feste anziehende, m_2 die freie bewegliche Masse, so ist der Inhalt der gesamten Diagrammfläche gleich $k\frac{m_1 m_2}{r}$, also ebenso grofs, als ob der Weg von dem Abstande r aus auf geraden Linien erfolgt wäre.

Geht der Weg nicht ins Unendliche, sondern bis zu einem Abstande r_1, so ist die Diagrammfläche gleich $km_1 m_2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right]$, möge der Weg noch so kompliziert gewählt sein.

Darin, dafs man imstande ist, den Inhalt so willkürlich begrenzter Diagramme sofort anzugeben, liegt ein Vorteil der Einführung des

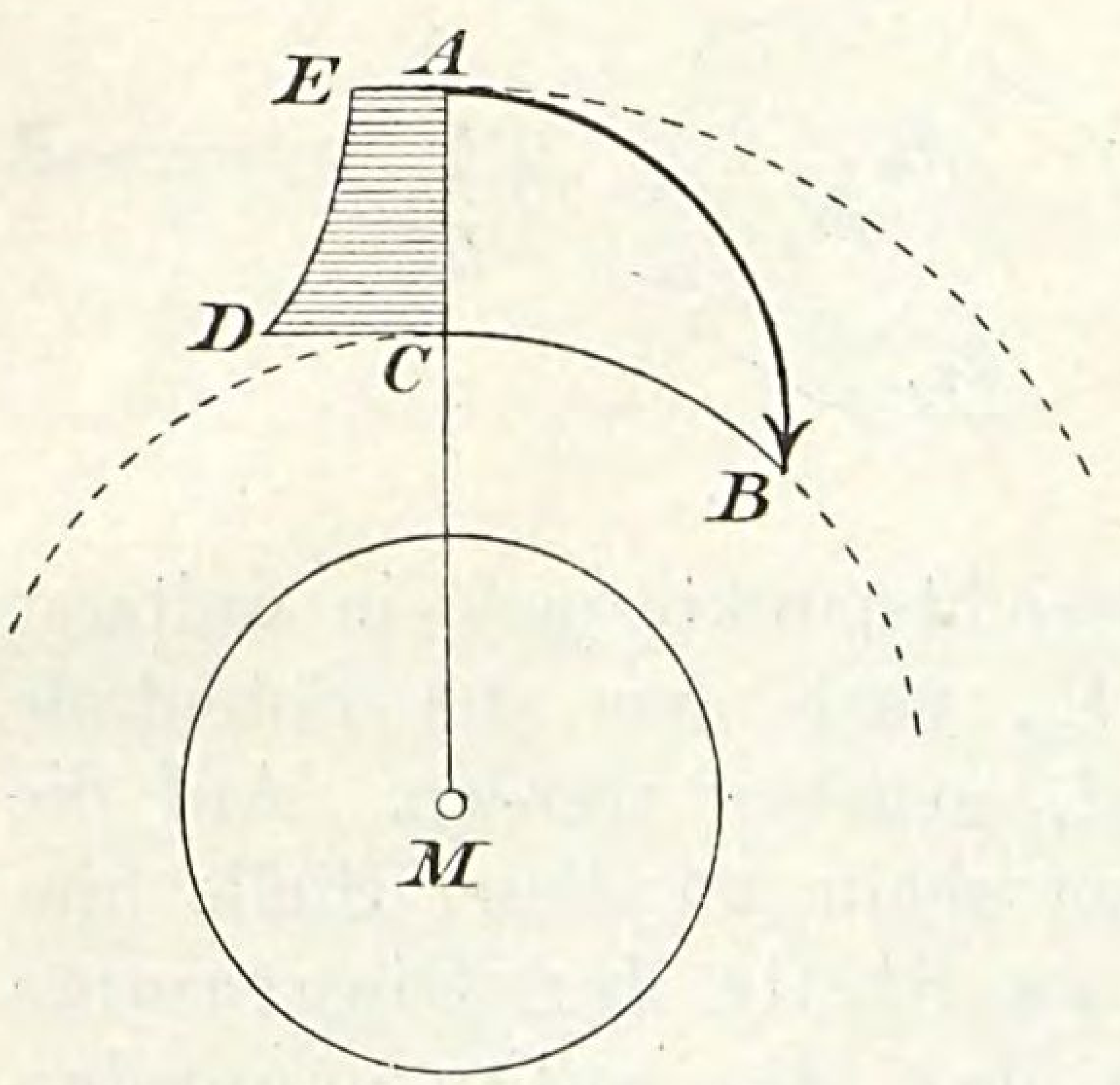
Potentialbegriffs, der nicht hoch genug angeschlagen werden kann. Von diesem Gesichtspunkte aus scheint sich Green zur Schöpfung der Potentialtheorie entschlossen zu haben.

[Vgl. Green: An essay on the application etc. Nottingham 1828 und Crell. Journal 39, 44, 47.]

Eine weiterer Vorteil wird sich später ergeben.

22) Erhaltung der Energie oder Arbeit. Die freie Masse m_2 habe in A eine beliebige Geschwindigkeit v_1 erhalten, sie bewege sich durch Anziehung der in M festgehaltenen Masse m_1 nach B, so daſs es sich zunächst um die anziehende Kraft $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ handelt. Die ursprüngliche Energie war $\frac{m_2 v_1^2}{2}$, sie geht, wenn der Körper nach B gelangt, über in $\frac{m_2 v_2^2}{2}$. Werden keine Nebenarbeiten, wie Reibungsüberwindung und dergl. geleistet, so muſs der Energieunterschied $\frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_2 v_1^2}{2}$ genau der geleisteten Arbeit entsprechen, die durch das Diagramm $ACDE$ veranschaulicht

Fig. 15.



ist. Ihr Betrag ist gleich $k m_1 m_2 \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$, d. h. gleich der Potentialdifferenz. Demnach ist

$$\frac{m_2}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = k m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

oder

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 k m_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Die Bewegung erfolgt also derart, daſs die Energiedifferenz für den Anfang und das Ende jedes Weges gleich der entsprechenden Potentialdifferenz ist.

Setzt man ferner v_2 variabel gleich v und r_2 variabel gleich r, so folgt

$$\frac{m_2}{2} v^2 - \frac{k m_1 m_2}{r} = \frac{m_2}{2} v_1^2 - \frac{k m_1 m_2}{r_1} = C.$$

Rechts steht die konstante Anfangsdifferenz zwischen Energie und Potential, links stehen veränderliche Gröſsen. Trotzdem besteht Gleichheit beider Seiten. Folglich: Die Bewegung erfolgt so, daſs die Differenz zwischen Energie und Potential stets

konstant bleibt. Also: $T - U = c$, wenn T die Energie, U das Potential bedeutet.

Die von der Anziehung geleistete Arbeit kommt als Energie zum Vorschein, welche diese Arbeit selbst wieder schaffen kann, z. B. als Hebungsarbeit, wenn die Bahn sich wieder nach aufsen lenkt. Bei dem Entfernen tritt also Verlangsamung ein.

Wird dieselbe Niveaufläche mehrfach passiert, so geschieht es stets mit derselben Geschwindigkeit.

Man bezeichnet $m_2 \frac{v^2}{2}$ als kinetische Energie. Entfernt sich der Körper, so setzt sich ein Teil davon über in potentielle Energie, die dem Diagramm $ACDE$ entspricht. Die potentielle Energie ist also aufgesammelte Hebungsarbeit. Kommt der Körper wieder näher an das Centrum, so setzt sich potentielle Energie in kinetische um.

In allen diesen Beziehungen liegt wiederum der wichtige Satz, den man den Satz von der Erhaltung der Arbeit nennt. (Energie, Wucht, auch wohl lebendige Kraft, sind Bezeichnungen für den Ausdruck $m \frac{v^2}{2}$.) Setzt man das Potential gleich $-\frac{m_1 m_2}{r}$, so geht der Satz in die gebräuchlichere Form $T + U = c$ über.

23) Ein kosmisches Beispiel. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne betrage rund 20 500 000 Meilen, die mittlere Geschwindigkeit 30 000 m. Wie grofs ist die Erdgeschwindigkeit in den verschiedenen Entfernungen von der Sonne?

Aus obiger Gleichung folgt

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2km_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)} = \sqrt{v_1^2 + \frac{2km_1(r_1 - r)}{rr_1}}.$$

Nun war für die Sonne in Nr. 7 gefunden $\frac{km_1}{\varrho^2} = 272$, also ist $km_1 = 272 \cdot \varrho^2 = 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2$, denn der Sonnenradius hat 95 000 Meilen Länge. Setzt man die Werte ein, so folgt

$$v = \sqrt{9 \cdot 10^8 + \frac{2 \cdot 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2\,(20\,500\,000 \cdot 7500 - r)}{20\,500\,000 \cdot 7500 \cdot r}}.$$

Für die Sonnennähe z. B. ist $r = \sim 20\,000\,000$ Meilen, also wird

$$v = \sqrt{9 \cdot 10^8 + \frac{2 \cdot 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2\,(20\,500\,000 - 20\,000\,000)\,7500}{20\,500\,000 \cdot 20\,000\,000 \cdot 7500^2}}.$$

Es folgt 30 750 m Geschwindigkeit. Man kann diesen besonderen Wert leicht mittels des Keplerschen Flächensatzes prüfen, nach dem die verschiedenen Geschwindigkeiten für gleiche Zeiträume gleiche Sektoren geben, so dafs die Geschwindigkeiten umgekehrt proportional

dem vom Sonnenmittelpunkte auf die Tangente der Bahn (im Orte des Planeten) gefällten Lote sind. — Ebenso findet man die Geschwindigkeit für die Sonnenferne und für jede beliebige Stelle der Bahn.

Aus dieser Veränderlichkeit der Geschwindigkeiten und Entfernungen ergiebt sich, dafs einer vollen Umdrehung der Erde um ihre Achse (Sterntag) verschiedene Wege entsprechen, ferner ist klar, dafs auch gleiche Wege in der Sonnennähe stärker auf den Unterschied zwischen Stern- und Sonnentag einwirken, als in der Sonnenferne. Der Unterschied ist ein Maximum in der Sonnennähe, ein Minimum in der Sonnenferne. Die Sonnentage sind also länger in der Sonnennähe, als in der Sonnenferne. So ergiebt sich die Notwendigkeit, die Uhren von Tag zu Tag zu korrigieren, oder eine mittlere Zeit einzuführen. Dabei ist der Unterschied zwischen mittlerer und wahrer Zeit die sogenannte Zeitgleichung. Man denkt sich dabei im Laufe des Jahres neben der wirklichen Sonne eine hypothetisch angenommene mittlere Sonne am Himmel sich scheinbar bewegend. Durch Summierung der Unterschiede von Tag zu Tag steigt die Zeitdifferenz der Kulminationen beider Sonnen bis auf 17 Minuten, um dann wieder abzunehmen. (Vgl. Dr. Wislicenus: Astronomische Chronologie. Leipzig bei Teubner 1895.) Unter Sekunde im bürgerlichen Sinne hat man den 86 400ten Teil des mittleren Sonnentags zu verstehen. Die Definition der Zeiteinheit ist also nicht allzuleicht zu geben. Im Grunde hat sie nur eine vorübergehende Geltung, da die Dauer der Erdumdrehung seit Hipparch um etwa $\frac{1}{81}$ Sekunde zugenommen hat und auch die Dauer des Jahres nicht ohne Schwankungen ist.

Kapitel III.

Anziehung der homogenen Kugelschale, der Vollkugel und der Hohlkugel.

24) Vorbemerkung. Die Schwierigkeit der Anziehungsprobleme für beliebig gestaltete Körper liegt darin, dafs jedes Massenteilchen des einen anziehend auf jedes Teilchen des anderen einwirkt, so dafs es sich um unendlich viele Einzelkräfte von verschiedener Gröfse und Richtung handelt. Die Aufgabe, die Resultante und das etwa auftretende Kräftepaar zu finden, ist bisher auch mit höheren Hilfsmitteln nur in verhältnismäfsig einfachen Fällen gelungen. Man macht dabei gewisse vereinfachende Annahmen. Um zunächst von dem Einflusse absehen zu können, den die Teilchen jedes einzelnen Körpers aufeinander ausüben, wird dieser als starr betrachtet. Aufserdem nimmt man an, dafs die Massenverteilung eine homogene sei, d. h. dafs der Körper überall dieselbe Dichte habe, oder man macht wenigstens die Massenverteilung zu einer gesetzmäfsigen, man läfst z. B. bei einer Kugel die Dichte nach dem Mittelpunkte hin regelmäfsig zunehmen. Wir werden häufig die Dichte gleich eins setzen, so dafs die Inhaltsformel zugleich die Masse angiebt.

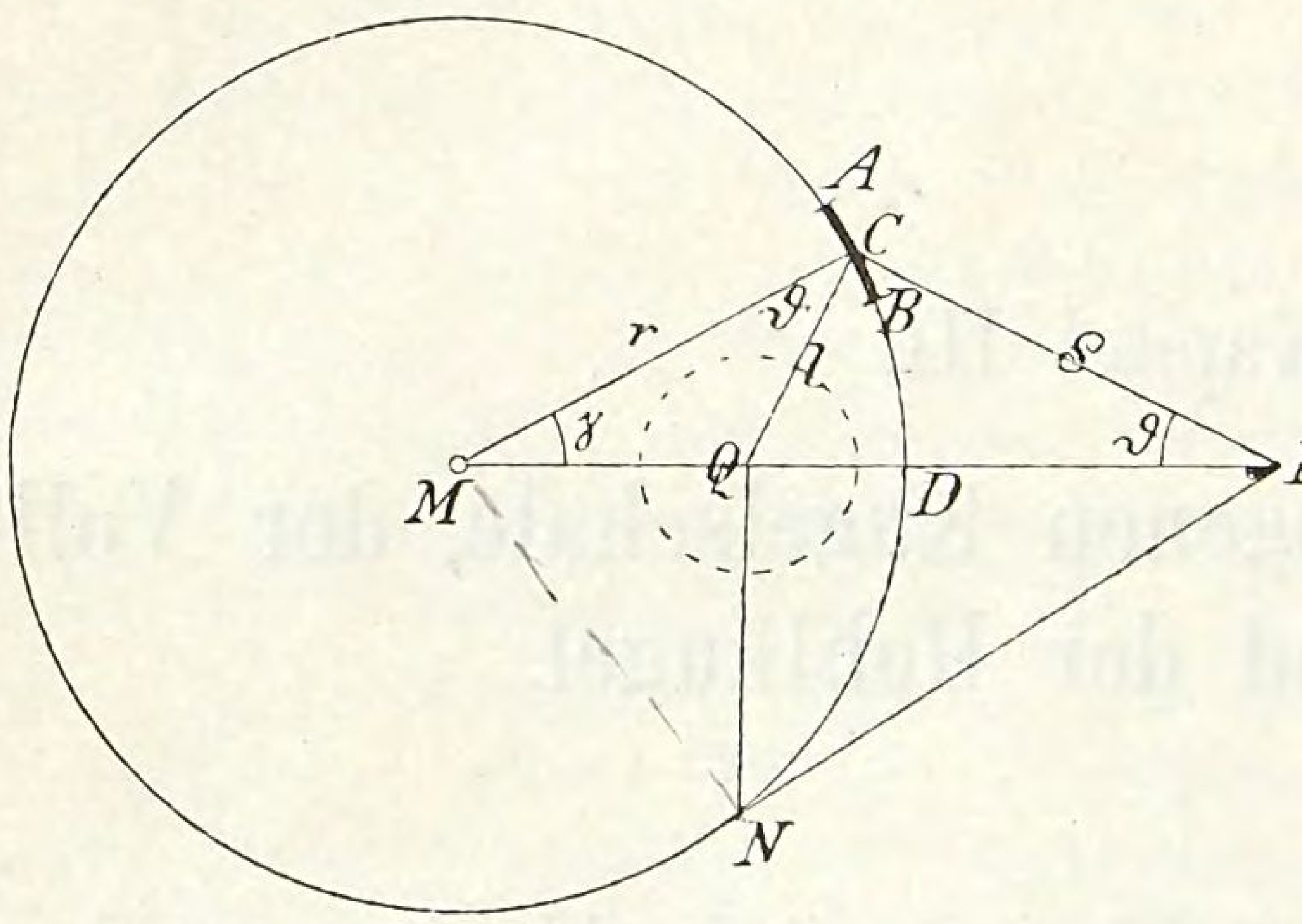
Unsere erste Aufgabe soll darin bestehen, zu beweisen, dafs eine homogen mit Masse belegte Kugelschale, ebenso eine homogene oder aus homogenen koncentrischen Schichten bestehende Kugel oder eine entsprechende koncentrische Hohlkugel, jeden aufserhalb liegenden Punkt so anzieht, als ob ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

25) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen äufseren Massenpunkt.

Die Gravitationskonstante k sei gleich eins, der angezogene Punkt P habe die Masse 1 und sei um $PM = e$ vom Mittelpunkte entfernt, Fig. 16. Jede Einheit der Kugeloberfläche werde mit der Masse 1 belegt. AB sei ein Flächenteilchen von der Fläche und

Masse f. Ist es um ϱ von P entfernt, so übt es auf diesen Massenpunkt die Anziehung $\frac{f}{\varrho^2}$ aus. Da aber aus Symmetriegründen die Resultante aller einzelnen Anziehungen in die Richtung PM fallen mufs, so braucht man statt $\frac{f}{\varrho^2}$ nur die wirksame Komponente $\frac{f}{\varrho^2}\cos\vartheta$ zu untersuchen.

Fig. 16.



Diese soll zur Erleichterung der Summierung in anderer Form geschrieben werden, und zwar mit Hilfe der Polare (Berührungssehne) NQ von P. Für diese ist bekanntlich (Method. Lehrbuch II, Nr. 74) $MQ : MD = MD : MP$ oder $MQ : r = r : e$, d. h. $MQ = \frac{r^2}{e}\cdot$ Daraus folgt, dafs $\triangle MQC \sim \triangle MCP$, denn $MQ : MC = MC : MP$, und Winkel γ ist beiden Dreiecken gemeinsam. Aus der Ähnlichkeit aber folgt $l : r = \varrho : e$, so dafs $\varrho = \frac{le}{r}$ ist. Demnach kann die erwähnte Anziehungskomponente auch als $\frac{fr^2}{e^2 l^2}\cos\vartheta$ geschrieben werden.

Die Summe der Anziehungen sämtlicher Flächenteilchen, d. h. die Resultante, ist demnach $\Sigma\frac{fr^2}{e^2l^2}\cos\vartheta$ oder $\frac{r^2}{e^2}\Sigma\frac{f\cos\vartheta}{l^2}\cdot$ Hier kann $\frac{f\cos\vartheta}{l^2}$ in einfacher Weise gedeutet werden. Aus dem Flächenteilchen f, das als kreisrund angenommen werden darf, und dem Punkte Q läfst sich ein Kegel herstellen, dessen Mittellinie l mit r den Winkel ϑ bildet (Ähnlichkeit der Dreiecke). Jeder Normalschnitt dieses Kegels bildet also mit der Ebene f ebenfalls den Winkel ϑ. Denkt man sich um Q eine Kugel vom Radius 1 gelegt, so schneidet diese den Kegel in einer Fläche, die seinem Normalschnitte $f\cos\vartheta$ ähnlich ist, während ihr Inhalt das $\frac{1}{l^2}$fache, also gleich $\frac{f\cos\vartheta}{l^2}$ ist. Denkt man sich nun sämtliche Kegelgrundflächen f auf diese Einheitskugel projiziert, so ergiebt sich als Summe der Projektionen deren Oberfläche $4\cdot 1^2\pi$, und demnach ist $\frac{r^2}{e^2}\Sigma\frac{f\cos\vartheta}{l^2} = \frac{4r^2\pi}{e^2}\cdot$ Dies ist die gesuchte Resultante.

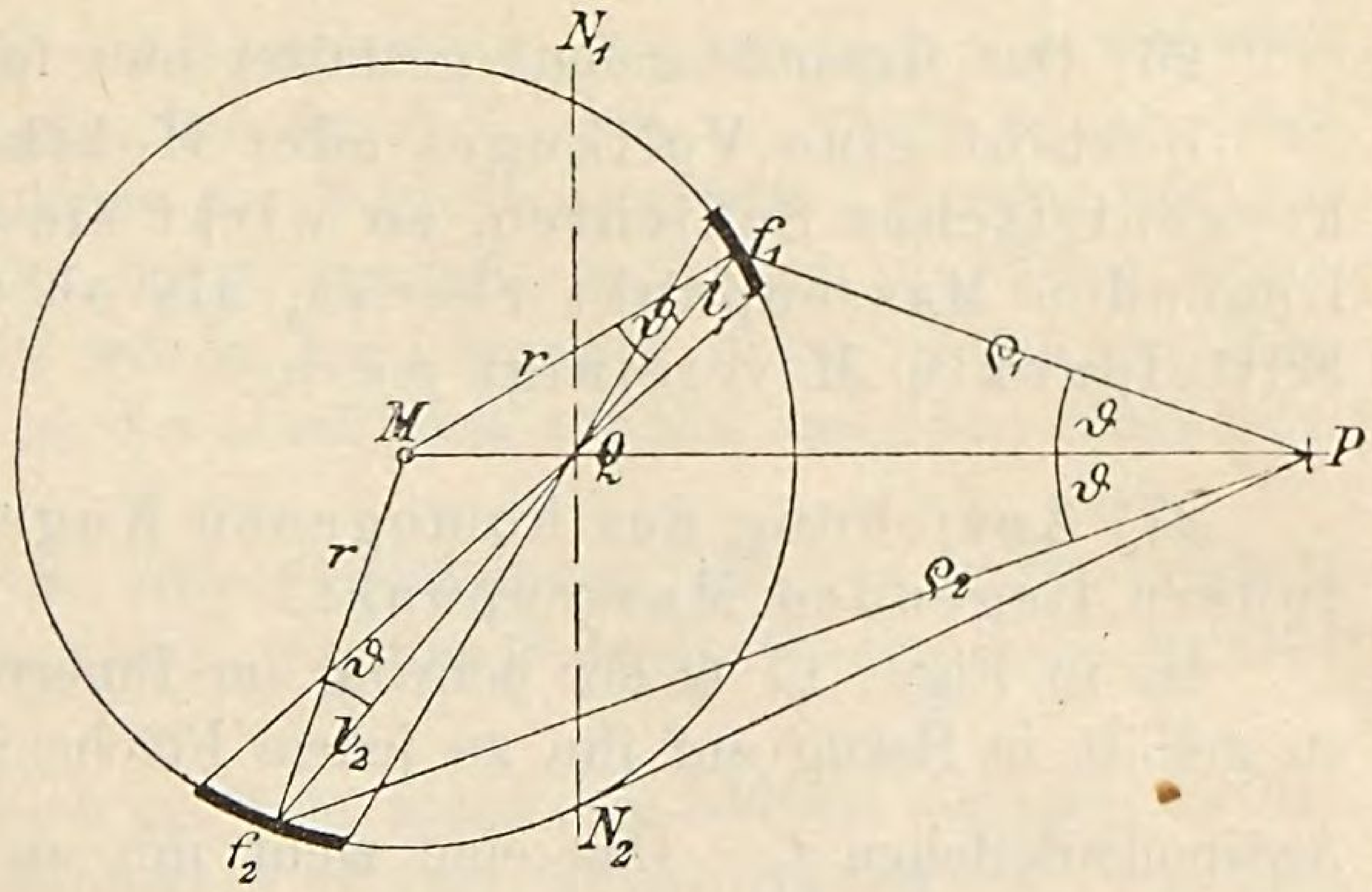
Nun ist aber nach der gemachten Annahme $4r^2\pi$ die Massenbelegung der Kugelschale. Diese wirkt also auf P genau ebenso, als

ob dieselbe Masse $4r^2\pi$ im Punkte M koncentriert wäre. Demnach ergiebt sich der Satz:

Die homogene Kugelschale zieht einen aufserhalb liegenden Punkt so an, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte koncentriert wäre.

Beiläufig sei folgendes bemerkt. Zu jedem Flächenteilchen f_1 der Kugelschale gehört in Bezug auf Q ein Antipodenteilchen f_2, Fig. 17. Sind f_1 und f_2 klein genug angenommen, so darf man beide als ähnlich betrachten, was sich z. B. bei der Kreisform von selbst ergiebt. (Die Mittellinien l_1 und l_2 bilden mit den Ebenen von f_1 und f_2 gleiche Winkel, also handelt es sich um Gegenschnitte des Doppelkegels.) Demnach gilt die Proportion $f_1 : f_2 = l_1^2 : l_2^2$. Da ferner die Mittellinien mit den zugehörigen Radien gleiche Winkel ϑ bilden, so bilden auch die mit ϱ_1 und ϱ_2 zusammenfallenden Anziehungskräfte mit PM gleiche Winkel ϑ. Nach dem Früheren sind aber die Anziehungskomponenten von f_1 und f_2 gleich $\frac{f_1 r^2}{e^2 l_2^2}\cos\vartheta$ bezw. $\frac{f_2 r^2}{e^2 l_2^2}\cos\vartheta$. Beide stimmen überein, weil $\frac{f_1}{l_1^2} = \frac{f_2}{l_2^2}$ ist. Je zwei in Bezug auf Q zusammengehörige Antipodenteilchen f_1 und f_2 wirken somit auf P gleich stark, und die Resultante ihrer Anziehungen fällt in die Richtung PM.

Fig. 17.



Weil dies aber an jeder Stelle stattfindet, so gilt es auch von jedem beliebig gestalteten Stücke der Kugelschale und dem zugehörigen Antipodenteile in Bezug auf den Polarpunkt Q. So zieht z. B. der rechts vom Schnitte $N_1 N_2$ liegende Teil der Kugelschale den Massenpunkt P ebenso stark an wie der links davon liegende Teil; überhaupt gilt das Behauptete von jedem Kalottenpaare, das durch einen durch Q gelegten Schnitt entsteht. Liegt P sehr nahe an der Schale, so ist die von den Tangenten bestimmte Kalotte eine kleine Scheibe, die als eben aufgefafst werden kann, und auf deren Achse der Punkt P liegt. Auch sie zieht an mit der

Kraft $\frac{1}{2} \cdot \frac{4r^2\pi}{e^2}$, also da jetzt $e = r$ gesetzt werden kann, mit der Kraft 2π. Dies gilt von jeder ebenen Scheibe, sobald der angezogene Punkt nahe daran liegt. Da aber die Gröfse von r dabei gleichgültig ist, gilt das Resultat auch von der Ebene, d. h. für $r = \infty$. Nun ist aber jede endliche Entfernung l unendlich klein gegen $r = \infty$, also gilt es von jeder Entfernung l. Die Anziehung der Ebene ist in jeder Entfernung gleich $2\pi\delta$, wenn δ die Dichte der Massenbelegung ist. Später soll dies durch Rechnung bestätigt werden.

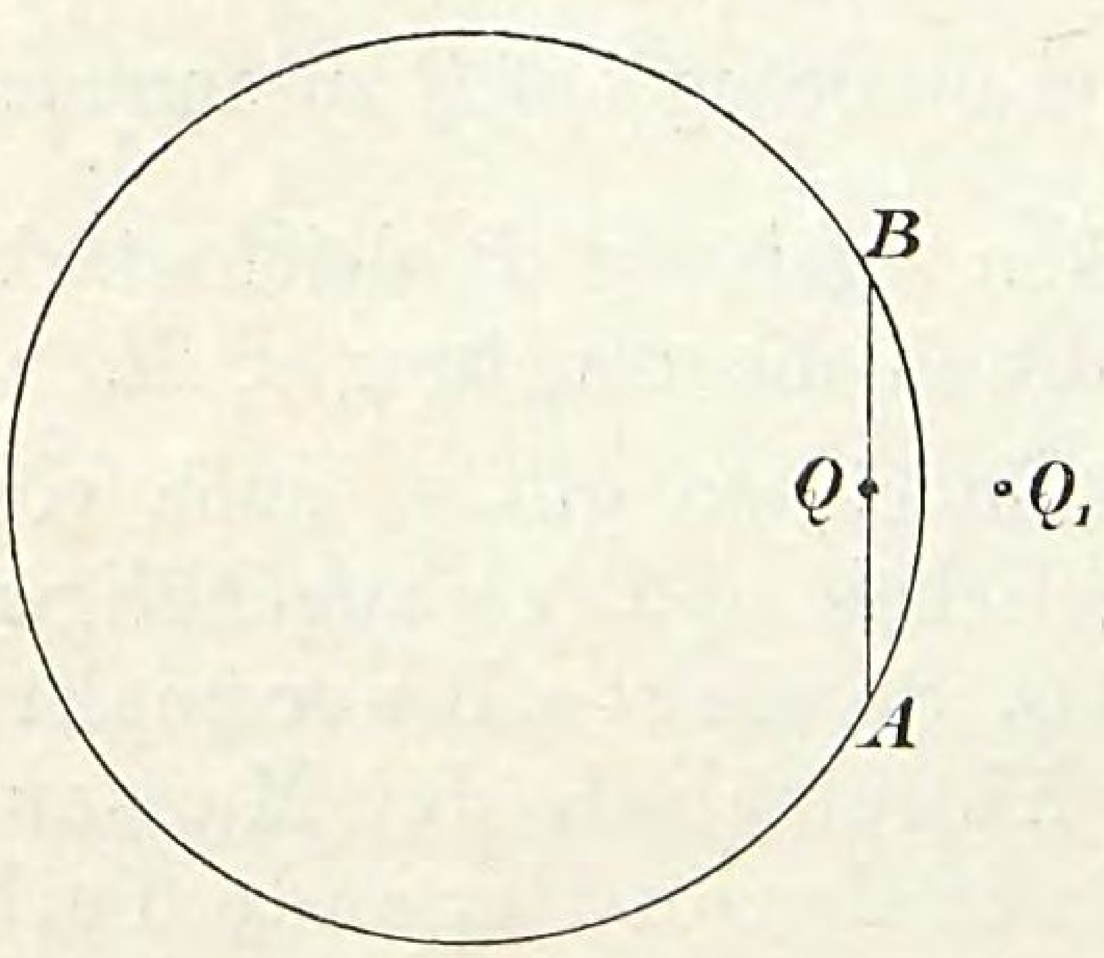
26) Das Gesamtergebnis gestattet nun folgenden Schlufs:

Besteht eine Vollkugel oder Hohlkugel aus homogenen koncentrischen Schichten, so wirkt sie auf einen aufserhalb liegenden Massenpunkt ebenso, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte M vereinigt wäre.

27) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen im Innern liegenden Massenpunkt.

Ist in Figur 17 Q der beliebig im Innern liegende Massenpunkt, so gehört in Bezug auf ihn zu jedem Flächenteilchen f_1 ein ähnliches Antipodenteilchen f_2. Das eine zieht ihn an mit der Kraft $\frac{f_1}{l_1^2}$, das andere mit der Kraft $\frac{f_2}{l_2^2}$. Beide Kräfte sind nach obigem gleich und entgegengesetzt, heben sich also gegenseitig auf. Da dies überall auf der Kugeloberfläche geschieht, so ist ihre Gesamtwirkung auf Q gleich Null. Jede homogene Kugelschale übt also auf jeden im Innern liegenden Massenpunkt die Anziehung Null aus. Das Gleiche gilt von jeder aus homogenen koncentrischen Schichten bestehenden Hohlkugel.

Fig. 18.



Der Massenpunkt Q in Fig. 18 wird durch die beiden vom Schnitte AB begrenzten Kalotten gleich stark angezogen, auch wenn Q unendlich nahe am Rande liegt. Dann zieht die kleine Scheibe $\widehat{AB}$ nach obigem mit der Kraft 2π an, also der Rest der Kugel mit der Kraft -2π.

Man achte also auf folgendes. Rückt Q_1 von aufsen an die Kugelschale, so wird bei unendlicher Annäherung die Anziehung $\frac{4r^2\pi}{e^2}$

zu 4π. Davon kommt die Hälfte auf die unendlich kleine Scheibe AB. Jetzt rücke Q_1 ins Innere. Dort ist die Anziehung gleich Null, so dafs eine plötzliche Änderung um 4π stattfindet. Diese klärt sich dadurch auf, dafs die kleine Scheibe AB bei der Aufsenlage von Q den Betrag 2π der Anziehung gab, bei der Innenlage den gleichen Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung, so dafs der Unterschied gleich

$$2\pi - (-2\pi) = 4\pi$$

werden mufs.

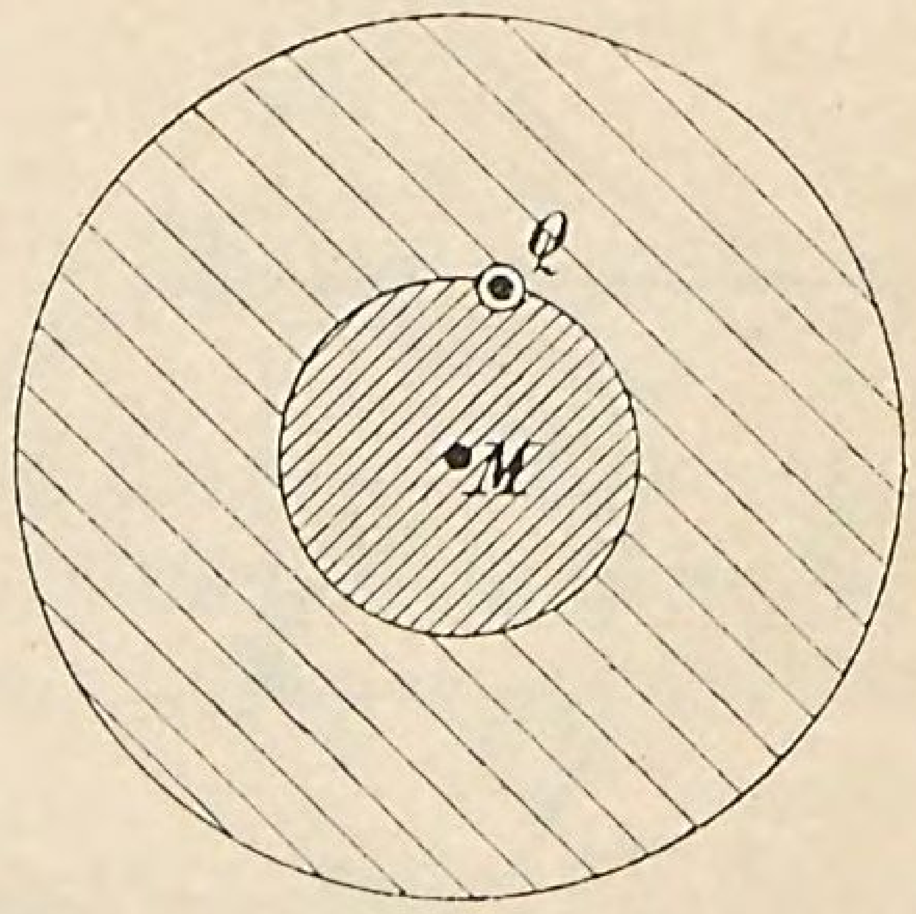
Denkt man sich in der Kugelschale eine endliche, wenn auch kleine Öffnung, so dafs die Scheibe AB fehlt, so würde in der Lage des Passierens der Peripherie die Anziehung gleich 2π sein, und unmittelbar rechts und links davon ebenfalls, weil eben die kleine Kreisscheibe fehlt. Dann also würde der Übergang ohne Sprung erfolgen. Die Anziehung würde von 4π allmählich auf 2π und dann allmählich auf 0 gehen.

(Beim Passieren von anders gestalteten Flächen tritt ebenfalls ein Sprung um 4π ein, was für die Potentialtheorie von grofser Wichtigkeit ist.)

Ist die Kugel unendlich grofs, so giebt jede Kalotte der nahe an der Fläche liegenden Masseneinheit wiederum die Anziehung 2π. Die eine ist aber eine Ebene, so dafs sich das obige Resultat bestätigt. Die andere kann als eine in unendlicher Entfernung befindliche Ebene aufgefafst werden, sie giebt ebenfalls 2π, was, wie sich zeigen wird, mit dem konstanten Charakter der Anziehung einer homogenen Ebene harmoniert. Dieselbe Bemerkung läfst sich für die Aufsenlage von Q machen.

28) Folgerung für das Innere der homogenen koncentrischen Kugel. In einem kleinen Hohlraume bei Q, Fig. 19, befinde sich ein Massenpunkt. Man denke sich durch diesen eine koncentrische Kugelfläche gelegt. Die äufsere Hohlkugel übt auf den Massenpunkt die Wirkung Null aus, folglich zieht nur noch der innere Kern an. An der Oberfläche der ganzen Kugel ist die Anziehung proportional ihrer Masse $\frac{4}{3}r^3\pi$ und umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius, also ist sie in Wirklichkeit proportional dem

Fig. 19.

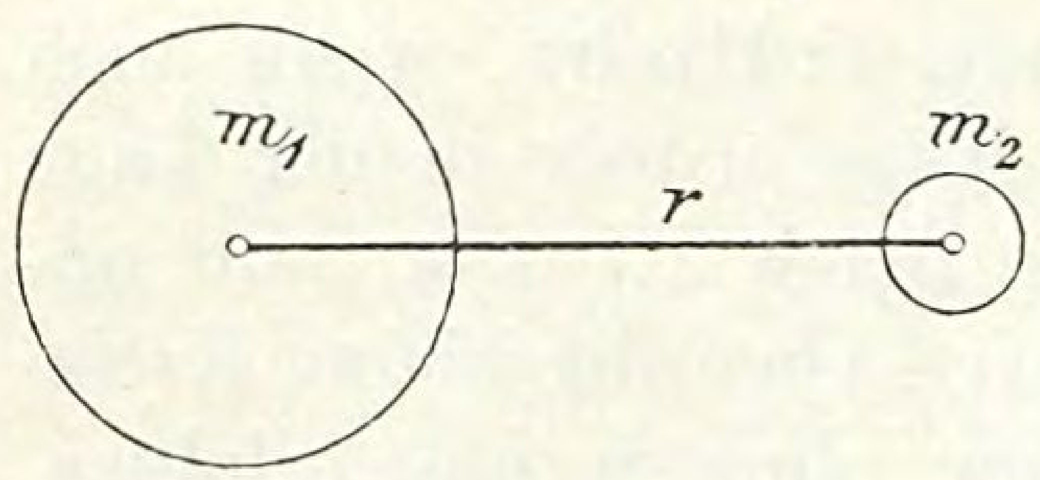


Ausdrucke $\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{r^2} = \frac{4}{3}r\pi$, oder, da $\frac{4}{3}\pi$ konstant ist, proportional dem Radius r. Für den innern Kern handelt es sich ebenso um r_1.

Folglich: Die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen im Innern befindlichen Punkt ist proportional seinem Abstande vom Mittelpunkte. In diesem selbst ist die Anziehung gleich Null.

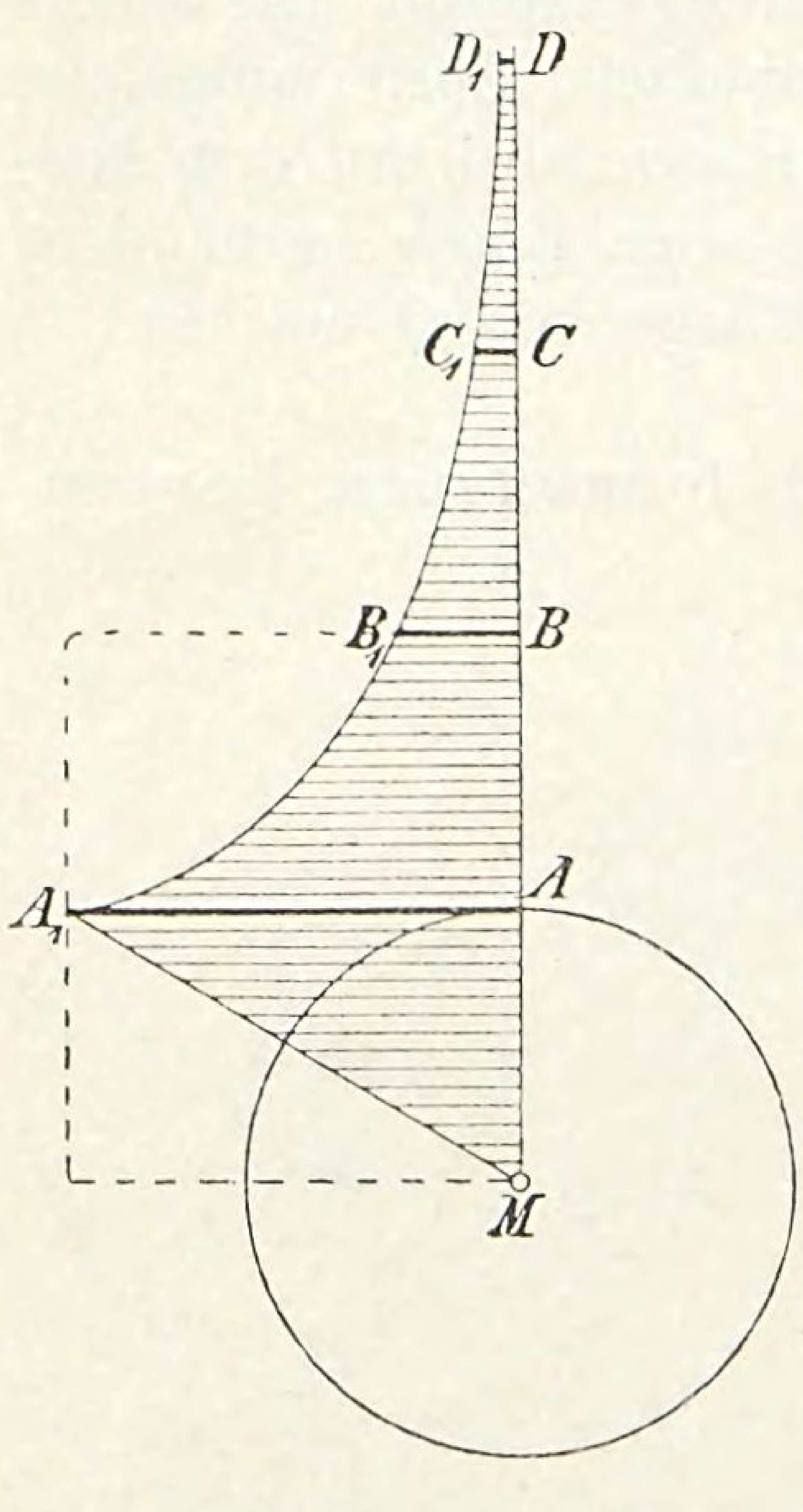
29) Gegenseitige Anziehung zweier Kugeln. Ziehen sich zwei Kugeln gegenseitig an und sind ihre Massen m_1 und m_2, Fig. 20, so hat man sich diese in ihren Mittelpunkten koncentriert zu denken. Die Gröſse der Anziehung ist, wenn r den Abstand der beiden Mittelpunkte bedeutet, proportional dem Ausdrucke $\frac{m_1 m_2}{r^2}$, der ganz dem bei den Massenpunkten entwickelten entspricht. Die erste Kugel wird von der zweiten genau ebenso stark angezogen, wie die zweite von der ersten; es verlangt genau ebensoviel Arbeit, die kleinere von der gröſseren zu entfernen, wie umgekehrt die gröſsere von der fest gedachten kleineren. Was von gegenseitigen Anziehungen gilt, gilt ebenso von gegenseitigen Abstoſsungen. (Man denke an ungleichartige und gleichartige Elektrizitäten.)

Fig. 20.



Mit Hilfe der ermittelten Ergebnisse läſst sich schon eine groſse Menge von Problemen der sogenannten Potentialtheorie und der kosmischen Physik lösen.

Fig. 21.



30) **Aufgabe.** Bis zum Mittelpunkte des homogen und feststehend gedachten Erdkörpers reiche ein Schacht. In diesem soll ein Körper von der Masse m vom Mittelpunkte aus bis zur Oberfläche gehoben werden. Die Hebung soll dann bis ins Unendliche fortgesetzt werden. Die dazu nötige Arbeit soll graphisch dargestellt und berechnet werden.

Auflösung. Der Körper hat an der Erdoberfläche das Gewicht $p = mg$, und diese Kraft werde dargestellt durch eine beliebig lange Gerade AA_1. Nach dem Mittelpunkte hin nimmt diese Anziehungskraft regelmäſsig bis zum Werte Null ab. Das Arbeitsdiagramm für die Hebung von M bis A ist demnach das schraffierte Dreieck MAA_1, Fig. 21.

Wird nun die Hebung nach aufsen fortgesetzt, so handelt es sich um das von der Gravitationskurve $y = \frac{p r^2}{x^2}$ begrenzte Diagramm. Ganz dasselbe Diagramm würde entstehen, wenn man sich den kleinen Körper in M feststehend denkt und die Erde von ihm bis ins Unendliche entfernt. Für jeden der beiden Fälle stellt das Diagramm die Hebungsarbeit dar.

Diese Hebungsarbeit soll jetzt berechnet werden. Wiegt der Körper an der Erdoberfläche p Tonnen, so ist für das Diagrammdreieck MAA_1 die mittlere Anziehung nur halb so grofs, also wird die Arbeit, wenn der Erdradius zu 860 Meilen oder $860 \cdot 7500$ m angenommen wird, gleich $\frac{p}{2} \cdot 860 \cdot 7500$ oder $p \cdot 3\,225\,000$ Metertonnen. Die Hebung von r_1 bis r_2 erfordert nach Nr. 17, da an Stelle der Anziehung $\frac{m}{r_1^2}$ die Anziehung $\frac{pr^2}{r_1^2}$, also pr^2 an Stelle von m tritt, die Arbeit:

$$\overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = pr^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

wobei $p = AA_1$ zu setzen ist.

Am einfachsten wird die Formel für $r_2 = \infty$, denn dann wird

$$\overset{\infty}{\underset{r_1}{F}} = \frac{pr^2}{r_1}.$$

So ist z. B.

$$\overset{\infty}{\underset{r}{F}} = \frac{pr^2}{r} = pr = p \cdot 860 \cdot 7500 = p \cdot 6\,450\,000 \text{ mt}$$

die Arbeit in Metertonnen, die nötig ist, um den Körper von A bis in unendliche Höhe zu heben. Die Hebungsarbeit von B bis ins Unendliche beträgt

$$\overset{\infty}{\underset{2r}{F}} = \frac{pr^2}{2r} = \frac{pr}{2} = \frac{p}{2}\ 860 \cdot 7500 = p \cdot 3\,225\,000 \text{ mt},$$

die von C bis ∞ beträgt

$$\overset{\infty}{\underset{3r}{F}} = \frac{pr^2}{3r} = \frac{pr}{3} = \frac{p}{3}\ 860 \cdot 7500 = p \cdot 2\,150\,000 \text{ mt}.$$

Die Hebung von A bis B erfordert $p\,(6\,450\,000 - 3\,225\,000) = p \cdot 3\,225\,000$ mt, die von A bis C erfordert $p\,(6\,450\,000 - 2\,150\,000) = p \cdot 4\,300\,000$ mt, die von M bis ins Unendliche erfordert $p(3\,225\,000 + 6\,450\,000) = p \cdot 9\,675\,000$ mt.

Man achte für die Stellen $A, B, C \ldots$ auf das Verhältnis $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \cdots$

31) **Aufgabe.** Mit welcher Geschwindigkeit müfste (abgesehen vom Luftwiderstande) ein Geschofs in senkrechter

Richtung abgeschossen werden, um von A aus bis B oder C oder bis zu unendlicher Höhe zu fliegen?

Auflösung. Man setze die Energie

$$\frac{mv^2}{2} = \overset{B}{\underset{A}{F}} = mg\,3\,225\,000,$$

dann folgt als Abschufsgeschwindigkeit für die Strecke AB

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3\,225\,000} = 7954{,}6 \text{ m}.$$

Für die Strecke AC handelt es sich um

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4\,300\,000} = 9185{,}2 \text{ m},$$

für die Strecke $A\infty$ um

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6\,450\,000} = 11\,250 \text{ m}.$$

Es ist also eine verhältnismäfsig nur geringe Geschwindigkeit, die den Körper ins Unendliche hinausschleudert.

Umgekehrt würde die Geschwindigkeit 11 250 m die gröfste sein, die durch die Anziehung der Erde allein einem auf ihre Oberfläche fallenden Meteorsteine verliehen werden könnte. Wiegt er an der Erdoberfläche 1 kg, so giebt ihm jene Geschwindigkeit eine Energie von $\frac{1}{9{,}81} \cdot 11\,250^2 = \sim 6\,450\,000$ mkg. Angenommen, diese setze sich in Wärme um, so handelt es sich um $\frac{6\,450\,000}{425} = 15\,177$ W.-E. Selbstverständlich wird nur ein Teil der Arbeit sich in Wärme umsetzen und den Stein und seine Umgebung erhitzen.

Soll eine noch gröfsere Geschwindigkeit erreicht werden, so müfste der Körper mittels eines Schachtes ins Innere der Erde fallen. Dies giebt 13 778 m als denkbar gröfsten Wert.

Ebenso leicht ist es, die Endgeschwindigkeit zu berechnen, wenn der Stein aus endlicher Höhe herabfällt. Ist A das entsprechende Arbeitsdiagramm, so folgt als Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2A}{m}}$. Dies ist zugleich die Formel für die entsprechende Abschufsgeschwindigkeit.

Dafs man mit noch geringerer als der oben berechneten Abschufsgeschwindigkeit einen Körper horizontal so fortschleudern kann, dafs er nicht zur Erde zurückkehrt, wird sich sofort ergeben.

32) Der Fall eines Körpers in den Schacht der homogenen Erde. Fällt der Körper von A bis K, Fig. 22, so ist die Anziehungsarbeit, wie sich aus dem trapezförmigen Diagramm ergiebt:

$$(r - x)\frac{p + p\frac{x}{r}}{2} = \frac{p}{2} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r} = \frac{p}{2} \cdot \frac{a^2}{r} = \frac{mg}{2}\frac{a^2}{r},$$

die zugehörige Endgeschwindigkeit $\left(\text{nach } \frac{mv^2}{2} = \frac{mg}{2}\frac{a^2}{r}\right)$

$$v = \sqrt{\frac{ga^2}{r}} = a\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Projiziert man diese Geschwindigkeit auf den Kreisumfang bei L, so hat man dort die Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{v}{\sin\gamma} = v\frac{r}{a}, \quad \text{oder} \quad v_1 = \frac{r}{a}a\sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{g\cdot r},$$

d. h. eine konstante, von x unabhängige Randgeschwindigkeit. Fragt man sich aber, mit welcher Geschwindigkeit eine Kugel bei A wagerecht abgeschossen werden müfste, damit das Bestreben, sich von

Fig. 22.

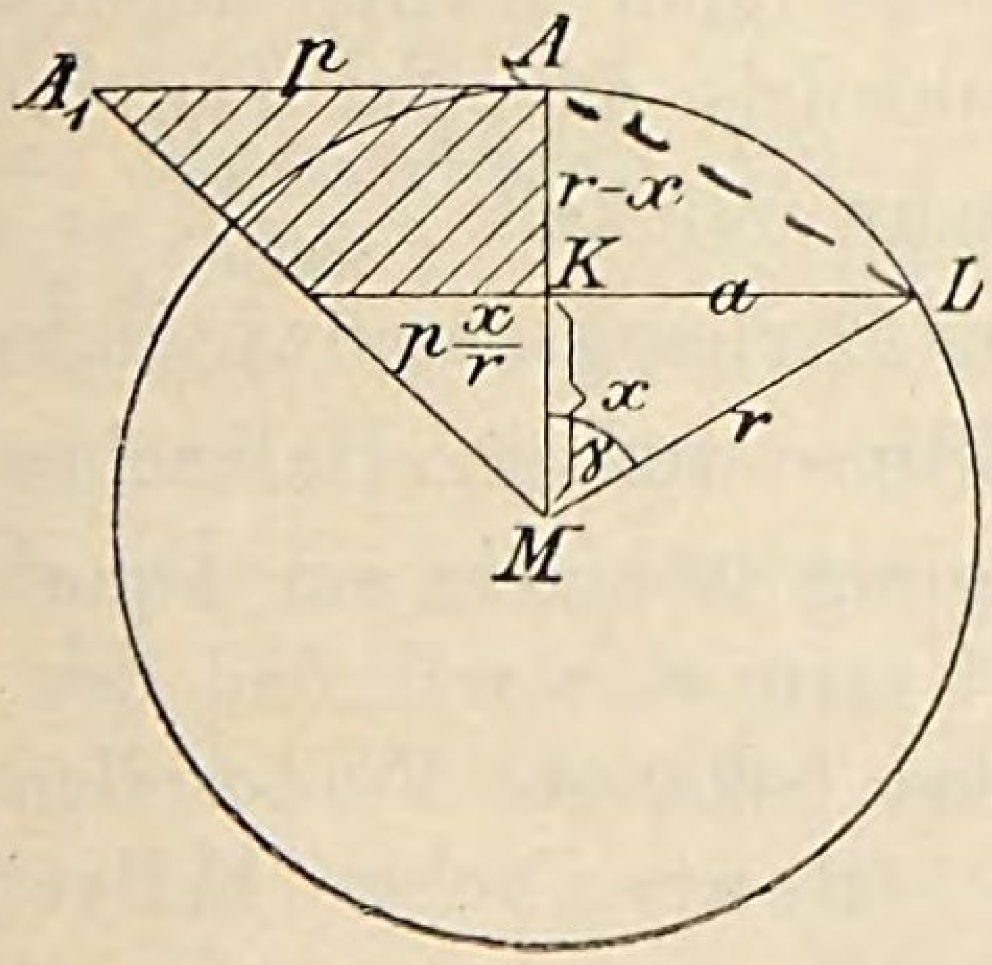
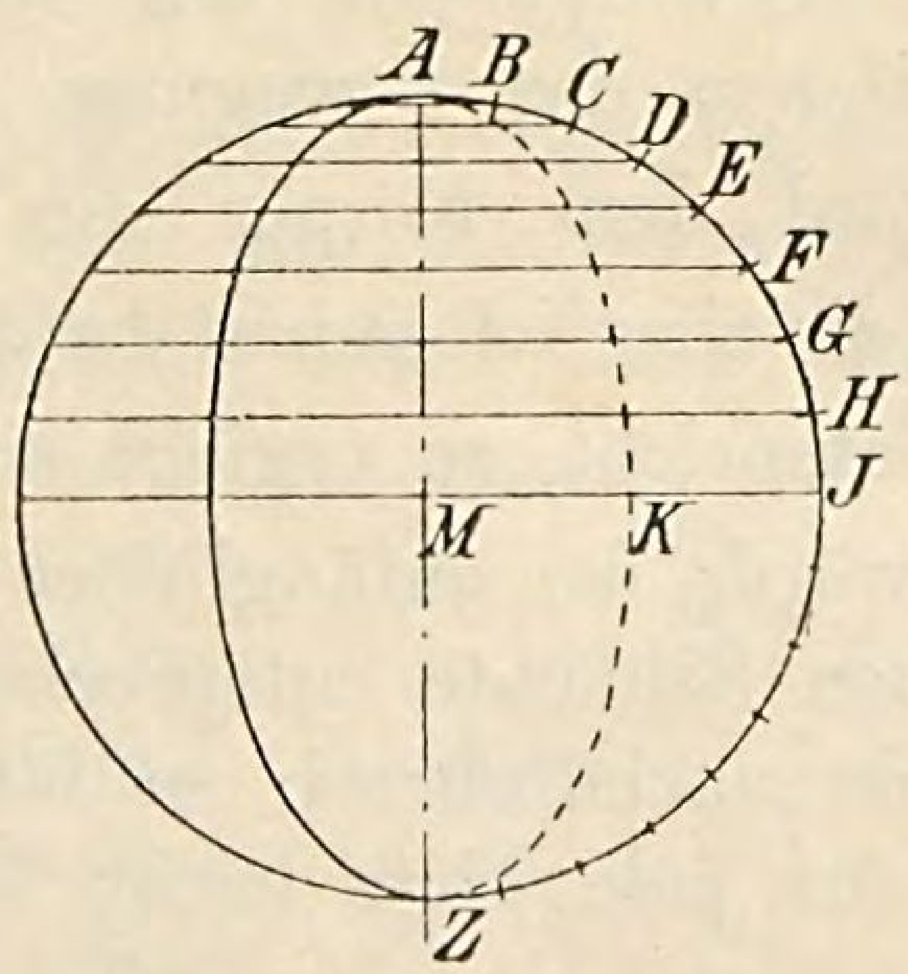


Fig. 23.



der Erde zu entfernen, in jedem Augenblicke durch die Fallbewegung gerade aufgehoben würde (so dafs gewissermafsen die Kugel einen die Erde umkreisenden Mond geben würde), so findet man durch Gleichsetzung der Centrifugal- und der Anziehungskraft $\frac{mv^2}{r} = mg$, oder $v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81 \cdot 860 \cdot 7500} = 7954{,}6$ m, was mit dem soeben Gefundenen übereinstimmt. Folglich ist die unter den gemachten Voraussetzungen vor sich gehende Fallbewegung die Projektion einer regelmäfsigen Kreisbewegung, die auf dem gröfsten Kugelkreise mit der berechneten Geschwindigkeit stattfindet, Fig. 23. Der Mittelpunkt M wird also mit dieser Geschwindigkeit erreicht, und die Falldauer ist gleich der der entsprechenden Quadrantenbewegung, nämlich

$$t = \frac{r\pi}{2v} = \frac{r\pi}{2\sqrt{gr}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{860\cdot 7500}{9{,}81}} = 1266 \text{ Sek.}$$

Geht der Schacht durch die Erde hindurch, so beginnt bei M das verlangsamte Aufsteigen nach Z hin, das dieselbe Zeit beansprucht. Es handelt sich also um die bekannte Sinus-versus-Bewegung, eine besondere Art von Pendelbewegung, die sich, Luftleere vorausgesetzt,

bis ins Unendliche wiederholt. (Vgl. Bewegung des Kolbens im Dampfcylinder.)

Giebt man dem Körper beim Beginne des Falles eine Seitengeschwindigkeit von $\frac{7955}{2}$ m, so würde er sich, wenn ein entsprechend gekrümmter Schacht vorhanden wäre, in einer Ellipse bewegen, die jede der parallelen Halbsehnen halbiert. Statt 2 kann man auch n setzen. Dann wird $\frac{1}{n}$ von jeder Halbsehne abgeschnitten. Dies ist ein in der Mechanik häufig behandeltes Problem, bei dem die Ellipsenbewegung wiederum nur Projektion der Kreisbewegung ist. Es handelt sich dabei um die Centralbewegung, bei der die Anziehung umgekehrt proportional der Entfernung ist. Sie läfst sich aus der Bewegung des Kreispendels elementar ableiten. Kleine Schwingungen des ebenen Pendels sind nichts anderes, als Projektionen der Bewegung des Kreispendels auf den Durchmesser.

Wird dem Körper die Seitengeschwindigkeit $\frac{40\,000\,000}{86\,400} = 463$ m erteilt, die ziemlich genau der äquatorialen Drehungsgeschwindigkeit der Erde entspricht, so ergiebt sich eine Ellipse von der Halbachse $\frac{463}{7955} r$. Diese würde der anfänglichen Fallbewegung in einem am Äquator befindlichen Schachte entsprechen. Denkt man sich während des Falles die Erde nachdrehend, so läfst sich das bekannte Vorauseilen nach Osten für jede Tiefe leicht berechnen. (Benzenbergs Fallversuch.)

33) Einige andere Schachtprobleme. Ein Pendel von der Schwingungsdauer $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$ würde, da g proportional der Entfernung vom Erdmittelpunkte ist, im Abstande r_1 die gröfsere Schwingungsdauer $t_1 = \sqrt{\frac{lr}{r_1}}$ erhalten. Da aber in Wirklichkeit die Schwingungsdauer bei den Versuchen abnimmt, so mufs angenommen werden, dafs anfangs die Anziehung zunimmt, weil der Kern der Erde ein weit höheres spezifisches Gewicht hat als die Aufsenschale. In der That ist die mittlere Dichte der Erde als etwa 5,6 nachgewiesen worden, während die der Oberfläche zukommende als 2 angenommen werden kann.

Angenommen der Schacht wäre mit Wasser, das als nicht zusammendrückbar betrachtet werden soll, angefüllt; wie grofs würde dann der Druck in der Nähe des Erdmittelpunktes sein? Mafsgebend ist die mittlere Stärke der Anziehung. Es handelt sich also um $\frac{860 \cdot 7500}{2} = 3\,225\,000$ Tonnen pro Quadratmeter Druckfläche, oder um 312 000 Atm., also um das Hundertfache der Spannung in einer auf 3120 Atm. beanspruchten Kruppschen Kanone. Luft würde infolge

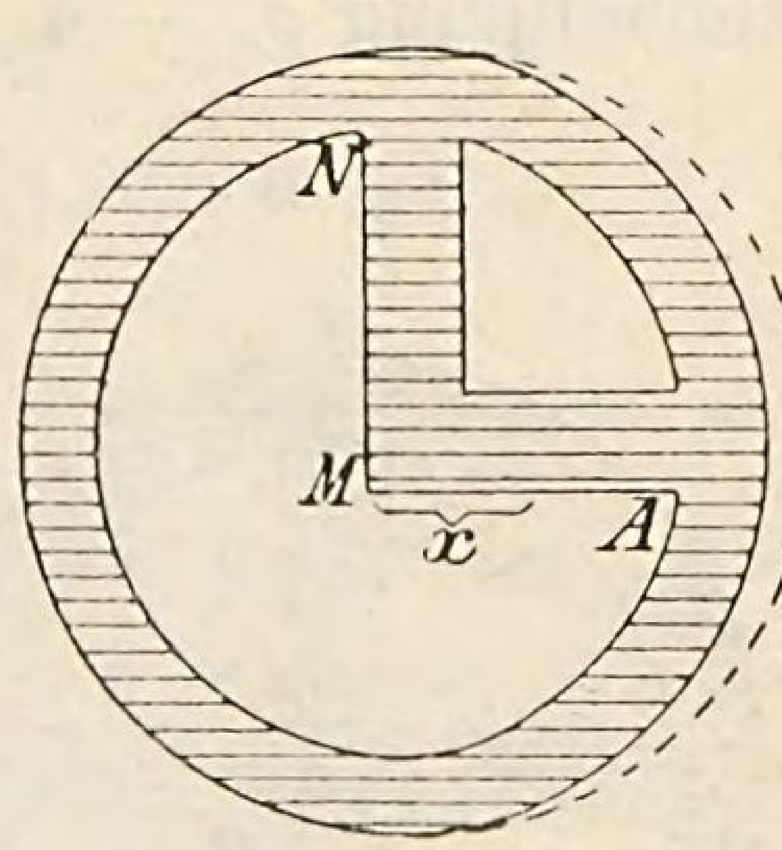
dieser Kompression, wenn das Mariottesche Gesetz bis dahin gelten würde, 417 mal so schwer sein wie Wasser, so daſs es unmöglich sein würde, sie etwa in der Taucherglocke festzuhalten. In dem Augenblicke, wo sie schwerer wird als Wasser, würde sie, kleiner und kleiner werdend, dem Mittelpunkte der Erde zustreben.

Schwieriger ist es, für eine Luftsäule im Schachte die im Mittelpunkte herrschende Spannung zu berechnen. Sie fällt infolge der Zusammendrückbarkeit der Luft weit gröſser aus als die oben berechnete. In dieser Hinsicht sei auf die Abhandlungen von Prof. Ritter über die Beschaffenheit gasförmiger Weltkörper verwiesen. Man versuche die Schachtprobleme auch für den Fall zu lösen, daſs die Dichtigkeit der Erde an der Oberfläche gleich 2 sei und nach dem Mittelpunkte hin regelmäſsig zunehme. (Vgl. Method. Lehrbuch III, Seite 129.)

34) Abplattung der Erde.

Der hypothetische Schacht findet noch anderweitige Verwertung. Er ermöglicht z. B. Untersuchungen über die Abplattung der Erde. Nach den Grundsätzen der Hydrodynamik kann man die in Fig. 24 skizzierte Schachtverbindung vom Nordpol zum Äquator hin annehmen, ohne das Problem wesentlich zu ändern. Im Polarschachte herrscht keine Centrifugalkraft, wohl aber im Aquatorialschachte. Ist das Gewicht einer Masse am Nordpol gleich mg, so ist es am Aquator, da der Einfluſs der Centrifugalkraft abzuziehen ist, $mg - \frac{mv^2}{r}\cdot$ Setzt man die bekannten Gröſsen für v und r ein, so erkennt man, daſs

Fig. 24.

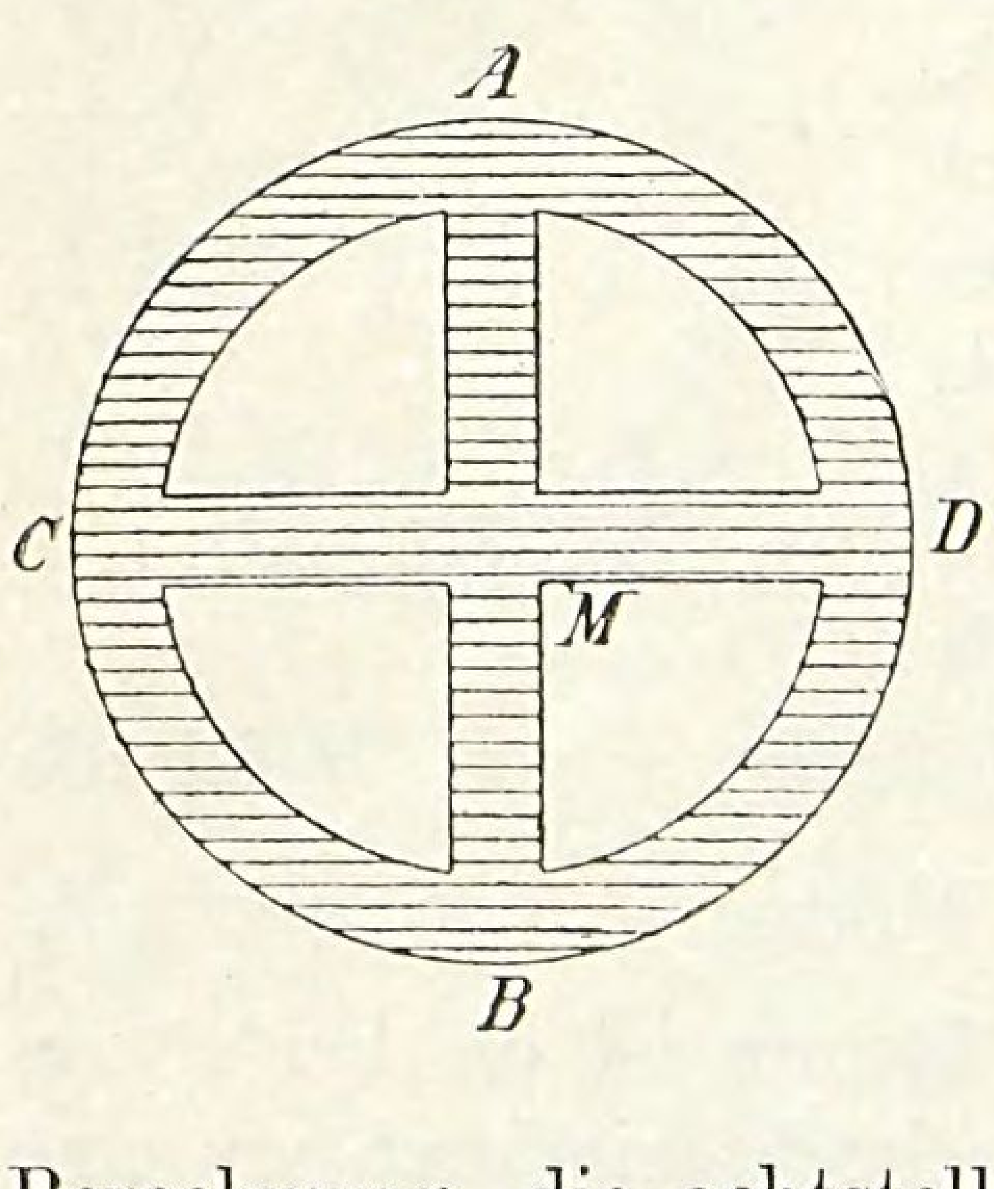


das Gewicht um etwa $\frac{1}{290}$ abnimmt. Im Abstande x von M ist die Centrifugalkraft kleiner, entsprechend dem Faktor $\frac{x}{r}$; da aber die Schwerkraft dort in demselben Verhältnisse kleiner ist als bei A, so handelt es sich durch den ganzen Äquatorialschacht hindurch um eine Gewichtsverminderung von $\frac{1}{290}\cdot$ Hieraus schlieſsen nun zahlreiche Lehrbücher darauf, daſs die äquatoriale Wassersäule, um der polaren das Gleichgewicht zu halten, um $\frac{1}{290}$ höher sein müſste. Dies ist aber falsch, da übersehen wird, daſs das mittlere Gewicht maſsgebend sein muſs. Nach dem Früheren handelt es sich um 6 450 000 cbm Wasser (im Schachte von 1 qm Querschnitt); der Druck ist aber nur 3 225 000 t, die Druckverminderung beträgt also nicht $\frac{6\,450\,000}{290}$ t, sondern nur $\frac{3\,225\,000}{290}$ t. Die ausgleichende Wassersäule hat somit nicht die Höhe $\frac{r}{290}$, sondern

nur $\frac{r}{580}$, es handelt sich nicht um 22 242 m, sondern nur um 11 121 m. Man findet demnach auf diesem Wege nur etwa die Hälfte der wirklichen Abplattung. Das Problem ist eben ein ganz anderes als das Problem der Abplattung des flüssig zu denkenden Erdkörpers vom spezifischen Gewichte 5,56. Der sich bildende Äquatorialwulst läſst anziehende Kräfte in Erscheinung treten, die, wie die Potentialtheorie zeigt, für den Rest der Abplattung sorgen.

35) Statische Theorie der Ebbe und Flut und das Störungsgesetz. In ähnlicher Weise kann die Theorie der Ebbe und Flut in Angriff genommen werden. Es handelt sich jetzt um zwei Äquatorialschachte, Fig. 25. Senkrecht über A befinde sich der Mond. Man denke sich ihn und die Erde still gestellt und dann nach Nr. 2 beide einander entgegenfallend. Der Erdmittelpunkt M beginnt seine Bewegung mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{0,00276}{81} = 0,00003407$ m. Nun haben aber die Punkte A, M und B Entfernungen vom Monde, die sich verhalten wie 59 : 60 : 61; demnach erhält A die Beschleunigung $g_a = g_1 \cdot \frac{60^2}{59^2}$, B dagegen $g_b = g_1 \cdot \frac{60^2}{61^2}$, d. h. A eilt voraus mit der Beschleunigung $g_a - g_1$, B bleibt zurück mit der Beschleunigung $g_1 - g_b$.

Fig. 25.



Es entsteht sonach sowohl bei A wie bei B eine Verminderung des Wassergewichtes. Angenommen, man dürfte diese gleichmäſsig für die ganze Wassersäule von 3 225 000 t Gewicht annehmen, was nicht der Fall ist, so würde auf jeder Seite eine Erhöhung um etwa 0,3 m Gleichgewicht schaffen, d. h. bei A und B müſste zur Flutzeit das Wasser um 0,3 m höher stehen als bei C und D.

Es kam hier nur darauf an, die Entstehung der Flut bei B, die schwieriger zu begreifen ist, klarzustellen, weniger auf die Berechnung, die achtstellige Logarithmentafeln erfordern würde. Sodann wäre der ungefähr halb so groſse Einfluſs der Sonnenflut für Voll- und Neumond hinzuzufügen, für die Quadraturen abzuziehen, ferner hätte an die Stelle der statischen Berechnung eine dynamische zu treten, auf die jetzt nicht eingegangen werden soll (Schwingungsbewegung).

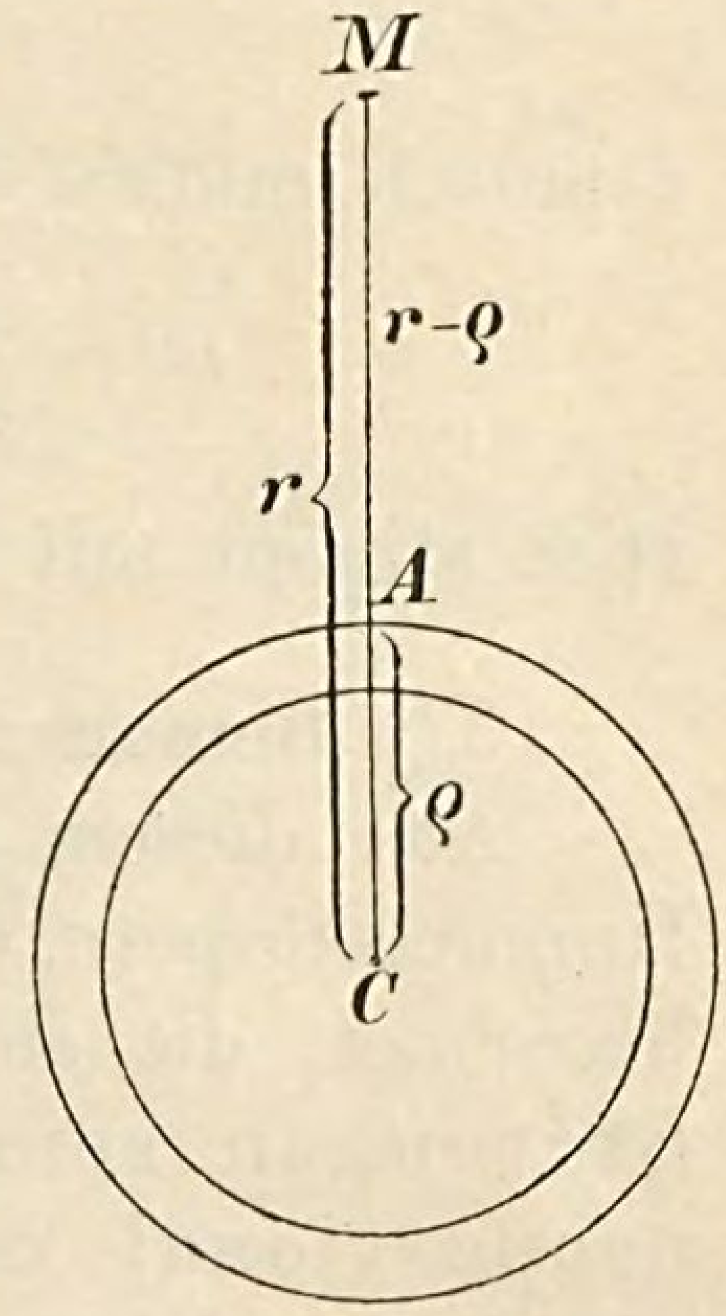
Dasselbe Ergebnis erhält man auch auf dem Wege, daſs man den Erdball um den Schwerpunkt des Erd-Mondsystems in der im Anfange angegebenen Umlaufzeit von etwas mehr als 27 Tagen sich drehen läſst und die Centrifugalkräfte für A, M und B berechnet, was auf entsprechende Unterschiede führt. (Vgl. Nr. 3.)

Wichtiger aber ist folgende Inangriffnahme des Problems.

Die Anziehung des Mondes auf die Masseneinheit bei A ist gleich

$$\frac{km}{MA^2} = \frac{km}{(r-\varrho)^2},$$

Fig. 26.



auf die Masseneinheit bei C dagegen

$$\frac{km}{r^2},$$

die Differenz der Anziehungen also ist

$$km\left[\frac{1}{(r-\varrho)^2} - \frac{1}{r^2}\right].$$

Nun ist, wenn man die Division $\frac{1}{(r-\varrho)^2}$ durchführt, der Quotient gleich $\frac{1}{r^2} + \frac{2\varrho}{r^3} + \frac{3\varrho^2}{r^4} + \cdots$, also jene Differenz gleich

$$km\left[\frac{1}{r^2} + \frac{2\varrho}{r^3} + \frac{3\varrho^2}{r^4} + \cdots - \frac{1}{r^2}\right] = km\left[\frac{2\varrho}{r^3} + \frac{3\varrho^2}{r^4} + \frac{4\varrho^3}{r^5} + \cdots\right]$$

$$= \frac{2\varrho km}{r^3}\left[1 + \frac{3\varrho}{2r} + \frac{4\varrho^2}{2r^2} + \cdots\right].$$

In der Klammer ist $\frac{3\varrho}{2r} = \frac{3 \cdot 860}{2 \cdot 50000} = 0{,}0025$, man macht also nur einen Fehler von $\frac{1}{4}$ Procent, wenn man das Glied weg läſst. Die übrigen fallen, da die Reihe stark konvergiert, so schwach ins Gewicht, daſs man sie erst recht vernachlässigen kann. Berücksichtigt man also nur das erste Glied, so ist die Differenz umgekehrt proportional der dritten Potenz der Mondentfernung r. Handelt es sich um Sonne und Erde, so würde $\frac{3\varrho}{2r} = \frac{3 \cdot 860}{2 \cdot 20000000}$ sein, so daſs der Fehler der Vernachlässigung dieses Gliedes sogar nur 0,0000645 betragen würde. Jedenfalls darf man sagen, der Einfluſs eines Weltkörpers auf die Ebbe und Flut eines anderen sei angenähert proportional der Gröſse $\frac{\varrho m}{r^3}$, wo ϱ der Radius des letzteren Körpers ist, während m die Masse und r den Radius des ersten bedeutet.

36) Berechnung der Mondmasse aus der Fluterscheinung.

Nun haben sowohl Mond, als auch Sonne einen Anteil an der Ebbe und Flut. Angenommen, man beobachtet durchschnittlich zur Zeit des Neu- und Vollmondes die Flut 1,45 im Gegensatz zur

Normalflut 1, zur Zeit der Quadraturen etwa 0,55, so dafs der Einflufs der Sonne einmal mit 0,45 hinzuaddiert, einmal mit etwa ebenso viel abgezogen erscheint, so würde folgende Proportion gelten:

$$\frac{m}{r^3} : \frac{m_1}{r_1^3} = 1 : 0{,}45\,,$$

demnach müfste die Mondmasse sein

$$m = \frac{r^3 m_1}{r_1^3 0{,}45} = \frac{1^3}{400^3} \cdot \frac{355\,000}{0{,}45} = \sim \frac{1}{81} \text{ der Erdmasse.}$$

Dies stimmt mit den Angaben der Astronomen überein.

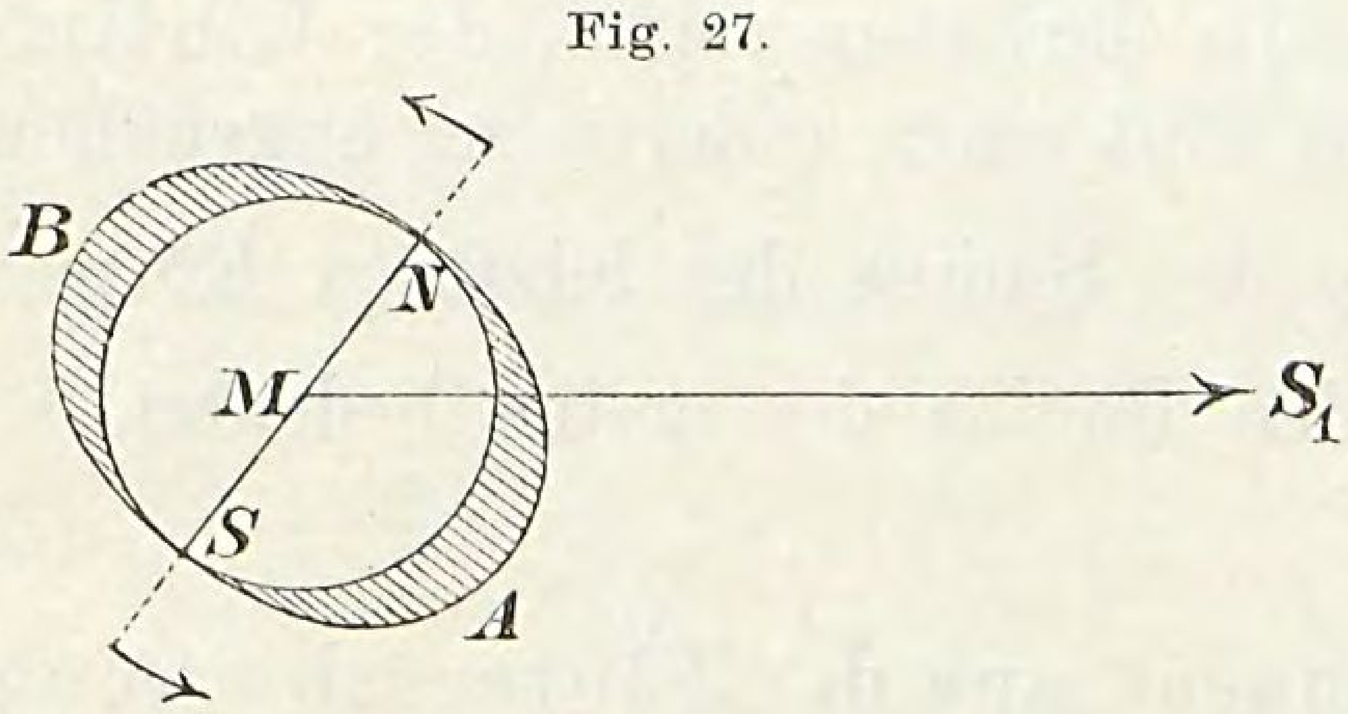
37) **Bemerkungen.**

Aus diesem Beispiele erkennt man, wie man die Massen von Himmelskörpern, die selbst keine Trabanten haben, aus den „Störungen“ berechnet, die sie verursachen. Dabei wird stets angenommen, die Störungen seien proportional den Massen und umgekehrt proportional den dritten Potenzen der Entfernungen der störenden Körper. (Ähnliches zeigt sich bei den Influenzproblemen der Elektrostatik.)

Zugleich wird man daraus schliefsen, dafs die Mondflut auf der Rückseite der Erde etwas schwächer ist, als auf der vorher betrachteten Seite, ganz schwach aber in der Nähe der Pole. Die gewaltigsten Fluten hat man zu erwarten, wenn zusammenfallen Erdnähe der Sonne und des Mondes und Voll- oder Neumond, besonders, wenn die Windrichtung die Erscheinung begünstigt. (Wichtig ist auch der Durchgang des Mondes durch den Äquator.)

Manche Meteorologen haben dies auf die atmosphärische Ebbe und Flut übertragen und daraus bezüglich des Wetters auf kritische Tage erster Ordnung und ihre Vorhersagung geschlossen, was von den bekannten Mifserfolgen begleitet war. Weit wichtiger ist, dafs wir aus den Zeichnungen der selbstregistrierenden Flutmesser den Anteil der Sonne und des Mondes an der Gesamterscheinung schliefslich derart genau zu scheiden imstande sind, dafs man die Mondmasse mit gröfster Genauigkeit angeben kann.

Fig. 27.



Ob diese Kenntnis so besonders wichtig ist, wird die folgende Betrachtung zeigen.

38) Präcession der Äquinoktien. Die Figur stelle die Erde als abgeplatteten Körper in der Sommerstellung dar. Bei S_1 befinde sich die Sonne. Der äquatoriale

Wulst A wird, da er der Sonne näher ist, stärker angezogen, als der Wulst B. Denkt man sich also die Erde nach der Sonne hin fallend, nachdem sie vorher zur Ruhe gebracht war, so fällt A schneller als B und dies ist bei nicht rotierender Erde nur so möglich, dafs die Achse SN, die um etwa $22\frac{1}{2}^0$ geneigt ist, sich mehr senkrecht stellen will. Dies ist durch das Kräftepaar angedeutet, welches in der Figur an SN wirkt. Nun dreht sich aber die Erde um ihre Achse, und jede Drehungsachse ist bestrebt, ihre Richtung beizubehalten. Die Lehrbücher der Physik entwickeln am Fesselschen Apparate und am Kreisel, dafs dann ein Ausweichen der Achse entsteht, welches senkrecht gegen die Ebene des Kräftepaares gerichtet ist. Die Achse schlägt also eine kegelförmige Bahn ein, bei der sie ihre Neigung beibehält. Die Achse giebt demnach im Laufe der Zeit andere und andere Stellen des Himmels als sogenannte Polarpunkte (feste Punkte) an. Allerdings dauert die Umlaufzeit 26 000 Jahre. Bis zum Jahre 2095 nähert sich dieser Punkt dem bekannten Polarstern bis auf 25 Minuten, dann entfernt er sich von dort, um nach etwa 12 000 Jahren den Stern 1. Gröfse Wega im Sternbilde der Leier als Polarstern erscheinen zu lassen. Mit der Achse ändert sich auch die Lage der Ekliptik, die Knotenpunkte K und L rücken im Sinne der Pfeile vorwärts, und während jetzt die Winterstellung mit der Erdnähe zusammenfällt, wird sie nach 13 000 Jahren mit der Erdferne zusammenfallen. Seit Hipparch (130 vor Chr.) beträgt die Verschiebung der Äquinoktialpunkte K und L etwa 28^0. Dies ist die berühmte Präcession der Nachtgleichen.

Fig. 28.

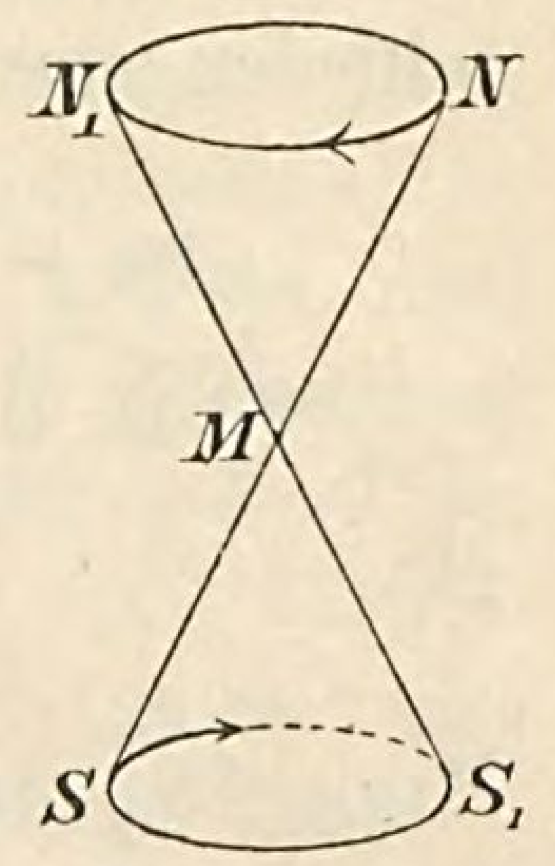
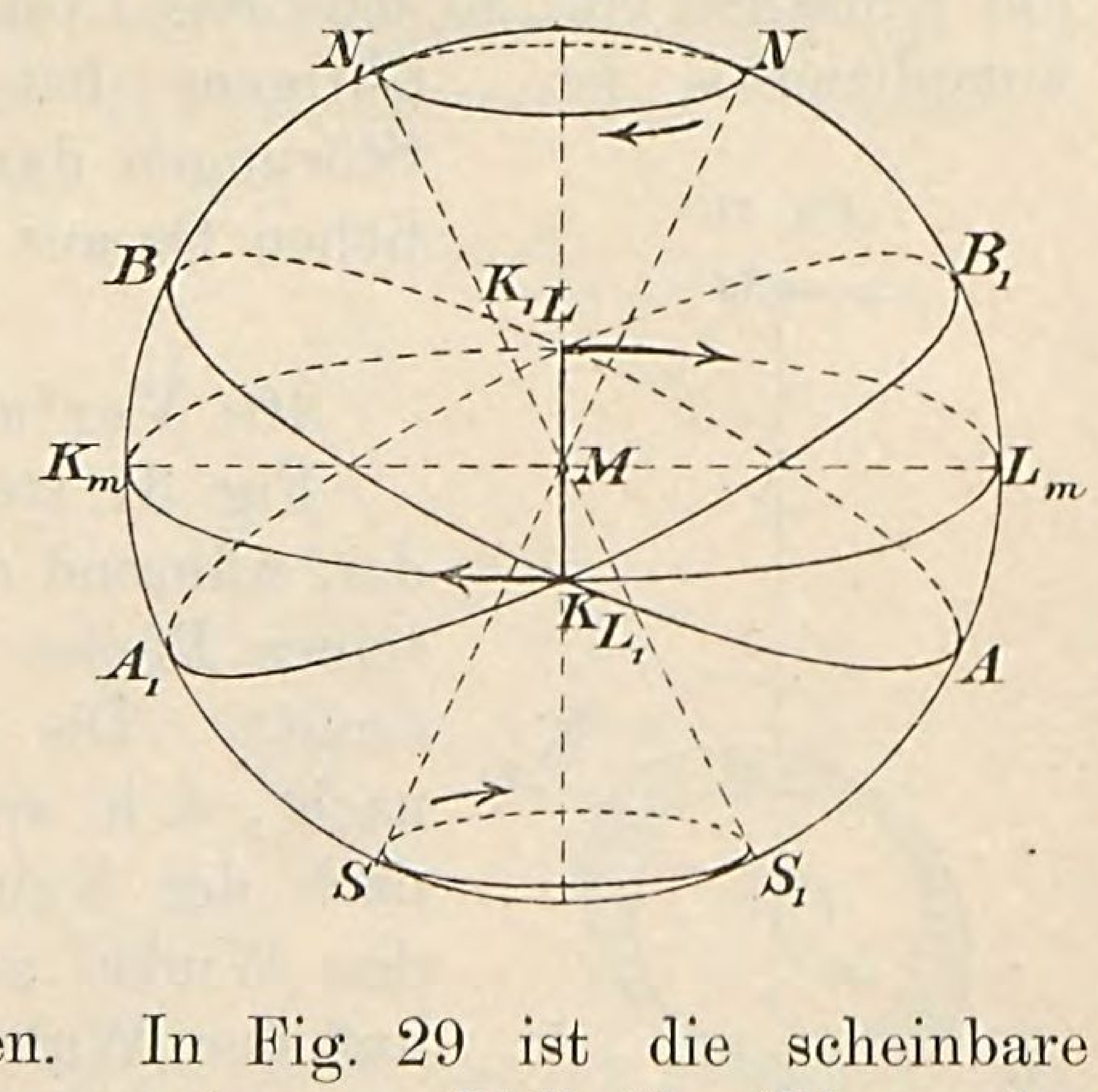


Fig. 29.



Der Antrieb zu dieser Bewegung ist am stärksten in der Zeit der Winter- und Sommerstellung, sie ist gleich Null in der Zeit der Tag- und Nachtgleichen. In Fig. 29 ist die scheinbare Himmelskugel mit horizontal angenommener Ekliptik (Ebene der Erdbahn) dargestellt. N und S bedeuten den Nordpol und Südpol der Himmelskugel in der augenblicklichen Lage, AB die Ebene des zugehörigen Himmelsäquators, K und L die Knoten, d. h. die Schnittpunkte der Kreise für Ekliptik und Äquator. Nach 13 000 Jahren

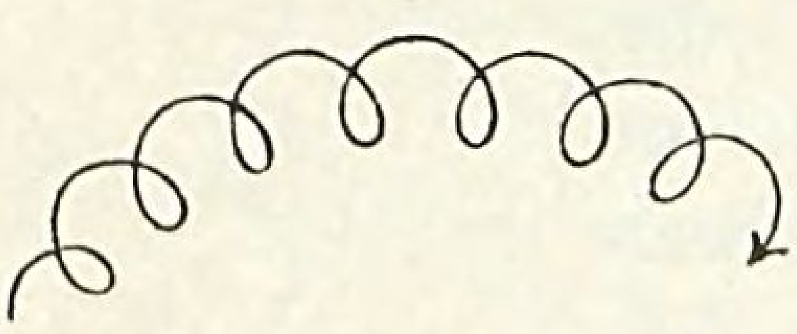
ist dafür die Stellung N_1, S_1, A_1, B_1 zu setzen, wobei K nach K_1 (L), L nach L_1 (K) gerückt ist. Der Knoten K wandert also, dem Pfeile entsprechend, über die Mittellage K_m nach K_1, L über L_m nach L_1. Ein schiefgestellter Kreisel macht mit der Achse MN dieselben Bewegungen.

Man vergleiche hierzu Klein und Sommerfeld: Theorie des Kreisels. Leipzig bei Teubner.

39) Nutation der Erdachse.

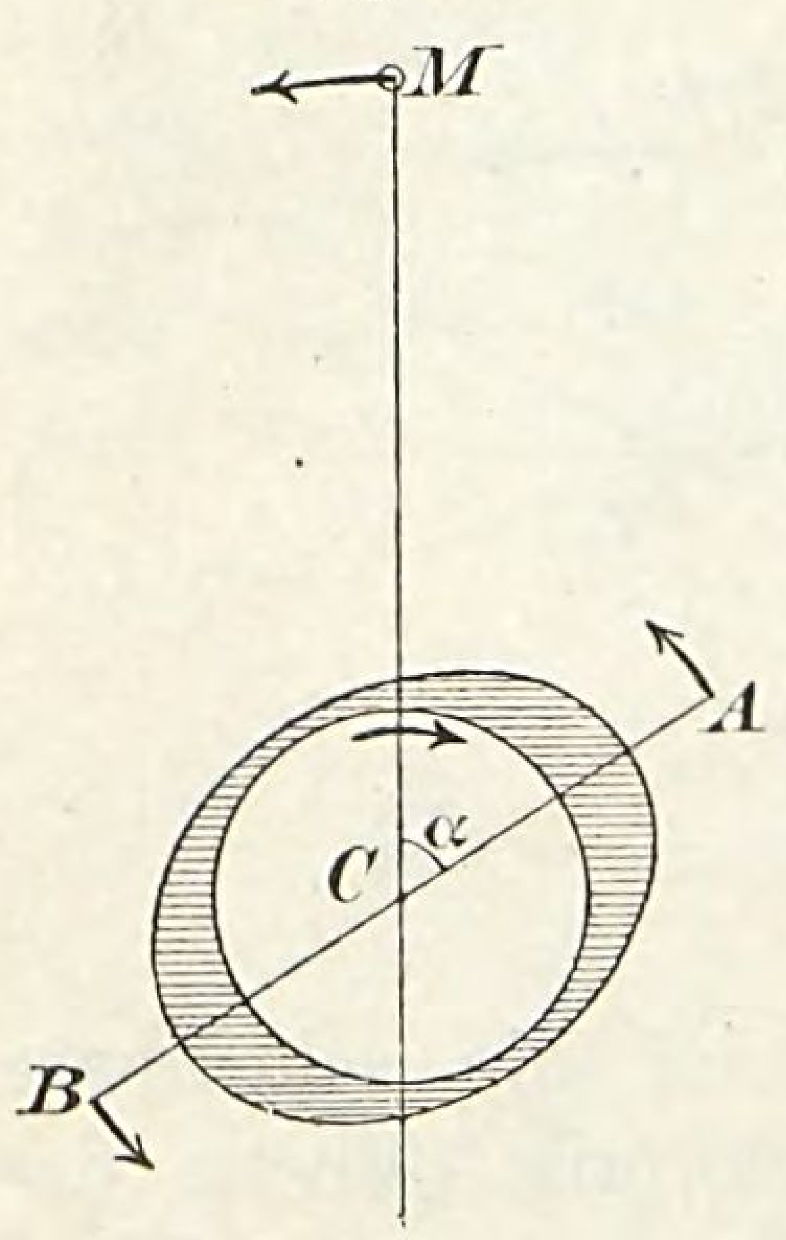
Nun wirkt aber der Mond ebenfalls auf die beiden Wulste verschieden stark, und nach dem Störungsgesetze wird seine Einwirkung zu der der Sonne etwa im Verhältnis 1 : 0,4 stehen, wie bei der Ebbe und Flut. Da nun seine Einwirkung und die der Sonne in der Regel nicht in dieselbe Ebene fallen, will er die Achse anders drehen. Seine Einwirkung hat, da die Umwälzung der Knoten seiner Bahn $18\frac{1}{2}$ Jahre dauert, eine ebenso lange Periode. So kommt es, daſs der Nordpol am Himmel in 26 000 Jahren nicht einen einfachen Kreis, sondern eine Art cyklischer Kurve zurücklegt, wie sie in der Figur angedeutet ist. Nur ist zu berücksichtigen, daſs die Zahl der Windungen $\frac{26\,000}{18\frac{1}{2}} = 1514$ für den vollen Umlauf betragen müſste, und daſs ihr seitlicher Durchmesser nur 9″,25 beträgt.

Fig. 30.



Aber auch der Jupiter und andere Planeten wirken störend auf die Erdachse ein, so daſs das Problem ihrer Schwankungen ein sehr kompliziertes ist. Übrigens hat Laplace bewiesen, daſs diese Störungen durch das Vorhandensein des beweglichen Ozeans nicht beeinfluſst werden.

Fig. 31.



40) Verlangsamung der Erddrehung.

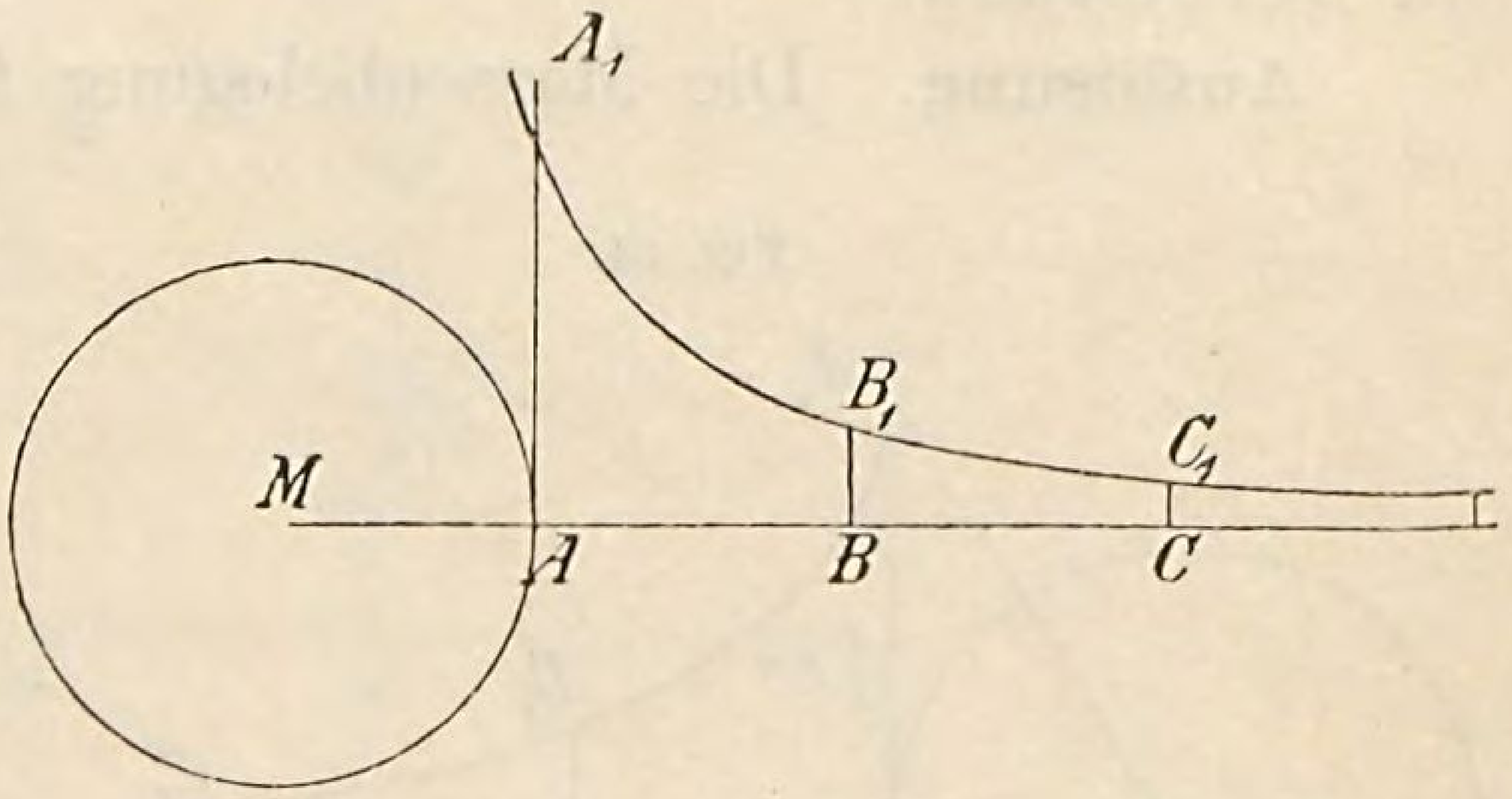
Fig. 31 stellt die äquatoriale Fluterscheinung dar, während der Mond scheinbar in der Richtung seines Pfeiles wandert (die Erde entgegensetzt dreht). Die Fluterscheinung „schleppt etwas nach“, d. h. sie hat ihren Gipfel einige Stunden nach der Kulmination des Mondes, was durch den Winkel α angedeutet ist. Der Mond wirkt auf den Wulst bei A und B verschieden, und zwar, ähnlich wie bei der Präcessionserscheinung die Sonne, so, daſs auf die Gerade AB ein Kräftepaar wirkt, welches der Erddrehung entgegengesetzt ist. Dieses wirkt zwar zunächst nur auf das Wasser ein, dem es eine schwache Ost-West-Strömung verleiht, durch Reibung

und Auftreffen auf die Kontinente aber wirkt diese Erscheinung doch hemmend auf die Erddrehung ein. Nach Berechnungen englischer Astronomen hat sich seit Hipparch den Sterntag um $\frac{1}{81}$ Sekunde verlängert. Dies macht allerdings auf das Jahr nur gegen 4 Sekunden, auf das Jahrhundert also etwa $\frac{1}{9}$ Stunde aus, veranlafst aber beim Rückwärtsberechnen der Sonnen- und Mondfinsternisse erhebliche Unterschiede. So gering dieser Unterschied ist, so grofs ist der Einflufs, wenn man ihn in technischen Mafsen berechnet, denn in solchen ausgedrückt, ist die Energie der sich drehenden Erde von aufserordentlicher Gröfse, nämlich $28\,388 \cdot 10^{21}$ Metertonnen $=$ $28\,388 \cdot 10^{24}$ mkg. Der Energieverlust seit Hipparch beträgt also $81\,349 \cdot 10^{17}$ mkg. Nach 7 Millionen Jahren würde bei fortgesetztem gleich grofsem Verluste die Drehungs-Energie erschöpft sein. Sekundlich gehen $12\,918 \cdot 10^7$ mkg verloren, was $17\,225 \cdot 10^5$ Pferdestärken bedeutet, mit denen der Mond langsam aber sicher der Umdrehung der Erde entgegenarbeitet. (Vgl. Ing. Math. Band I. Seite 124.)

Wer sich für die Rückwärtsberechnungen der Sonnen- und Mondfinsternisse und ihre Bedeutung für die Festlegung weltgeschichtlicher Ereignisse interessiert, sei wieder auf die Astronomische Chronologie von Dr. Wislicenus, Leipzig bei Teubner, 1895, aufmerksam gemacht.

Nachdem so auf einige interessante Anwendungen der Potentialtheorie hingewiesen ist, kehren wir zur Kugelschale, Vollkugel und Hohlkugel zurück und stellen ihre Gravitations- und Potential-Kurven für den ganzen Raum fest.

Fig. 32.



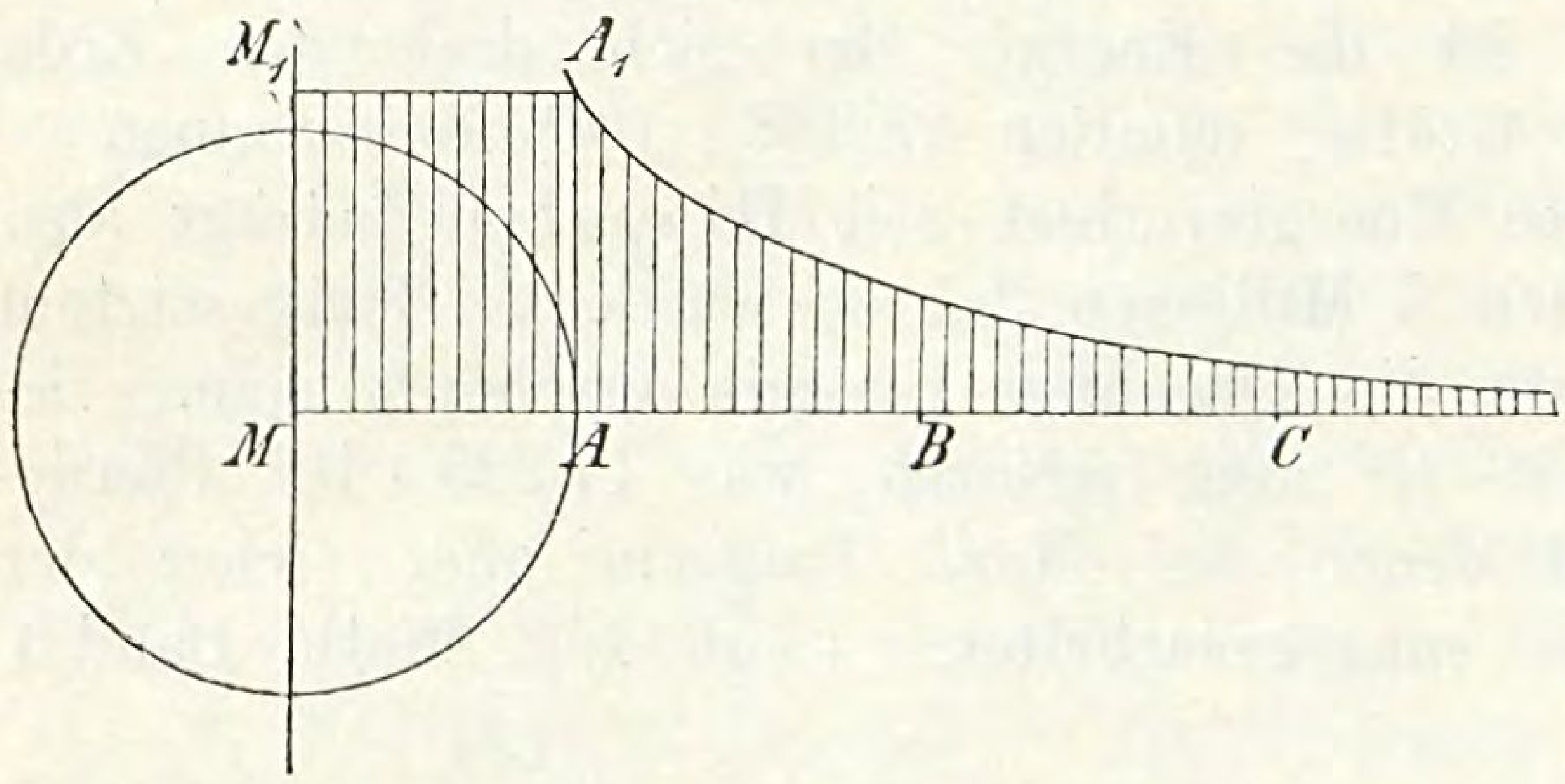
41) **Aufgabe.** Das Potential einer homogenen Kugelschale von der Dichte 1 für alle Punkte des Raumes zu untersuchen.

Auflösung. Die Massenbelegung für die Flächeneinheit sei gleich eins, der angezogene Massenpunkt habe ebenfalls die Masse eins. Dann ist für äufsere Punkte, wenn ϱ der Halbmesser der Kugel, x der Abstand vom Mittelpunkt M ist, die Anziehung $\frac{4\varrho^2\pi}{x^2}$, die Arbeit von der Stelle x bis ins Unendliche hat also nach Nr. 17 den Betrag

$$\overset{\infty}{\underset{x}{F}} = 4\varrho^2\pi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{4\varrho^2\pi}{x}.$$

Der Potentialwert für $x = \infty$ ist Null, er wächst bei der Annäherung bis A zur Gröfse $\frac{4\varrho^2\pi}{\varrho} = 4\varrho\pi$ an. Gelangt der Punkt bei A durch eine Öffnung ins Innere der Kugelschale, so nimmt der Potentialwert nicht mehr zu, da dort kein Arbeitsaufwand zur Fortbewegung von M nötig ist. Die Arbeit für die Bewegung von M bis ∞ ist also ebenso grofs wie die für den Weg von A bis ∞. Stellt man für jeden Punkt den Betrag des Potentials dar, so hat man von M bis A stets dieselbe Höhe $4\varrho\pi$, Fig. 33, dagegen im Abstande $MB = 2\varrho$ die Höhe $\frac{4\varrho\pi}{2}$, im Abstande $MC = 3\varrho$ die Höhe $\frac{4\varrho\pi}{3}$ u. s. w. Die Diagrammkurve des Potentialwertes ist eine gleichseitige Hyperbel.

Fig. 33.



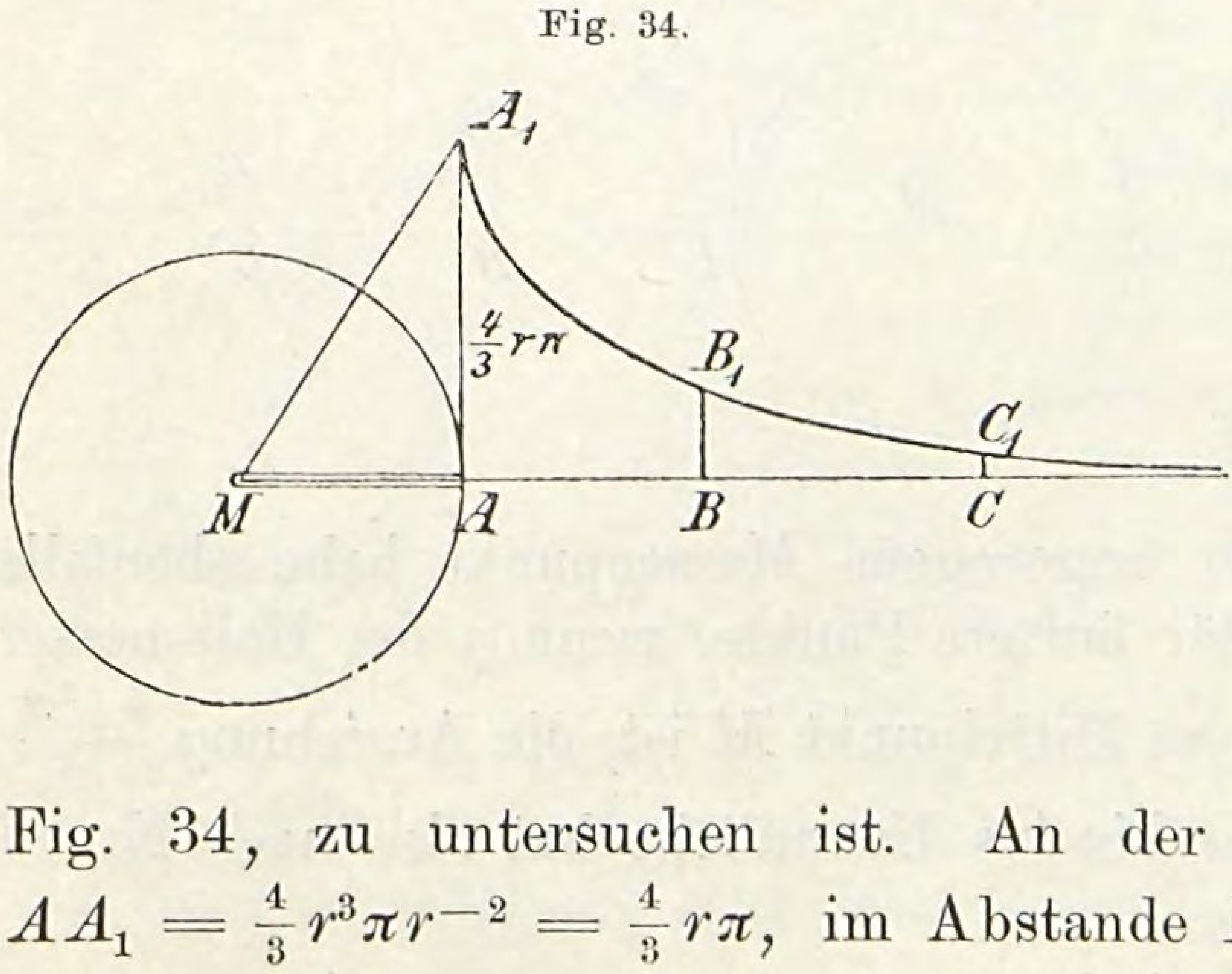
42) **Aufgabe.** Das Potential der homogenen Vollkugel von der Dichte 1 für alle Punkte des Äufseren und Inneren zu berechnen.

Auflösung. Die Massenbelegung für die Raumeinheit sei gleich eins, der angezogene Punkt habe die Masse eins, die Gravitationskonstante sei eins, dann ist die Anziehung für aufserhalb liegende Punkte in der Entfernung x gleich $\frac{4}{3}r^3\pi\frac{1}{x^2}$, so dafs die Diagrammkurve

$$y = \tfrac{4}{3}r^3\pi x^{-2},$$

Fig. 34, zu untersuchen ist. An der Stelle A ist ihre Höhe $AA_1 = \frac{4}{3}r^3\pi r^{-2} = \frac{4}{3}r\pi$, im Abstande $MB = 2r$ handelt es sich

Fig. 34.



um den vierten Teil, bei $MC = 3r$ um den neunten Teil dieser Höhe u. s. w. Die Arbeit von x bis ∞ ist nach Nr. 17

$$\overset{\infty}{\underset{x}{F}} = \frac{4}{3} r^3 \pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \frac{1}{x},$$

und dies ist der Potentialwert für die Entfernung x. Geht man von ∞ bis A, so wächst der Potentialwert bis zur Gröſse $\frac{4}{3} r^3 \pi \frac{1}{r} = \frac{4}{3} r^2 \pi$ an.

Tritt nun der Punkt unter Anwendung eines engen Schachtes in das Innere ein, so nimmt der Potentialwert nach einem anderen Gesetze zu, denn das Diagramm hat im Innern von x bis r nach der Trapezformel den Inhalt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} r \pi + \frac{4}{3} x \pi\right)(r - x) = \frac{2}{3} \pi (r^2 - x^2),$$

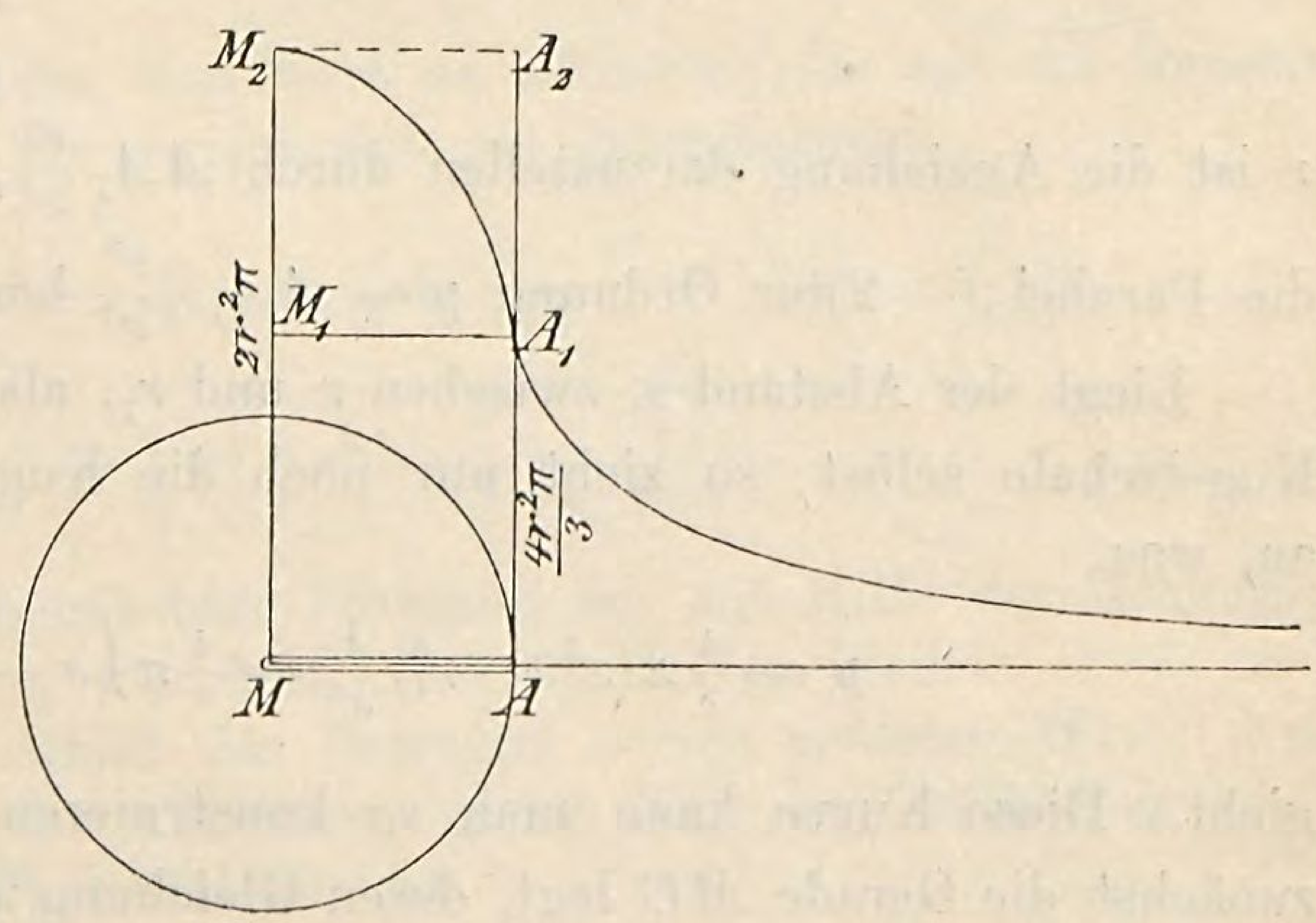
von x im Innern bis ∞ ist also die Hebungsarbeit.

$$\frac{2}{3} \pi (r^2 - x^2) + \frac{4}{3} r^2 \pi = 2 \pi \left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Im Mittelpunkte, d. h. für x gleich Null, ist der Potentialwert am gröſsten, nämlich gleich $2 r^2 \pi$.

Die graphische Darstellung des Potentialwertes, Fig. 35, führt rechts von $AA_1 = \frac{4}{3} r^2 \pi$ auf eine gleichseitige Hyperbel. Links davon handelt es sich um eine dem Rechteck $M_1 A_1 A_2 M_2$ eingezeichnete Parabel, deren Scheitel in M_2 liegt.

Fig. 35.



Beispiel. Die letzte Aufgabe über die Vollkugel zeigte unter anderm, daſs bei der Kugel vom Radius eins mit der Dichte eins die Masseneinheit für die Fortschaffung von der Oberfläche bis ins Unendliche die Arbeit $\frac{4}{3} r^2 \pi$ z. B. in Tonnen verlangte. Dabei war $k = 1$ angenommen, während in Wahrheit $k = \frac{3g}{4 r \pi p}$ ist. Bei der Erdkugel ist statt der Dichte 1 die Dichte 5,56 zu nehmen, ferner wiegt die

Masseneinheit der Technik im Tonnensystem 9,81 t, genauer g t. Der Arbeitsaufwand wird also in Wahrheit

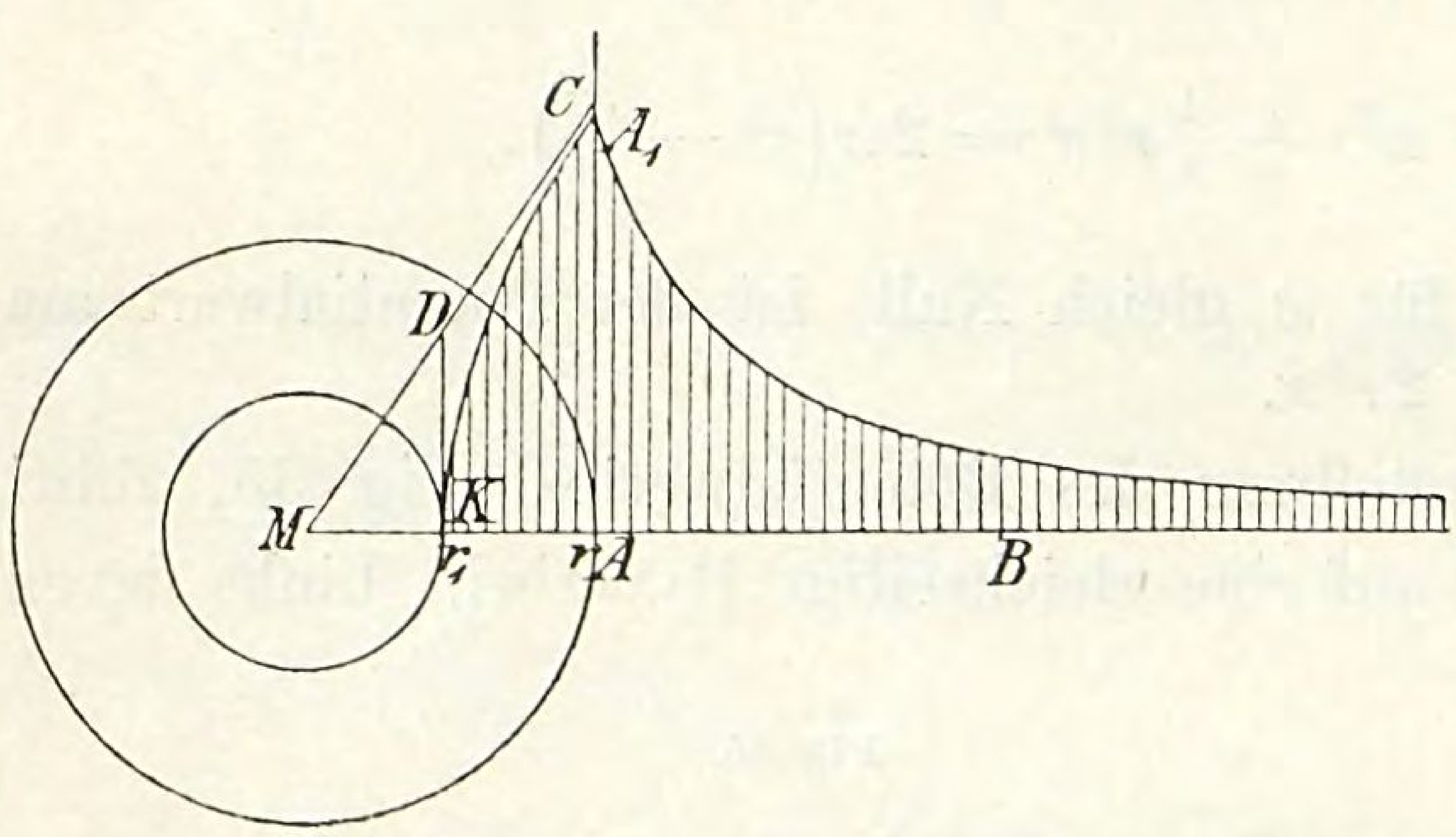
$$\frac{4r^2\pi}{3} \cdot 5{,}56 \cdot \frac{3g}{4r\pi \cdot 5{,}56} = rg \text{ Tonnen.}$$

Dies ist also das gfache von dem, was die erste Behandlung dieser Aufgabe gegeben hatte; das Ergebnis ist richtig, denn hier wird die gfache Last gehoben.

An diesem Beispiele erkennt man, wie man die Ergebnisse der Potentialtheorie in die technische Betrachtungsweise überführt.

43) **Aufgabe.** Das Potential der homogenen Hohlkugel mit den Radien r und r_1 und der Dichte 1 für alle Punkte des Raumes zu untersuchen.

Fig. 36.



Auflösung. An der Oberfläche ist die Anziehung auf die Masseneinheit

$$\tfrac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3) \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Diese Gröfse werde durch die beliebige Gerade AA_1, Fig. 36, dargestellt. In der gröfseren Entfernung x ist die Anziehung darzustellen durch $AA_1 \frac{r^2}{x^2}$, so dafs es sich um die Parabel (— 2)ter Ordnung $y = AA_1 \cdot \frac{r^2}{x^2}$ handelt.

Liegt der Abstand x zwischen r und r_1, also der Punkt x in der Kugelschale selbst, so zieht nur noch die Kugelschale $\frac{4}{3}\pi(x^3 - r_1^3)$ an, was

$$y = \tfrac{4}{3}\pi(x^3 - r_1^3)\frac{1}{x^2} = \tfrac{4}{3}\pi\left(x - \frac{r_1^3}{x^2}\right)$$

giebt. Diese Kurve kann man so konstruieren, dafs man durch M zunächst die Gerade MC legt, deren Gleichung $y = \frac{4}{3}\pi x$ ist, so dafs $AC = \frac{4}{3}\pi r$ ist. Von der Ordinate dieser Geraden ist für jeden Abstand x die Ordinate der Kurve $y = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot \frac{1}{x^2}$, die eine Parabel von Ordnung (— 2) ist, abzuziehen. MC ist Asymptote der eigentlichen Kurve, die durch K und A_1 geht, bei A_1 aber nicht fortgesetzt wird.

Hat man bei D von der Asymptote aus DK gezogen, so hat man in der Entfernung $2\,MD$ nach unten $\frac{1}{4}DK$, in $3\,MD$ dagegen $\frac{1}{9}DK$ als Senkrechte zu ziehen. Im Hohlraume endlich ist die Anziehung gleich Null, dort also das Potential konstant.

Der Potentialwert für jeden Abstand $x > r$ ist gegeben durch

$$y = \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)\frac{1}{x};$$

im Unendlichen ist er Null, nach dem Gesetze der gleichseitigen Hyperbel wächst er von dort bis zum Rande hin an auf

$$\frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)\frac{1}{r}.$$

Liegt x zwischen r_1 und r, so handelt es sich um das von der Kurve

$$y = \frac{4}{3}\pi\left(x - \frac{r_1^3}{x^2}\right)$$

begrenzte Arbeitsdiagramm, und zwar für die Strecke von x bis r. Nach der Schichtenformel erhält man die Fläche bezw. Arbeit

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r^2}{2} - r_1^3\frac{r^{-1}}{-1}\right) - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x^2}{2} - r_1^3\frac{x^{-1}}{-1}\right),$$

oder

$$\frac{4}{3}\pi\left[\frac{r^2 - x^2}{2} + r_1^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)\right].$$

Dazu hat man den Randwert zu addieren, um auf die Gesamtarbeit zu kommen. Es ergiebt sich als Potentialwert:

$$y = \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)\frac{1}{r} + \frac{4}{3}\pi\left[\frac{r^2 - x^2}{2} + r_1^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)\right]$$
$$= \frac{4}{3}\pi\left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{r_1^3}{x}\right].$$

Diese Parabel gemischter Ordnung ist mit Hilfe der Rechnung leicht zu konstruieren, was dem Leser überlassen bleibe.

Ist $x = r_1$, so erhält das Potential seinen gröſsten Wert; denn im Hohlraume, wo die Anziehung gleich Null ist, wächst es nicht mehr. Der gröſste Potentialwert ist

$$\frac{4}{3}\pi\left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{r_1^2}{2} - \frac{r_1^3}{r_1}\right] = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{2}r_1^2\right],$$

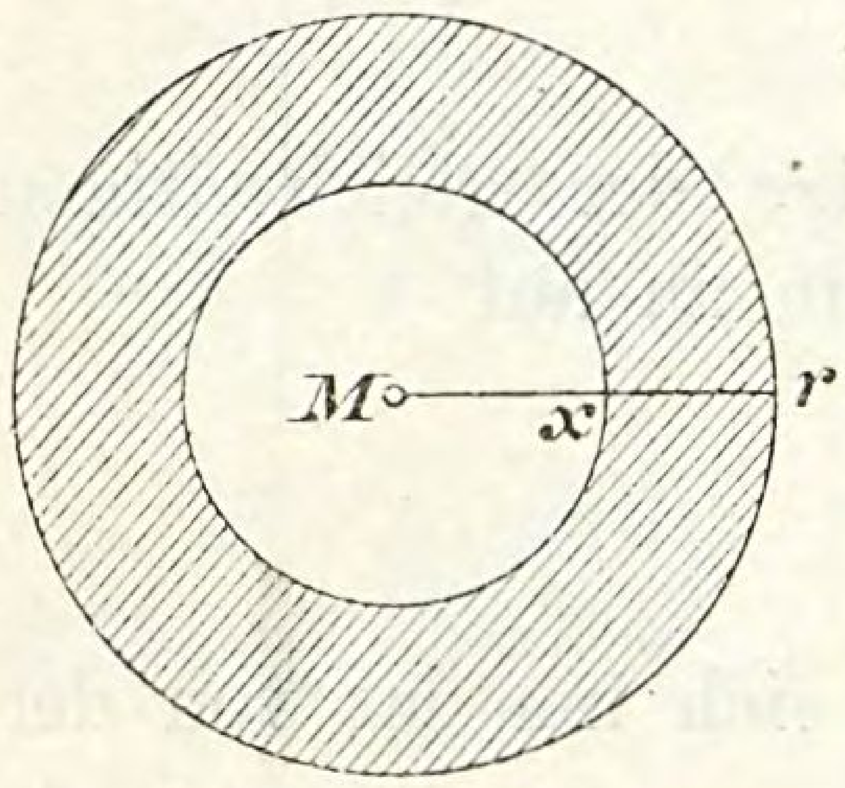
oder endlich

$$2\pi(r^2 - r_1^2).$$

Für wirkliche Verhältnisse ist die Gravitationskonstante als Faktor beizufügen und im übrigen wie vorher zu rechnen.

44) **Aufgabe.** Das Selbstpotential der homogenen Kugel zu bestimmen. [Es handelt sich darum, die Arbeit zu berechnen, die nötig ist, um die einzelnen koncentrischen Schichten der Kugel der Reihe nach abzutragen und in unendliche Entfernung zu bringen.]

Fig. 37.



Auflösung. Angenommen, die Abtragung bis x, Fig. 37, sei schon erfolgt, dann ist nur noch eine Kugel vom Radius x übrig, bei der die Arbeit $\frac{4}{3} x^2 \pi$ erforderlich ist, um die Masseneinheit ins Unendliche zu entfernen. Die koncentrische Schicht $4 x^2 \pi$ (von der beliebig klein zu denkenden Dicke eins) erfordert also die Arbeit

$$\frac{4}{3} x^2 \pi \cdot 4 x^2 \pi = \frac{16}{3} x^4 \pi^2.$$

Handelt es sich aber für diese koncentrische Schicht um den Ausdruck

$$q_x = \frac{16 \pi^2}{3} x^4,$$

so ist für die ganze Kugel von o bis r nach der Schichtenformel der Ausdruck

$$\frac{16 \pi^2}{3} \cdot \frac{r^5}{5}$$

zu nehmen. Das Selbstpotential hat also den Wert $\frac{16 \pi^2 \cdot r^5}{15}$. Führt man die Masse $m = \frac{4}{3} r^3 \pi$ ein, so handelt es sich zugleich um $\frac{3}{5} \frac{m^2}{r}$.

Genau ebenso viel Anziehungsarbeit wird geleistet, wenn der Körper durch allmähliches Zusammenstürzen oder Zusammenziehen kosmischer Massen entsteht, die ursprünglich über den unendlichen Raum verbreitet waren oder wenigstens einen sehr grofsen Raum einnahmen.

45) **Aufgabe.** Für alle Massenpunkte der homogenen Kugel die Potentialwerte zu bestimmen und ihre Summe zu bilden.

Auflösung. An der Stelle x im Innern ist nach einer früheren Aufgabe das Potential der Kugel in Bezug auf die Masseneinheit

$$2 \pi \left(r^2 - \frac{x^2}{3} \right),$$

also in Bezug auf die entsprechende koncentrische Schicht $4x^2\pi$ gleich

$$q_x = 2\pi\left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right)4x^2\pi = 8\pi^2\left(r^2x^2 - \frac{x^4}{3}\right).$$

Nach der Schichtenformel giebt dies für die ganze Kugel

$$8\pi^2\left(r^2\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{15}\right) = \frac{32\pi^2 r^5}{15}.$$

Führt man die Masse $\frac{4}{3}r^3\pi$ ein, so hat man $\frac{6}{5}\frac{m^2}{r}$.

Die Aufgabe läfst sich folgendermafsen deuten: Man denke sich zwischen die Moleküle der Kugel neue Moleküle so eingeschoben, dafs gewissermafsen in der Kugel noch eine zweite Kugel derselben Art liegt. Diese hypothetische zweite Kugel denke man sich mit einem Male in unendliche Entfernung gebracht und berechne die dazu nötige Arbeit. Jedes einzelne Teilchen der zweiten Kugel erfordert offenbar dieselbe Arbeit zum Wegschaffen wie jedes einzelne Teilchen der ersten, d. h. denselben Potentialwert.

Dies klärt zugleich darüber auf, warum bei dieser Aufgabe das Ergebnis doppelt so grofs ist wie bei der vorhergehenden. Denkt man sich nämlich die Doppelkugel durch allmähliche Vereinigung kosmischer Massen entstanden, so ergiebt sich das vierfache Selbstpotential wie bei der einfachen Kugel, denn an Stelle jeder Anziehung von Einzelmassen $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ darf man sich dabei gesetzt denken:

$$\frac{(2m_1)(2m_2)}{r^2} = 4\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

was für den ganzen Verlauf gilt. Entfernt man nun die Teilchen der zweiten Kugel einzeln ins Unendliche (nicht, wie vorher, zugleich), so ist, weil das Selbstpotential P der ersten Kugel unangetastet bleibt, die Arbeit $3P$ zu leisten. Diese besteht aus zwei Teilen, aus dem Auflösen des Selbstpotentials der zweiten Kugel, was $1P$ giebt, und dem Entfernen der zweiten Kugel von der ersten, was dem Reste $2P$, also dem Doppelten des Resultats der Aufgabe 44 entsprechen mufs. Damit ist der Zusammenhang beider Beispiele ohne Rechnung aufgeklärt.

46) Anwendung des Selbstpotentials auf kosmische Verhältnisse.

Helmholtz hat eine Reihe von Problemen, die mit der Bildung des Sonnensystems und der Entstehung und Erhaltung der Sonnenwärme zusammenhängen, mit Hilfe des Selbstpotentials in einfacher Weise gelöst.

Ist M die Sonnenmasse, R ihr Radius, so ist das Selbstpotential der Sonne $\frac{3}{5}\frac{M^2}{R}$. Für die Wirklichkeit ist nun die Gravitationskonstante $k = \frac{gr^2}{m}$ (wo r und m den Radius und die Masse der Erde bedeuten) als Faktor beizufügen, was $\frac{3}{5}\frac{M^2}{R}\frac{gr^2}{m}$ giebt. Rechnet man in Metern und mit der technischen Masseneinheit des Kilogrammsystems (die 9,81 kg wiegt), um die Wärmeeinheit gleich 425 mkg setzen zu können, so sind für die Temperaturerhöhung 1°C (bei Kapazität eins) für jede Masseneinheit 9,81 · 425 mgk erforderlich. Man erhält die Temperaturerhöhung mittels der Division durch diesen Ausdruck, also

$$t = \frac{3}{5}\frac{M}{R}\frac{r^2}{425\,m} = \sim \frac{0{,}6 \cdot (355\,000\,m) r^2}{Rm425} = \sim \frac{0{,}6 r^2 \cdot 355\,000}{425\,R}.$$

Setzt man hier $r = 860 \cdot 7500\,m$, $R = 95\,000 \cdot 7500\,m$, so bekommt man etwa 29000000°C, was mit dem Helmholtzschen Ergebnis zusammenstimmt, sobald man dort dieselben Erfahrungswerte benutzt. Bei geringerer Kapazität entsteht eine entsprechend höhere Temperatur. Die letztere würde wirklich entstehen, wenn der Sonnenkörper keine Ausstrahlung gehabt hätte. Durch die Ausstrahlung kann ein Abkühlungszustand eingetreten sein. Dies ist aber nicht als durchaus notwendig anzunehmen, wie sich aus folgendem ergiebt.

Durch fortgesetzte Zusammenziehung der Sonne wird neue Wärme frei. Zusammenziehung des „Nebelballes" auf den Radius R giebt das Selbstpotential $\frac{3}{5}\frac{M^2}{R}\frac{gr^2}{m}$, Zusammenziehung auf den kleineren Radius R_1 das gröfsere Selbstpotential $\frac{3}{5}\frac{M^2}{R_1}\frac{gr^2}{m}$. Beide verhalten sich wie $\frac{R_1}{R}$, und in diesem Mafse vergröfsert sich die entstehende Temperatur. Der Temperaturunterschied entspricht der durch die wachsende Zusammenziehung entstandenen Wärme. An der Hand dieses Gedankenganges hat Helmholtz gezeigt, wie eine Zusammenziehung um zehn Meilen die jetzige Sonnenausstrahlung auf 2309 Jahre decken könnte. Die Rechnung soll unten durchgeführt werden.

Nun sind drei Fälle möglich: 1) Ist die Ausstrahlung stärker als der durch Zusammenziehung entstehende Wärmeersatz, so kühlt sich die Sonne ab; 2) ist sie schwächer, so erhitzt sich die Sonne; 3) ist beides gleichwertig, so bleibt die Sonnentemperatur sich gleich. Was in Wirklichkeit der Fall ist, kann nicht ohne weiteres entschieden werden, da die Ausstrahlung durchaus nicht proportional der Temperatur zu sein braucht. Man bedenke, dafs die Zusammenziehung auf den halben Radius die doppelte Wärmemenge giebt, während die ausstrahlende Oberfläche auf den vierten Teil herabgesetzt wird. Die

Ausstrahlungsfähigkeit müſste also erheblich stärker wachsen als die Temperatur, wenn Gleichgewicht der letzteren herrschen soll. Die zunehmende Erhitzung ist sogar wahrscheinlicher als die Abkühlung. Es handelt sich hier um einen kritischen Punkt der allgemein verbreiteten Vorstellungsweise, die eine Erhitzung des Sonnenkörpers nur für die Anfangszeiten ihrer Kosmogenie gelten läſst.

Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes mögen einige genauere Rechnungsergebnisse nach anderer Berechnungsmethode beigefügt werden, wobei der Radius der Sonne gleich 95 000 Meilen, ihre Dichtigkeit gleich 1,38, die auf ihrer Oberfläche wirkende Schwerkraft gleich dem 28,3 fachen von der auf der Erdoberfläche geltenden gesetzt werde.

Man denke sich die Sonne aus lauter koncentrischen Schichten von der Dicke 1 Meter bestehend. Eine nach der anderen soll abgenommen und in unendliche Entfernung von der Sonne gebracht werden. Die nötige Arbeit ist zu berechnen, dabei aber zu beachten, daſs nach Wegnahme jeder Schicht die Anziehung der Sonnenmasse geringer wird. Wird z. B. der Radius r_1 auf den Wert r reduziert, so wird die anziehende Masse im Verhältnis $\frac{r^3}{r_1^3}$ vermindert; da aber die Entfernung der Oberfläche vom Mittelpunkt jetzt geringer ist, wird die Wirkung der Masseneinheit im Verhältnis $\frac{r_1^2}{r^2}$ verstärkt (Gravitationsgesetz). Beide Gründe zusammen geben das $\frac{r^3}{r_1^3} \cdot \frac{r_1^2}{r^2}$fache der ursprünglichen Anziehungskraft, d. h. das $\frac{r}{r_1}$fache

Die zum Radius r gehörige Massenschicht hat den Inhalt $4\,r^2\pi \cdot 1$, nimmt man also die Raumeinheit Sonnenmasse für die Dichte 1 zugleich als Masseneinheit an, so ist die Masse der Schicht $4\,r^2\pi \cdot 1{,}38$. Ist nun r in Metern gegeben, so würde sie an der Erdoberfläche ebenso viele Tonnen wiegen, an der Sonnenoberfläche dagegen das 28,3fache, an der Oberfläche der Kugel mit Radius r endlich das $28{,}3\frac{r}{r_1}$fache, d. h.

$$\frac{1{,}38 \cdot 4 \cdot 28{,}3\, r^2\pi \cdot r}{r_1} \text{ Tonnen}$$

oder

$$\frac{1{,}38 \cdot 4000 \cdot 28{,}3 \cdot r^3\pi}{r_1} \text{ kg.}$$

Das auſserhalb der soeben betrachteten Kugel befindliche der Sonnenmasse war bereits als abgetragen gedacht. Um also diese p kg in unendliche Entfernung zu heben, braucht man nach obiger Theorie die Arbeit

$$A = pr = \frac{1{,}38 \cdot 4000 \cdot 28{,}3\, r^4 \pi}{r_1} \text{ mkg}.$$

Um nun die gesamte Sonnenmasse schichtenweise zu entfernen, braucht man nach der Summen- oder Schichtenformel (Ing. Math. I Nr. 171) die Arbeit

$$A = \frac{4000 \cdot 1{,}38 \cdot 28{,}3 \cdot r_1^5 \pi}{5\, r_1} \text{ mkg} = \frac{4000 \cdot 1{,}38 \cdot 28{,}3 \cdot \pi \cdot r_1^4}{5} \text{ mkg}.$$

Division durch 425 giebt die entsprechende Anzahl von Wärmeeinheiten.

Läſst man nun das Umgekehrte stattfinden, d. h. läſst man die einzelnen entfernten Schichten aus unendlicher Entfernung wieder herabfallen (z. B. jede erst dann, nachdem die vorhergehende auf der Sonne angelangt ist), so wird bei voller Umsetzung der entstehenden Arbeitsfähigkeit in Wärme genau dieselbe Anzahl von Wärmeeinheiten erzeugt, nämlich

$$W = \frac{4000 \cdot 1{,}38 \cdot 28{,}3 \cdot r_1^4 \pi}{5 \cdot 425} \text{ W.-E.}$$

Zum Schluſs ist die Masse der Sonne wieder auf

$$1000 \cdot \tfrac{4}{3} r_1^3 \pi \cdot 1{,}38 \text{ kg}$$

angewachsen. Auf jedes kg der Masse kommen also

$$W_1 = \frac{4000 \cdot 1{,}38 \cdot 28{,}3 \cdot r_1^4 \pi}{5 \cdot 425 \cdot \frac{4000}{3} r_1^3 \pi \cdot 1{,}38} = \frac{84{,}9\, r_1}{2125} \text{ W.-E.}$$

Setzt man hier $r_1 = 95\,000 \cdot 7500$ m, so ergiebt sich für jedes kg die Wärmemenge

$$W_1 = 28\,466\,000 \text{ W.-E.}$$

Wäre diese Wärme in der Sonne geblieben, und hätte die Sonnenmasse die Kapazität des Wassers, so würde also die durchschnittliche Sonnenwärme

$$28\,466\,000^0 \text{ C}$$

betragen.

(Helmholtz berechnet nach seiner Methode 28 611 000° C, was nur wenig abweicht, und zwar infolge anderer Annahme der Konstanten).

Zieht sich nun die Sonne von dem angenommenen Radius r_1 auf r_2 zusammen, so entsteht nach obigem die $\frac{r_1}{r_2}$fache Wärmemenge. Handelt

es sich um eine Verkleinerung des Sonnenradius um 10 Meilen, so erhält man für den Bildungsprozeſs dieser kleineren Sonne auf jedes kg

$$W_2 = \frac{28\,466\,000 \cdot 95\,000}{94\,990} = 28\,469\,000 \text{ W.-E.}$$

Dies giebt für die gesamte Sonnenmasse ein Mehr von $62\,724 \cdot 10^{29}$ W.-E.

Findet also eine solche, für das unbewaffnete Auge nicht einmal sichtbare, Kontraktion statt (sie beträgt ja nur $\frac{1}{9500}$, also etwa $\frac{1}{10\,000}$ des Durchmessers), so läſst es sich wohl erklären, daſs die Sonne in historischen Zeiten eine Abnahme der Ausstrahlung nicht beobachten lieſs. Man kann geradezu fragen, auf wie viele Jahre hinaus die soeben berechnete Wärmemenge imstande sein würde, die jetzige Ausstrahlung zu decken. Dies soll berechnet werden.

Mayer versteht unter Groſskalorie die Wärmemenge, die nötig ist, um eine Kubikmeile Wasser um 1^0 C zu erwärmen; sie ist also gleich $40\,854 \cdot 10^{10}$ W.-E. Nach den Messungen von Pouillet strahlt der ganze Sonnenkörper in 1 Min. $1265 \cdot 10^7$ Groſskalorien aus; die jährliche Ausstrahlung in gewöhnlichen Wärmeeinheiten beträgt also:

$$40\,854 \cdot 1265 \cdot 144 \cdot 365 \cdot 10^{18} = 27\,163 \cdot 10^{26} \text{ W.-E.}$$

Dividiert man das obige Ergebnis durch dieses, so erhält man:

$$\frac{62\,724 \cdot 10^{29}}{27\,163 \cdot 10^{26}} = 2{,}3091 \cdot 10^3 = 2309{,}1 \text{ Jahre.}$$

Auf so lange Zeit wäre also die Sonnenausstrahlung durch jene unscheinbare Kontraktion gedeckt.

Erfolgt die genannte Kontraktion in kürzerer Zeit, so ist sogar statt einer Abkühlung eine weitere Erwärmung möglich, was nach den Berechnungen Ritters über kosmische Gaskugeln durchaus nicht unwahrscheinlich erscheint. Bei zu langsamer Kontraktion dagegen findet Abkühlung statt. Auch ein Gleichgewichtszustand ist denkbar.

Nach Violle ist die Sonnenausstrahlung etwas gröſser, nämlich auf 1 qm 1 159 000 W.-E i. d. Min., d. h. im ganzen $38\,860 \cdot 10^{26}$ auf das Jahr, statt $27\,163 \cdot 10^{26}$. Jene Kontraktion also würde nach diesen Angaben die Ausstrahlung nur auf 1614 Jahre decken.

Helmholtz hat auf Pouilletscher Grundlage für $\frac{1}{10\,000}$ Kontraktion 2289 Jahre gefunden, was mit dem obigen Ergebnis für $\frac{1}{9500}$ Kontraktion gut zusammenstimmt.

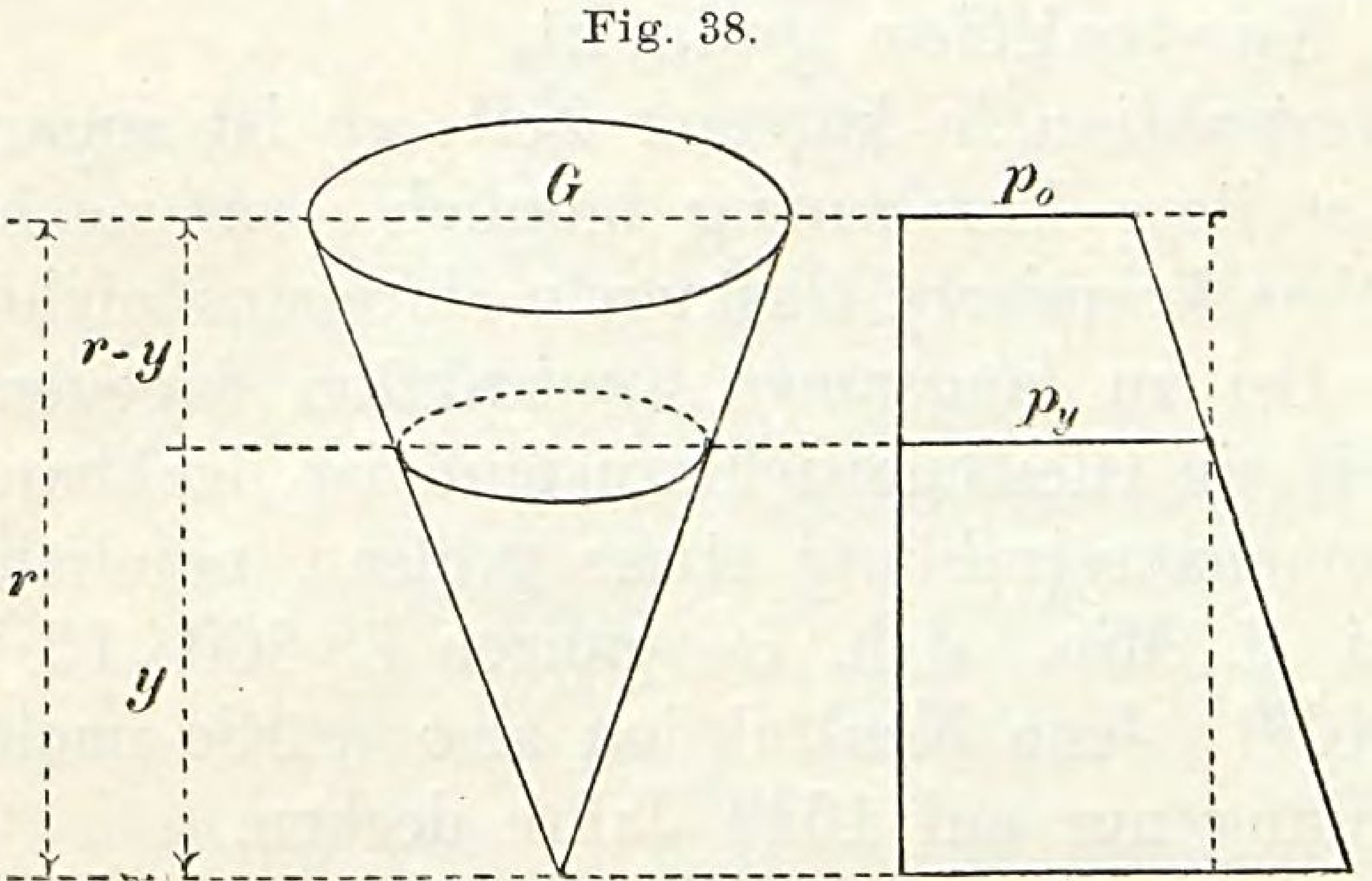
Der bekannte Begründer der Wärmemechanik, Mayer-Heilbronn, hatte sich die Nichtabnahme der Wärme bei der Sonne nicht durch eine Kontraktion, sondern durch eine Art von Meteorregen zu erklären gesucht, wo die aufschlagenden Massen ihre Energie in Wärme um-

zusetzen haben. Er selbst aber hatte gegen diesen Meteorregen zugleich das Bedenken ausgesprochen, dafs er die Masse der Sonne vergröfsern und die Umlaufszeit der Planeten verkürzen würde; deshalb versuchte er durch einen sogenannten Centrifugalprozess eigentümlicher Art seine Theorie zu retten, was ihm nicht gelang. Die Helmholtzsche Idee einer dauernden Kontraktion infolge der Gravitationswirkung, der als Widerstand die Wirkung der Wärmeschwingungen der Moleküle entgegenstehen, macht den Mayerschen Massenprozefs überflüssig; sie läfst sich, wie aus obigem ersichtlich, in elementarster Weise auf grund der Mayerschen Umsetzungstheorie entwickeln, so weit, dafs man in der Lage ist, alle hierher gehörigen Arbeiten der neueren Physiker zu verfolgen und ihre Berechnungen zu prüfen. Von hier aus könnte man z. B. in das Studium der Ritterschen Untersuchungen über die Konstitution gasförmiger Weltkörper eintreten, die in den Poggendorfschen Annalen erschienen und auch vereinigt im Buchhandel zu haben sind. Man hat die Ergebnisse zwar angezweifelt, aber nicht widerlegt. Sie stehen und fallen mit den angenommenen physikalischen Grundgesetzen. Wer Ritter widerlegen will, mufs die Gastheorie in ihren Fundamenten umgestalten.

Das Vorgetragene wird die Wichtigkeit, die dem Begriffe des Selbstpotentials beizulegen ist, einigermafsen veranschaulichen.

47) Die Anziehung innerhalb einer Erdkugel, deren Dichte von der Oberfläche zum Centrum hin regelmäfsig von $\delta = 2{,}5$ bis zu einem zu berechnenden Werte zunimmt, während die mittlere Dichte gleich 5,6 ist.

Fig. 38.



a) Um auch ein Problem über koncentrische Schichten von veränderlicher Dichte zu behandeln, wird die obige Aufgabe gestellt.

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (genauer einen Sektor) aus der Erdkugel herausgeschnitten. Ist seine obere Fläche G, so hat er in Höhe y den Querschnitt $G_y = G\frac{y^2}{r^2}\cdot$ Ist das spezifische Gewicht unten p_u, oben p_o, so ergiebt sich bei regelmäfsiger Zunahme nach unten für die Höhe y die Dichte p_y aus der Gleichung

$$(p_u - p_y) : y = (p_y - p_o) : (r - y),$$

also

$$p_y = p_u - y \frac{p_u - p_o}{r}.$$

Die Schicht in Höhe y fällt also ins Gewicht mit

$$G_y \cdot p_y = G \frac{y^2}{r^2} \cdot p_u - G y^3 \cdot \frac{p_u - p_o}{r^3}.$$

Für die Summe der Schichten von $y = o$ bis $y = y_1$ giebt die Schichtenformel

$$1) \qquad G \frac{p_u}{r^2} \cdot \frac{y_1^3}{3} - G \frac{p_u - p_o}{r^3} \cdot \frac{y_1^4}{4},$$

also für die Schichten von $y = o$ bis $y = y_1$

$$G \frac{p_u}{3} r - G (p_u - p_o) \frac{r}{4} = \frac{Gr}{12} [4 p_u - 3 p_u + 3 p_o] = \frac{Gr}{12} [p_u + 3 p_o] \cdot$$

Der ganze Kegel hat aber bei einer mittleren Dichte 5,6 die Masse

$$G \frac{r}{3} 5{,}6,$$

also ist

$$\frac{Gr}{12} [p_u + 3 p_o] = G \frac{r}{3} 5{,}6$$

d. h.

$$p_u + 3 p_o = 4 \cdot 5{,}6 = 22{,}4$$

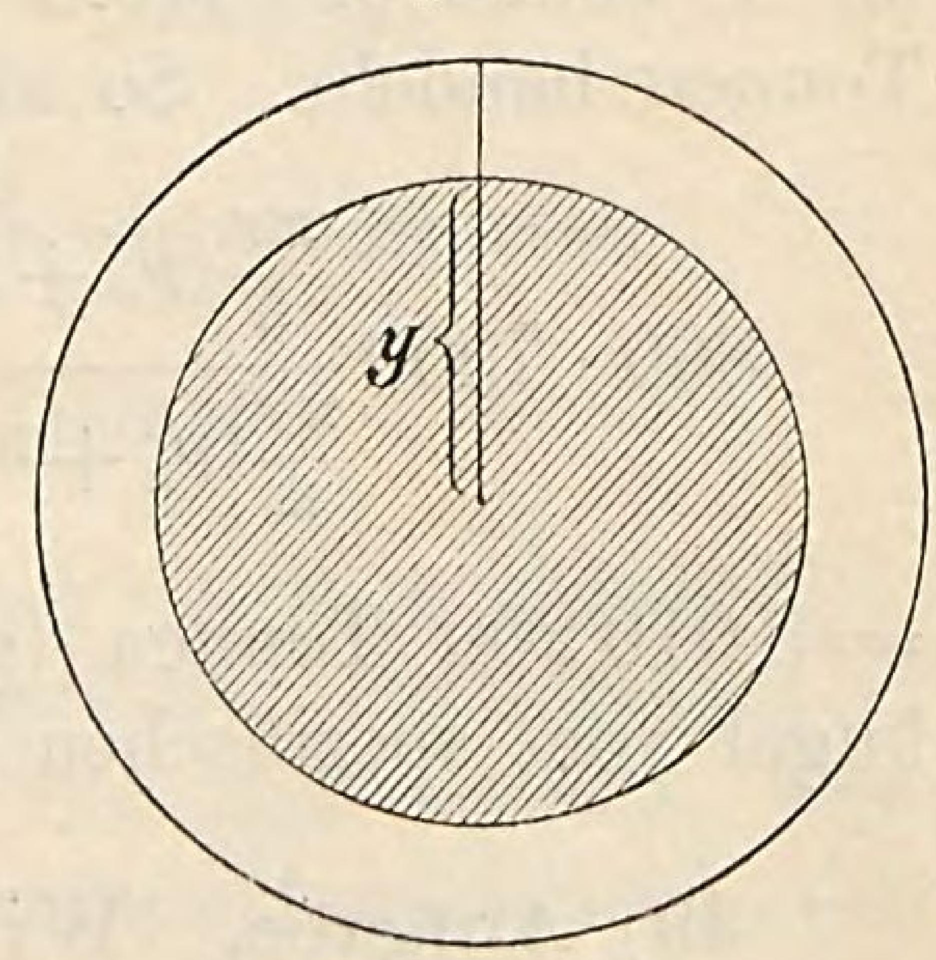
also

$$p_u = 22{,}4 - 3 p_o = 22{,}4 - 7{,}5 = 14{,}9,$$

d. h. etwas höher, als die Dichte des Quecksilbers (13,59).

So kann man für jedes beliebige Zunahmegesetz die Dichte im Centrum berechnen. Die Astronomie giebt in der Regel 12 als wahrscheinliches spezifisches Gewicht im Erdkern an.

Fig. 39.



b) **Aufgabe.** Wie stark ist die Anziehung im Innern dieser Kugel und zwar in Entfernung y vom Mittelpunkte?

Auflösung. Vorher war die Masse des Kegels von o bis y_1 berechnet als

$$G \left[\frac{p_u}{r^2} \frac{y_1^3}{3} - \frac{p_u - p_o}{r^3} \frac{y_1^4}{4} \right].$$

Für die Kugel mit Radius y_1 findet man also

$$4 r^2 \pi \left[\frac{p_u}{r^2} \frac{y_1^3}{3} - \frac{p_u - p_o}{r^3} \frac{y_1^4}{4} \right] = \frac{\pi y_1^3}{3 r} [4 p_u r - 3 (p_u - p_o) y_1] \cdot$$

Diese Masse ist im Mittelpunkte koncentriert zu denken, und da nur der Kern anziehend wirkt, erhält man die Anziehung durch Multiplikation mit $\frac{1}{y_1^2}\cdot$ Sie ist also

$$\frac{\pi y_1}{3r}\left[4 p_u r - 3(p_u - p_o) y_1\right].$$

Hier ist $p_u = 14{,}9$ und $p_o = 2{,}5$ einzusetzen.

48) **Aufgabe.** Von der Oberfläche bis zur Mitte reiche ein mit Wasser angefüllter Schacht von 1 qm Querschnitt. Wie stark ist der Wasserdruck pro qm im Centrum der Kugel?

Auflösung. Aus

$$\frac{\pi y_1}{3r}\left[4 p_u r - 3(p_u - p_o) y_1\right]$$

ergiebt sich das Anziehungsdiagramm für den ganzen Radius. Die Schichtenformel ergiebt von o bis r als Diagrammfläche

$$\frac{4\pi}{3} p_u \frac{r^2}{2} - \frac{\pi}{r}(p_u - p_o)\frac{r^3}{3} = \frac{\pi r^2}{3}\left[2 p_u - (p_u - p_o)\right]$$

oder

$$\frac{\pi r^2}{3}\left[p_u + p_o\right].$$

Die mittlere Anziehung ist (da r die Grundlinie des Diagramms bedeutet)

$$\frac{\pi r}{3}(p_u + p_o).$$

Wirkte überall die obere Anziehung

$$\frac{\pi r}{3r}\left[4 p_u r - 3(p_u - p_o) r\right] = \frac{\pi r}{3}\left[p_u + 3 p_o\right],$$

die 1 Tonne pro Meter Höhe giebt, so würde es sich um $860 \cdot 7500$ Tonnen handeln. So aber handelt es sich um

$$860 \cdot 7500 \frac{\frac{\pi r}{3}(p_u + p_o)}{\frac{\pi r}{3}(p_u + 3 p_o)} = 860 \cdot 7500 \frac{p_u + p_o}{p_u + 3 p_o} = 860 \cdot 7500 \cdot \frac{17{,}4}{22{,}4}$$

$= 5\,010\,200$ Tonnen (gegen $3\,250\,000$ Tonnen bei homogener Erdkugel vom spezifischen Gewichte 5,6).

49) **Aufgabe.** Wie schwer würde der Druck im Centrum sein, wenn der Schacht von 1 qm Querschnitt mit einem beweglichen Kerne ausgefüllt würde, dessen Dichte an jeder Stelle y die oben für diese berechnete ist?

Auflösung. Multipliziert man die für y berechnete Dichte

$$p_y = \frac{p_u r - y(p_u - p_o)}{r}$$

mit der dort wirkenden Anziehung, so giebt die Schicht von 1 m Dicke dort den Anteil

$$\frac{\pi}{3r^2}[4p_u ry - 3(p_u - p_o)y^2][p_u r - (p_u - p_o)y] =$$

1) $$\frac{\pi}{3r^2}[4p_u^2 r^2 y - 7p_u r(p_u - p_o)y^2 + 3(p_u - p_o)^2 y^3].$$

Bildet man das Anziehungsdiagramm, so ist dessen Fläche nach der Schichtenformel

$$\frac{\pi}{3r^2}\left[4p_u^2 r^2 \frac{r^2}{2} - 7p_u r(p_u - p_o)\frac{r^3}{3} + 3(p_u - p_o)^2\frac{r^4}{4}\right]$$
$$= \frac{\pi r^2}{36}[5p_u^2 + 10p_u p_o = 9p_o^2],$$

seine mittlere Höhe also

$$\frac{\pi r}{36}[5p_u^2 + 10p_u p_o + 9p_o^2].$$

Die oben wirkende Anziehung ist aber nach 1), wo $y = r$ zu setzen ist, gleich

$$\frac{\pi r}{3}p_o(p_u + 3p_o)$$

und giebt 2,5 Tonnen Druck auf das Meter Höhe

Herrscht sie überall, so würde es sich um 2,5 · 860 · 7500 Tonnen handeln. So aber handelt es sich um

$$2{,}5 \cdot 860 \cdot 7500 \cdot \frac{5p_u^2 + 10p_u p_o + 9p_o^2}{12p(p_u + 3p_o)} \text{ Tonnen.}$$

Setzt man wieder $p_u = 14{,}9$ und $p_o = 2{,}5$, so erhält man

$$\frac{2{,}5 \cdot 860 \cdot 7500 \cdot 1536{,}55}{672} = 36\,871\,000 \text{ Tonnen}$$

statt 18200000 Tonnen bei homogener Erde von mittlerer Dichte 5,6. Der große Unterschied erklärt sich daraus, daß bei der homogenen Erde die Abnahme der Anziehung nach unten hin weit schneller vor sich geht, da die nicht mehr anziehenden Außenschichten von großer Fläche sind und viel Masse enthalten. Bei dem vorliegenden Problem enthalten aber gerade die großflächigen Schichten verhältnismäßig wenig Masse.

50) **Aufgabe.** Das Potential dieser Kugel für alle Raumpunkte zu finden.

Auflösung. Hebung im Schachte erfordert von M bis y, weil

$$\frac{\pi}{3r}[4p_u ry - 3(p_u - p_o)y^2]$$

die Anziehung bei y ist, die Arbeit

$$1)\qquad \frac{\pi}{3r}\left[4p_u r\frac{y^2}{2} - 3(p_u - p_o)\frac{y^3}{3}\right] = \frac{\pi}{3r}[2p_u ry^2 - (p_u - p_o)y^3].$$

Also: Hebung bis r erfordert

$$2)\qquad \frac{\pi r^3}{3r}[2p_u - (p_u - p_o)] = \frac{\pi r^2}{3}[p_u + p_o] = \frac{\pi r^2}{3}17{,}4.$$

Hebung von r bis ∞ erfordert

$$3)\qquad \frac{m_1}{r} = 5{,}6\cdot\frac{4}{3}\frac{r^3\pi}{r} = 5{,}6\cdot\frac{4}{3}r^2\pi = \frac{22{,}4}{3}r^2\pi.$$

Folglich ist das Potential im Innern bei Abstand y gleich $2) + 3) - 1)$ oder

$$\frac{r^2\pi}{3}(17{,}4 + 22{,}4) - \frac{\pi}{3r}[2p_u ry^2 - (p_u - p_o)y^3]$$

$$= \frac{r^2\pi}{3}39{,}8 - \frac{\pi y^2}{3r}[29{,}8\,r - 12{,}4\cdot y].$$

Das Potential für äufsere Punkte in Entfernung ϱ ist gleich

$$\frac{m_1}{\varrho} = \frac{22{,}4}{3}\frac{r^3\pi}{\varrho}.$$

Damit ist auch diese Aufgabe vollständig erledigt.

In ähnlicher Weise würde man zu rechnen haben, wenn man für die Dichte im Centrum der Erde den Wert 12 oder überhaupt das von Laplace für die Zunahme der Dichte nach der Mitte hin aufgestellte Gesetz zu Grunde legen wollte. Alle Berechnungen dieser Art können also mit elementaren Hilfsmitteln erledigt werden.

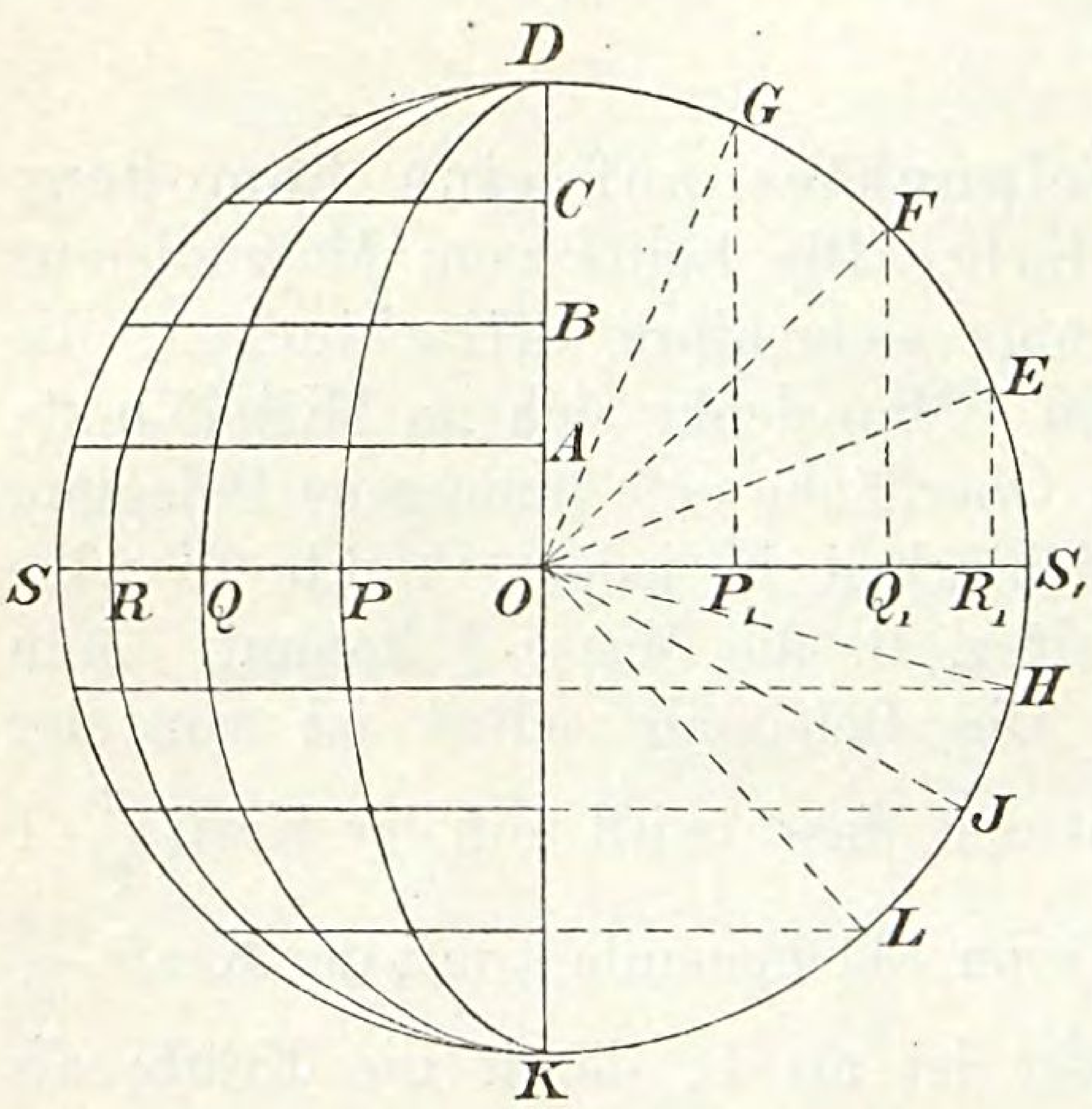
Kapitel IV.

Die einfachsten Kraftröhren und Niveauflächen; Zelleneinteilung des Raumes und physikalische Anwendungen.

51) Anziehung des Mittelpunktes auf eine homogene Massenbelegung der Kugelschale. Die Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität erfordert einige elementare Betrachtungen, die für das Folgende sehr wichtig sind. Man denke sich im Mittelpunkte der Kugel eine Masse m, auf ihrer Oberfläche eine homogene Belegung mit ponderabler Masse, deren Dichtigkeit in jedem Punkte dieselbe sei, so dafs auf die Flächeneinheit z. B. die Masse δ kommt. Man nennt dann δ die Dichtigkeit. Die Belegung selbst ist von der Menge $m_1 = 4\varrho^2\pi\delta$. Jede Einheit der Masse wird mit der Kraft $\frac{m}{\varrho^2}\cdot 1$ nach innen gezogen, die Belegung jeder Flächeneinheit mit der Kraft $\frac{m\delta}{\varrho^2}$ (vorausgesetzt, dafs ϱ weit gröfser ist als 1, damit die Kräfte als parallel gelten können), jede kleine Fläche f mit der Kraft $\frac{mf\delta}{\varrho^2}$. [Im Hohlraume ist das Potential der Belegung konstant gleich dem an der Oberfläche geltenden, d. h. gleich $\frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho} = 4\varrho\pi\delta$, das des Massenpunktes im Centrum ist für die Entfernung r gleich $\frac{m}{r}$, also ist für jeden Punkt im Hohlraume das Potential gleich $\frac{m}{r} + 4\varrho\pi\delta$, für jeden äufseren Punkt gleich $\frac{m}{r} + \frac{4\varrho^2\pi\delta}{r}$.] Für verschiedene koncentrische Kugeln handelt es sich in Bezug auf die Masseneinheit um die Anziehungen $p_1 = \frac{m}{\varrho_1^2}$ und $p_2 = \frac{m}{\varrho_2^2}$, so dafs $p_1 4\varrho_1^2\pi = p_2 4\varrho_2^2\pi$ oder $p_1 O_1 = p_2 O_2$ ist. Beschränkt man die Betrachtung auf eine Pyramide oder einen Kegel mit der Spitze im Centrum, der von jeder Kugelfläche $\frac{1}{n}$ abschneidet, so dafs die Schnittflächen $F_1 = \frac{O_1}{n}$ und $F_2 = \frac{O_2}{n}$ sind, so folgt $p_1 F_1 = p_2 F_2$.

52) Einteilung der Kugelfläche in gleiche Felder. In der Elektrizitätslehre ist es für die Faradaysche Auffassung von Wichtigkeit, die Kugelfläche in gleiche Felder einzuteilen. Dies geschieht am bequemsten so, dafs man eine Achse, z. B. DK in gleiche Teile einteilt und durch die Teilpunkte Normalschnitte legt, die auf der Fläche die sogenannten Parallelkreise geben. Die Zonen haben sämtlich dieselbe Fläche, nämlich, wenn n die Anzahl der Teile der Achse d ist, die Fläche $\frac{2r\pi d}{n} = \frac{4r^2\pi}{n}\cdot$ Die Einteilung ist also eine andere als die beim Globus gebräuchliche, wie sie in Fig. 41 dargestellt ist. Sodann führt man Meridian-Schnitte, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Ihre Verzeichnung im Aufrifs kann erfolgen, indem man den Quadranten $\widehat{DS_1}$ in gleiche Teile teilt, von den Teilpunkten aus Lote GP_1, FQ_1, ER_1 auf den horizontalen Durchmesser fällt, die symmetrischen Punkte P, Q, R, S zu den Fufspunkten bildet und durch jedes Paar und die Pole, z. B. durch P, P_1, K und D die entsprechenden Ellipsen legt. Bei vollständiger Zeichnung würde es sich in der Figur um $8 \cdot 16 = 128$ Teile handeln. Für den Radius 1 hätte also jedes „Rechteck" der Kugelfläche den Inhalt $F = \frac{4\pi}{128}\cdot$ Hätte man doppelt so grofse Teilzahlen genommen, so würde man $4 \cdot 128 = 512$ Teile erhalten haben. DK heifst die Achse der Einteilung.

Fig. 40.



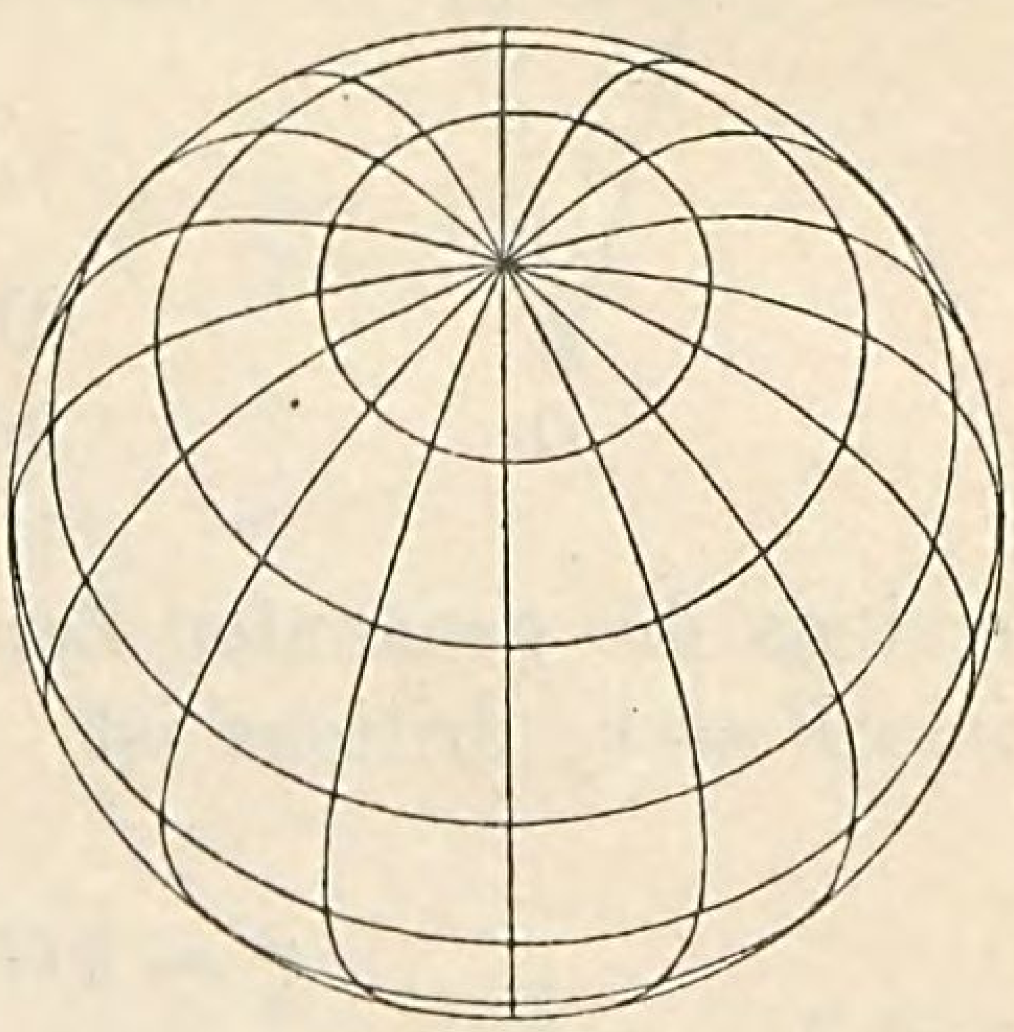
Die Neigungen der Radien OS_1, OE, OF, OG und OD folgen allgemeiner einer arithmetischen Reihe $0, \frac{\pi}{2n}, 2\frac{\pi}{2n}, 3\frac{\pi}{2n}, \ldots, n\frac{\pi}{2n}\cdot$ Die Radien OS_1, OH, OJ, OL, OK dagegen folgen so aufeinander, dafs die Cosinus ihrer Abweichungen gegen OK eine arithmetische Reihe $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ bilden. Auf das letztere kommen wir noch einmal zurück.

Verbindet man jeden Schnittpunkt auf der Oberfläche mit dem Kugelcentrum O, so erhält man im ersten Falle 128, im zweiten 512 Pyramiden. Je gröfser die Teilzahl genommen wird, um so mehr darf man ihre Grundflächen als eben betrachten. Ist die Grundfläche

der 128., bezw. der 512. Teil der Oberfläche 4π, so sagt man, der körperliche Winkel der Pyramide sei von der Gröfse $\frac{4\pi}{128}$ bezw. $\frac{4\pi}{512}$. Trotz des verschiedenen Aussehens haben sämtliche Pyramiden denselben körperlichen Winkel.

53) Kraftflufs und Kraftröhren, Geschwindigkeitspotential. Die neuere Physik betrachtet die elektrischen Anziehungen nicht als momentan in Wirksamkeit tretende Fernwirkungen, sondern als zeitlich von Molekül auf Molekül sich fortpflanzende Wirkungen. Für die obige Centralmasse war pO eine konstante Gröfse, die stets gleich $\frac{m}{r^2} 4r^2\pi = 4\pi m$ ist. Dieses konstante Produkt aus Einheitskraft und Oberfläche bezeichnet Faraday als den vom Centrum ausgehenden Kraftflufs. Beschränkt man die Betrachtung auf eine der besprochenen Pyramiden, so ist die Gröfse des Kraftflusses für diese gleich der Konstanten pF. Jede dieser Pyramiden wird als eine Kraftröhre bezeichnet. Der Kraftflufs geschieht in ihr in ähnlicher Weise, als ob eine inkompressible Flüssigkeit von O nach dem Felde der Kugeloberfläche oder von dort aus zurückflösse.

Fig. 41.

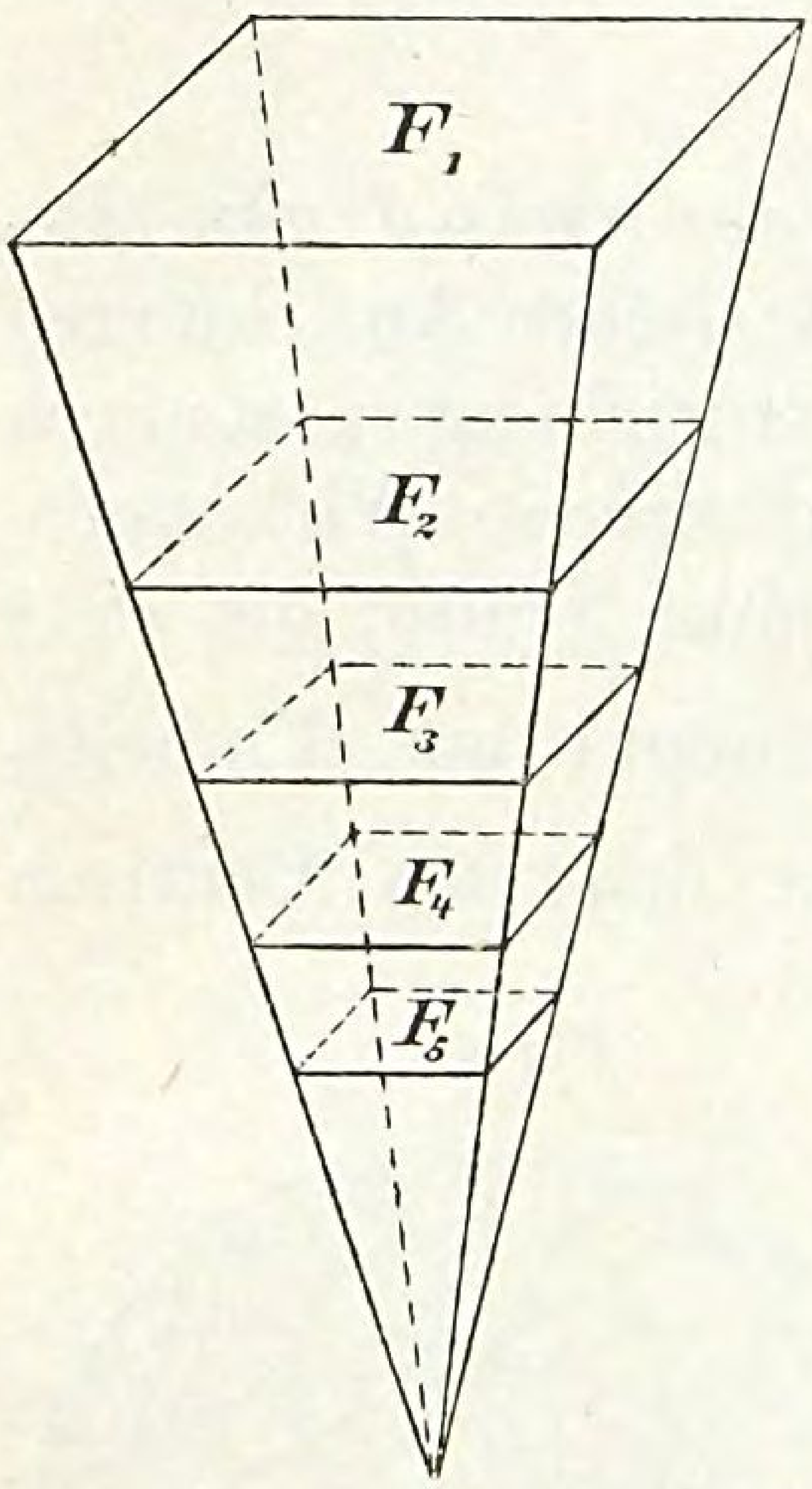


Man kann sich die Kraftröhre in Zellen eingeteilt denken. Tritt in jede Zelle ebenso viel Kraftflufs bezw. Flüssigkeit ein, wie aus, so setzen Faraday und Maxwell ihren Kraftflufs gleich Null, Poisson dagegen hat den Kraftflufs als Spannung der Zelle bezeichnet. Darüber wird später ausführlicher gesprochen werden. Die Mittellinien der Kraftröhren werden häufig als Kraftlinien bezeichnet.

Um ein klares Bild zu erhalten, denke man sich in einer solchen Kraftröhre eine inkompressible Flüssigkeit, bei O eine Öffnung, aus der sie ausfliefst, während von oben her der Verlust durch Nachfüllen kontinuierlich ersetzt wird. Dann ist die Geschwindigkeit an jeder Stelle wie grofs? Da durch jeden Querschnitt $F_1, F_2, F_3 \ldots$ in der Zeiteinheit dieselbe Menge fliefst, verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadrate der Radien. Ist also v für den Radius 1 gleich 1, so ist es für den Radius r gleich $\frac{1}{r^2}$. Dies entspricht ganz der anziehenden Wirkung einer Masse 1 auf die Masseneinheit, die in Entfernung r

ebenfalls gleich $\frac{1}{r^2}$ ist. Dasselbe gilt von der entgegengesetzten Bewegung. Vergl. Fig. 42.

Fig. 42.



Nun waren nach Nr. 18 die Abstände $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ solche, für welche die Potentialwerte der Reihe nach gleich 1, 2, 3, 4, 5 ... sind, also in arithmetischer Reihe aufeinander folgen. Die Anziehungen aber waren der Reihe nach gleich 1, 4, 9, 16, 25 ... An jeder Stelle ist $p \cdot F = c$, denn

$$p_1 : p_2 = F_2 : F_1 = r_2^2 : r_1^2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}.$$

An jeder Stelle ist ferner nach Nr. 17 p gleich bezw. proportional dem Potentialgefälle G, denn

$$p = kG = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_2}.$$

Da nun p und v in beiden Problemen demselben Gesetze folgen, also einander proportional sind, so gelten für die Strömung erstens die genannten Zahlenverhältnisse, zweitens geht $pF = c$ über in $vF = c$, drittens ist

$$v = kG = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_2}.$$

Jetzt ist k irgend eine Konstante, von der, wie aus der letzten Formel hervorgeht, die Geschwindigkeit abhängig ist. Man kann sie als einen Leitungskoeffizienten oder eine Widerstandskonstante auffassen.

Da aus der Potentialdifferenz jetzt nicht eine Kraft, sondern eine Geschwindigkeit abgeleitet wird, hat das Potential nicht mehr die Bedeutung einer Kraftfunktion, sondern die einer Geschwindigkeitsfunktion. Helmholtz hat dafür den Namen Geschwindigkeitspotential eingeführt.

Vorher war, wenn man $k = 1$ gesetzt hatte,

$$V_2 - V_1 = pw = \text{Arbeit} = \text{Kraft mal Kraftweg},$$

jetzt ist

$$V_2 - V_1 = v \cdot w = \text{Geschwindigkeit mal Geschwindigkeitsweg}.$$

Die kleine Potentialdifferenz bedeutet also jetzt das Produkt aus der kleinen Verschiebung und der (mittleren) Geschwindigkeit, mit der sie zurückgelegt wird.

Bei einem längeren Wege handelte es sich früher um die Summe von Arbeiten, d. h. um $\Sigma p w$, hier um die Summe der Produkte aus den kleinen Verschiebungen und den zugehörigen Geschwindigkeiten, also um $\Sigma v w$.

Eine solche Flüssigkeit ist allerdings nur eine gedachte, ideale. Ihre Eigenschaften können erst später, bei den allgemeinen Problemen, dargestellt werden. Aber die Einführung des Begriffes Geschwindigkeitspotential gestattet eine kurze Ausdrucksweise, ohne dabei über die Natur des betreffenden Fluidums (Wärme, Elektrizität) irgend welche hypothetischen Voraussetzungen zu beanspruchen. Helmholtz bezeichnet die Kraftröhre als Stromfaden, jede ihn begrenzende Kraftlinie als Stromlinie.

Helmholtz hätte ebenso gut eine elastische Flüssigkeit von konstanter Geschwindigkeit und veränderlicher Dichte betrachten können, die nach den entsprechenden Gesetzen in den Kraftröhren fliefst. Soll eine solche Strömung stationär sein, so müssen die Dichtigkeiten δ sich umgekehrt wie die Querschnitte verhalten, also

$$\delta_1 : \delta_2 = F_2 : F_1 = r_2^2 : r_1^2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2},$$

und

$$\delta = kG = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_2}.$$

Jetzt würde ($k = 1$ gesetzt)

$$V_2 - V_1 = \delta w$$

sein, d. h. die Potentialdifferenz gleich dem Produkte aus der kleinen Verschiebung und der zugehörigen (mittleren) Dichte. Das Potential wäre analog als Dichtigkeitspotential zu bezeichnen.

Nimmt man in irgend einem Material konstante Geschwindigkeit eines elektrischen Fluidums an, so entspricht die obige Annahme ganz ebenso dem Ohmschen Gesetze für die elektrische Strömung in einem Drahte von veränderlichem Querschnitte F, wie die des Helmholtzschen Fluidums.

54) Das Ohmsche Gesetz.

In homogenen Drähten von überall gleichem Querschnitte handelt es sich für gleiche Abstände um gleiche Potentialdifferenzen. Die Potentialdifferenz längs einer Strecke ist nämlich die mechanische Arbeit, die der stationäre Strom nötig hat, um die Elektrizitätsmenge 1 durch die Widerstände, welche diese Strecke bietet, hindurchzuführen. Ist die Potentialdifferenz gleich 1, die Länge gleich 1 und der Querschnitt gleich 1, so dauert es, je nach dem Material des Drahtes, eine

gewisse Zeit ϱ, bis die Einheit der Elektrizitätsmenge einen der Querschnitte passiert hat. Je gröſser diese Zeit ist, um so gröſser ist der Widerstand des Materials an sich, um so geringer seine Leitungsfähigkeit. Daher heiſst ϱ der spezifische Widerstand, d. h. der auf die obigen Einheiten reduzierte Widerstand. In der Sekunde geht dann durch den Querschnitt die elektrische Menge $\frac{1}{\varrho} = \lambda$, und diese Gröſse heiſst das spezifische Leitungsvermögen des Materials.

Ist nun die Fläche des Querschnitts F mal so groſs, so geht die Ffache Menge von Elektrizität hindurch, ist die Länge l mal so groſs, der Widerstand also der lfache, so geht der lte Teil hindurch, ist die Potentialdifferenz nicht 1, sondern $(V_2 - V_1)$, so geht das $(V_2 - V_1)$fache hindurch. Für einen Draht von Länge l und Querschnitt F ist also bei gegebener Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ die jeden Querschnitt sekundlich passierende Elektrizitätsmenge

$$I = \frac{\lambda}{l} F(V_2 - V_1) = \lambda F G,$$

also ist

$$V_2 - V_1 = I \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{l}{F} = I \cdot \varrho \frac{l}{F} = I \cdot W,$$

wo W den wirklichen Widerstand des Drahtes bedeuten soll.

Dies ist der Ausdruck für das Ohmsche Gesetz. Man bezeichnet I als die Stromstärke (Intensität der Strömung), G ist wieder das Potentialgefälle.

Ist v die Geschwindigkeit, F der Querschnitt, δ die Dichte, d. h. die mittlere Elektrizitätsmenge auf der Raumeinheit, so ist die Stromstärke zugleich

$$I = \delta v F.$$

Durch Gleichsetzung erhält man als Formel für die Stromdichte

$$\delta = \frac{\lambda}{v} \frac{V_2 - V_1}{l} = \frac{\lambda}{v} G = k G,$$

wo k eine konstante Gröſse ist.

Handelt es sich nun um eine fingierte elektrische Strömung in einem den Raum homogen erfüllenden Mittel, die von dem Punkte O aus nach allen Seiten dem unendlichen Bereiche zuströmt, so wird man den Forderungen des Ohmschen Gesetzes gerecht, wenn man sich in O einen Pol von irgend welcher Polstärke m denkt, der die elektrische positive Einheit mit der Kraft $\frac{m}{r^2}$ abstöſst (die entgegengesetzte anzieht), so daſs $\frac{m}{r}$ das Potential und $\frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1}$ die Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ ist. Jetzt würde die Stromdichte sein

$$\delta = k_1 m \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{r_2 - r_1} = k_1 G.$$

[Ist r unendlich grofs, so giebt eine endliche Verschiebung e die Anziehungsdifferenz

$$\frac{m}{(r+e)^2} - \frac{m}{r^2} = \frac{m}{r^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{e}{r}\right)^2} - 1\right],$$

was gleich Null ist, sobald $\frac{e}{r}$ unendlich klein wird. Ist aber die Anziehung überall dieselbe, so ist das Arbeitsdiagramm ein Rechteck, gleichen Strecken also entsprechen gleiche Potentialdifferenzen, und dies entspricht dem Ohmschen Gesetze, d. h. die Bewegung im Drahte überall gleichen Querschnitts ist ein besonderer Fall der obigen Strömung, nur ist der Draht unendlich lang zu denken].

Beiläufig sei bemerkt, dafs nach obiger Definition die Potentialdifferenz in einem Drahte von Länge l die auf die elektrische Menge 1 reduzierte Stromarbeit (Überwinden von Widerständen) war, dafs also

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Stromarbeit}}{\text{Elektrizitätsmenge}}.$$

Daraus folgt

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Stromarbeit pro Sekunde}}{\text{Elektrizitätsmenge pro Sekunde}} = \frac{L}{I}.$$

Nach obigem aber war zugleich

$$V_2 - V_1 = I \cdot \left(\varrho \frac{l}{F}\right) = IW$$

d. h. Potentialdifferenz gleich Stromstärke mal wirklicher Widerstand, d. h. z. B. Anzahl der Volt gleich Anzahl der Ampère mal Anzahl der Ohm. Daraus folgt $IW = \frac{L}{I}$ oder $L = WI^2$. Näheres darüber ist im Anhange gezeigt, wo es sich um die elektrischen Einheiten handelt.

55) Ähnlich ist es mit den stationären Strömen der Wärme, nur treten hier an Stelle der Potentialdifferenzen Temperaturunterschiede, an Stelle der hypothetischen Elektrizitätsmengen Wärmemengen. Weil in jede Zelle ebensoviel Wärme einströmt, wie aus ihr ausströmt, so bleibt die Temperatur an jeder Stelle konstant. An Stelle der durch den Querschnitt strömenden Elektrizitätsmenge $I = \lambda F \frac{V_2 - V_1}{l} = \lambda F G$ tritt jetzt die hypothetische Wärmemenge $I = kF\frac{T_2 - T_1}{l} = kFG$. Darauf soll jetzt nicht näher eingegangen werden. Die Betrachtungen würden fast wörtlich dieselben sein.

Haben nun die Kraftröhren sämtlich denselben körperlichen Winkel, so fliefst in allen (unter gleichen Umständen) dieselbe Flüfsigkeitsmenge, bei dem Anziehungsprobleme dagegen ist in allen pF dieselbe Konstante. Sie sind also potentiell gleichwertig.

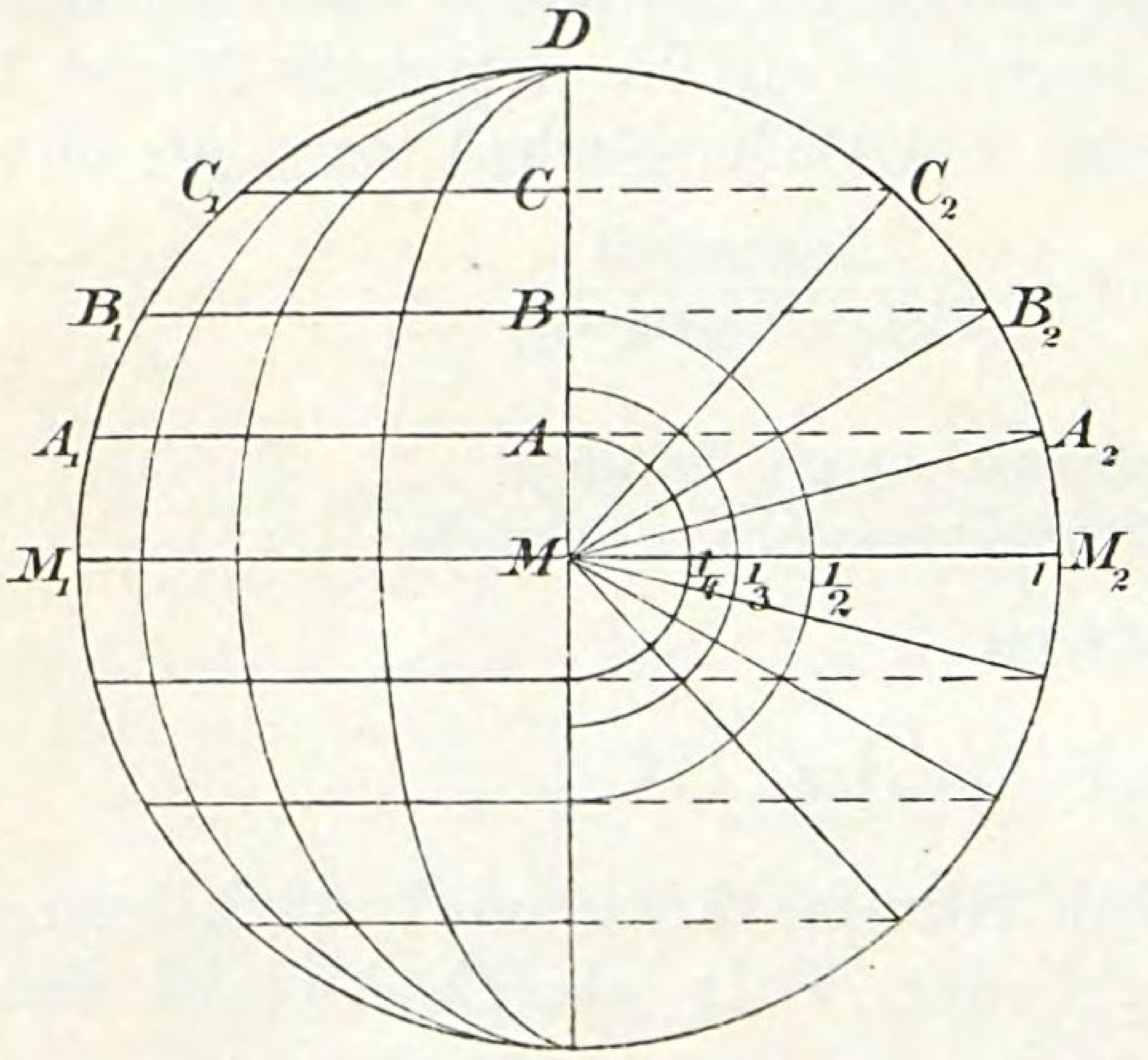
56) Zelleneinteilung des Raumes. Legt man nun um O koncentrische Kugeln, deren Radienunterschiede gleichen Potentialdifferenzen entsprechen, also z. B. mit den aus Fig. 10 zu entnehmenden Radien

$$\frac{m}{0} = \infty, \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \frac{m}{5}, \ldots,$$

so wird der Raum in rechteckige Zellen eingeteilt, die ebenfalls potentiell gleichwertig sind. Die genannte Reihe entspricht bei Masse $m = 1$ oder elektrischer Ladung 1 den Potentialwerten

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Fig. 43.



In der Zeichnung bedeutet die linke Hälfte die Ansicht der Einheitskugel von aufsen, die rechte den Schnitt in der Ebene der Zeichnung. Man beachte dabei, dafs die Längen MA, MB, MC und MD die Cosinus der Poldistanzen $\widehat{DA_1}$, $\widehat{DB_1}$, $\widehat{DC_1}$ und o sind, die also in gleichen Intervallen aufeinander folgen, so dafs die Cosinus der Poldistanzen bei dieser Einteilung ebenso, wie die umgekehrten Werte der Radien eine arithmetische Reihe bilden. Dasselbe gilt von den Meridianen, deren Abweichungen, wie die geographischen Längen, von einem Meridian Null aus zu messen sind.

Diese graphischen Darstellungen des Potentialzustandes im „elektrischen“ oder „magnetischen Felde“ geben nun vereinfachte Anschauungen. Zunächst aber sei ein Vergleich für verschiedene elektrische Ladungen gemacht.

57) Anzahl der Kraftlinien für verschiedene Ladungen. Ein Konduktor vom Radius 1 erhalte die Ladung von 12, ein anderer von gleichem Radius die Ladung von 48 elektrischen Einheiten. Teilt man die Oberfläche des einen wie vorher in 128 gleiche

Felder ein, so kommt auf jeden Teil $\frac{12}{128} = \frac{3}{32}$ der Einheitswirkung. Teilt man die Oberfläche des anderen in 512 gleiche Felder ein, so kommt auf jeden Teil $\frac{48}{512} = \frac{3}{32}$ der Einheitswirkung. Die Kraftröhren beider Einteilungen sind demnach potentiell gleichwertig. Also:

Gleichwertigkeit der Kraftröhren bei verschiedenen Ladungen findet statt, wenn ihre Anzahlen den Ladungen proportional sind.

Sollen nun bei der ersten Ladung die Radien der Kugeln so aufeinander folgen, dafs von Kugelfläche zu Kugelfläche die Potentialdifferenz gleich 1 ist, dafs also die Potentialwerte der Reihe

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$$

folgen, so müssen sich die Radien ergeben aus den Potentialwerten

$$\frac{12}{\infty} = 0, \frac{12}{12} = 1, \frac{12}{6} = 2, \frac{12}{4} = 3, \frac{12}{3} = 4, \frac{12}{\left(\frac{12}{5}\right)} = 5, \frac{12}{2} = 6, \ldots$$

als $r = \infty$, 12, 6, 4, 3, 2,4, 2, ... oder als

$$r = \frac{12}{0}, \frac{12}{1}, \frac{12}{2}, \frac{12}{3}, \frac{12}{4}, \frac{12}{5}, \frac{12}{6}, \ldots.$$

Bei der zweiten Ladung dagegen erhält man dieselben Potentialdifferenzen bei den Radien

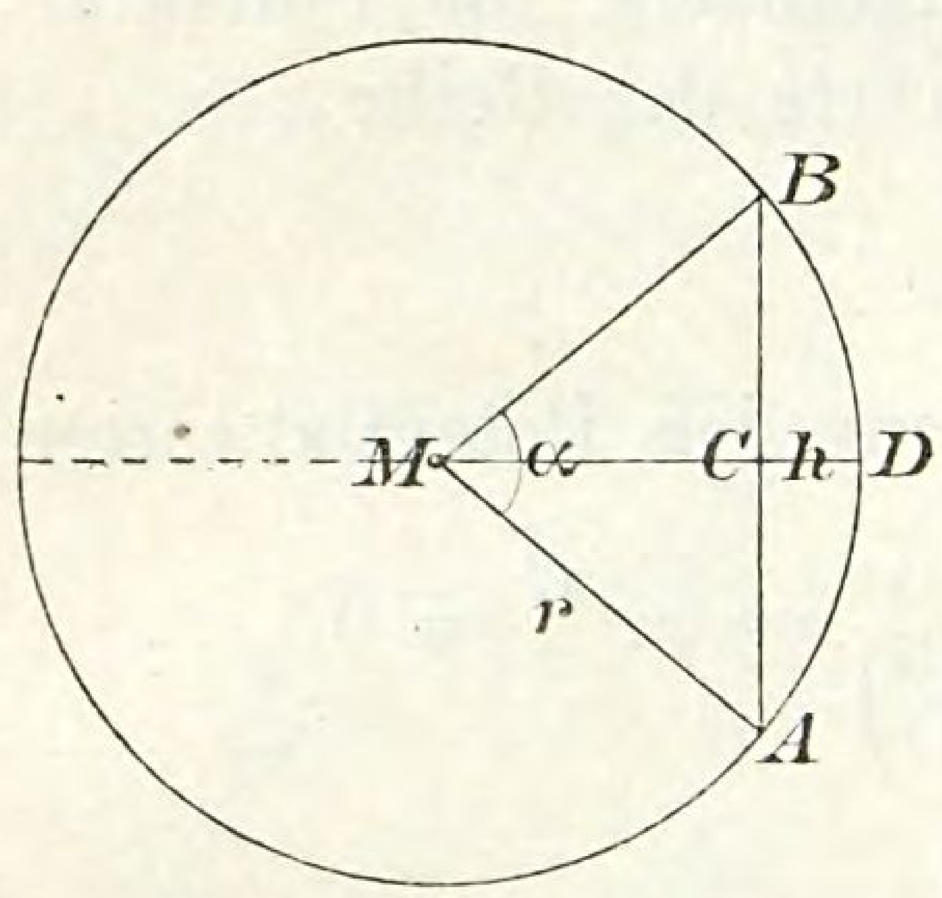
$$r = \frac{48}{0}, \frac{48}{1}, \frac{48}{2}, \frac{48}{3}, \frac{48}{4}, \frac{48}{5}, \frac{48}{6}, \ldots$$

So erhält man für beide Probleme gleichwertige Raumzellen und damit für jedes eine Art von potentiellem Koordinatensystem. Die Arbeit von Fläche zu Fläche ist in beiden Systemen dieselbe, und bei homogener Belegung eines beliebigen Feldes mit Masse übt die Einheit in O bei beiden Problemen dieselbe Anziehung aus.

Man hat sich geeinigt, die Anzahl der von einer Centralmasse m ausgehenden Kraftlinien oder Kraftröhren gleich dem Kraftflusse $4\pi m$ zu setzen, so dafs auf jede der Kraftflufs 1 kommt. Auf jedes Quadratcentimeter einer koncentrischen Kugelfläche kommen dann $\frac{4\pi m}{4 r^2 \pi} = \frac{m}{r^2}$ Kraftröhren, was mit dem Ausdrucke für die Gröfse der Anziehung übereinstimmt und als Feldstärke für die betreffende Stelle bezeichnet wird. Die Kugeloberfläche ist also in $4\pi m$ gleichgrofse Felder eingeteilt zu denken. Die Verdoppelung der Ladung m giebt Verdoppelung der Kraftröhren- und Verdoppelung der Zellenzahl in jeder Röhre. Fafst man die gleichen Zonen der obigen Einteilung als Grundflächen der Pyramiden auf,

und ist ihre Zahl und ebenso die der Kraftröhren z. B. gleich 20, so folgt aus $4\pi m = 20$, dafs man die Centralmasse m als $\frac{20}{4\pi} = 1{,}592$ angenommen hat. Der Kraftflufs in jeder der Röhren ist stets gleich 1, bei Querschnitt F ist er also für jedes Quadratcentimeter gleich $\frac{1}{F}$, bei unserer Zoneneinteilung also $\frac{1}{\frac{4r^2\pi}{20}} = \frac{20}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{m}{r^2}$, was wieder die Feldstärke giebt. Also: Feldstärke gleich Kraftflufs pro Quadratcentimeter Querschnittsfläche.

Fig. 44.



Bisweilen wird die einzelne Kraftröhre auch in Gestalt eines Kreiskegels angenommen. Dies giebt Veranlassung zu folgender

58) **Aufgabe:** Ein Kreiskegel habe im Hauptschnitt den Winkel $AMB = \alpha$ (die Seite MA sei $= r$). Wie grofs ist sein körperlicher Winkel?

Auflösung. Es fragt sich, den wievielten Teil der Kugeloberfläche die Kalotte ADB von Höhe $CD = h$ ausmacht. Ihre Fläche ist gleich $2r\pi h$, also da

$$h = r - MC = r - r\cos\frac{\alpha}{2} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

ist, gleich

$$2r\pi r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2r^2\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

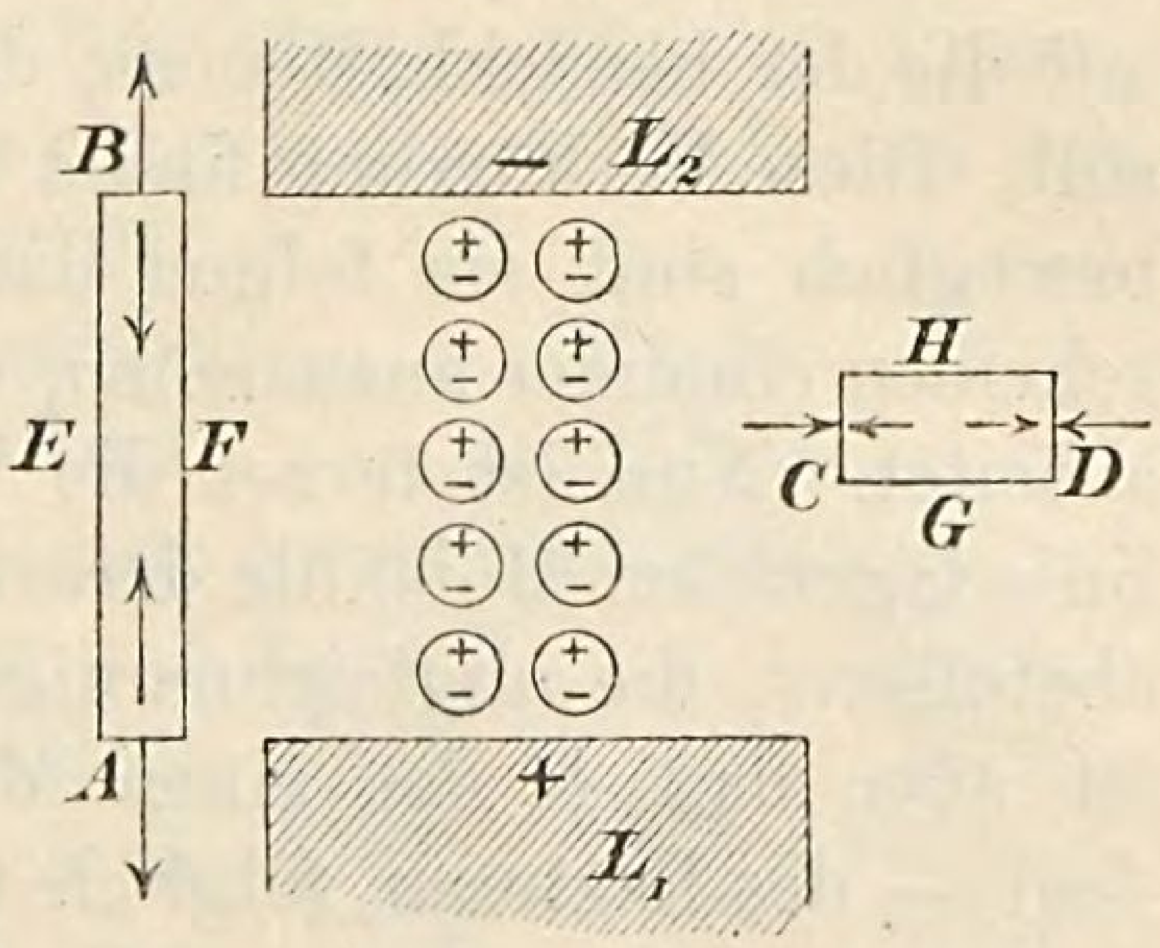
Demnach ist

$$\frac{\text{Kalotte}}{\text{Kugelfläche}} = \frac{2r^2\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4r^2\pi} = \frac{1 - \cos\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Bei dem Monde, der Sonne, dem Jupiter u. s. w. würde α den scheinbaren Durchmesser in Bogengraden (Minuten, Sekunden, ...) bedeuten. Man kann also ausrechnen, den wievielten Teil des scheinbaren Himmelsgewölbes sie bedecken. Bei der Sonne handelt es sich um $\alpha = 32'\,0'',88$. Dagegen nennt man den halben Bogen, unter dem von ihr aus die Erde erscheint, die Sonnenparallaxe. Der ganze Bogen ist etwa das $\frac{1719}{195\,000}$ von α, nach Encke genau $\beta = 16'',14232$. Demnach würde der Bruch $\frac{1 - \cos\frac{\beta}{2}}{2}$ z. B. angeben, der wievielte Teil der Wärmeausstrahlung der Sonne unserer Erde zu gute kommt. Auch hier handelt es sich um die Berechnung eines Kraftflusses.

59) Andeutungen über die Kraftlinien. Früher wurden die Kraftlinien einfach als diejenigen Kurven betrachtet, die das System der Niveauflächen senkrecht durchsetzen. Die Wirkungen von Körper auf Körper wurden einfach als Fernwirkungen aufgefafst. Faraday gab ihnen eine vollständig neue Bedeutung. Er nannte das zwei irgendwie geladene Leiter trennende Mittel isolierender Art, also z. B. die Luft, den leeren Raum, irgend ein Gas u. s. w. das Dielektrikum und behauptete, dafs die in diesem lagernden Moleküle, deren jedes nach Art der latenten Magnetismen beide Arten von Elektrizität in gleichen Mengen hätte, durch jene Ladungen polarisiert und so in einen gewissen Zwangszustand versetzt würde. Ein wirkliches Wandern der Elektrizitäten im Dielektrikum nahm er als unmöglich an, nur eine Art von Induktionsverschiebung innerhalb jedes Moleküls. Die Polarisation dachte er sich also ähnlich, wie sie hypothetisch bei der Magnetisierung eines Stahlstabes eintritt, jedes Teilchen erhält zwei Pole, die in die Richtung der entsprechenden Kraftlinie fallen (vgl. Fig. 45), so dafs in jeder eine Kette von Molekülen sich befindet, der sich die entgegengesetzten Pole zuwenden.

Fig. 45.



In der Figur ist zu denken, dafs zwei gegeneinander isolierte Leiter L_1 und L_2 mit entgegengesetzten Elektrizitäten geladen sind. Zwei Reihen polarisierter Moleküle des Dielektrikums sind eingezeichnet worden. Sofort nach der Ladung tritt in dem Dielektrikum ein Zwangs- oder Spannungszustand ein, der durch eine Analogie veranschaulicht werden kann.

Wird ein Metallstab AB durch gleiche und entgegengesetzte Zugkräfte beansprucht, so verlängert er sich ein wenig, und dann tritt, wenn die der Elastizitätsgrenze entsprechende Beanspruchung nicht überschritten wurde, Gleichgewicht ein. Zwischen den Molekülen sind also Gegenspannungen aufgetreten, die eine weitere Ausdehnung verhindern. Diese Gegenspannungen sind um so stärker, je gröfser innerhalb der genannten Grenze die Beanspruchung und die Verlängerung ist. Hört die Beanspruchung auf, so ziehen die Gegenspannungen die Moleküle des Stabes wieder zusammen, bis er wieder die ursprüngliche Länge hat. Durch die Zugbeanspruchung wird also ein Zwangs- und Spannungszustand hervorgerufen, der in der Figur durch den Stab AB und die eingezeichneten Kräfte veranschaulicht wird.

Entsprechendes findet statt, wenn auf einen kurzen Stab *CD* äufsere Druckkräfte einwirken. Er wird so lange zusammengeprefst, bis die hervorgerufenen Gegenspannungen den Druckkräften das Gleichgewicht halten. Hört die Beanspruchung auf, so treiben die Gegenspannungen die Moleküle wieder auseinander.

Übrigens findet bei der Zugbeanspruchung des Stabes *AB* zugleich eine leise Einschnürung, eine Kontraktion statt, so dafs z. B. bei *EF* zugleich Druckspannungen entstehen, die senkrecht gegen die Zugspannungen gerichtet sind. Ebenso giebt der Druck am Stabe *CD* eine leise Ausdehnung in der Richtung *GH*, so dafs Zug und Druck stets kombiniert auftreten.

Denkt man sich etwa die an L_1 und L_2 grenzenden Moleküle mit ihren Polen dicht an L_1 und L_2 herangezogen, so ist jede Reihe der Moleküle in einen Zustand nach Art der Zugspannung versetzt. Die Elektrizitäten jedes Moleküls wirken nach Art der Gegenspannungen auf die der benachbarten so, dafs eine Verkürzung der Reihe stattfinden soll. Diese Verkürzung findet wirklich statt, sobald die Leiter L_1 und L_2 beweglich sind, sie folgen dann dem Zuge der Gegenspannungen und scheinen einander anzuziehen, während in Wirklichkeit das Dielektrikum arbeitet. Nun ist ferner die Wirkung zweier in derselben Horizontallinie lagernden Moleküle derart, dafs die gleichnamigen Pole aufeinander abstofsend, die ungleichnamigen aufeinander anziehend wirken. Dabei ist aber das + des einen Moleküls dem + des anderen näher, als dem — des letzteren, folglich überwiegt die Abstofsung. Diese kann bei den von einem einzigen Centrum ausstrahlenden geradlinigen Kraftlinien keine Bewegungserscheinungen hervorrufen, weil für sie nur eine einzige homogene Anordnung möglich ist. Wie es sich aber bei mehreren Centren verhält, d. h. wie dort dieser Abstofsung das Gleichgewicht gehalten wird, das soll später bei den allgemeineren Betrachtungen auseinandergesetzt werden. Jede Störung der Anordnung wird nach Entfernung des störenden Einflusses durch die abstofsenden Kräfte wieder aufgehoben.

Der Zwangszustand des elektrischen Feldes ist also derartig, dafs — kurz ausgedrückt — jede Kraftlinie das Bestreben hat, sich zu verkürzen, während benachbarte gleichgerichtete (gleichartig polarisierte) Kraftlinien sich gegenseitig abstofsen.

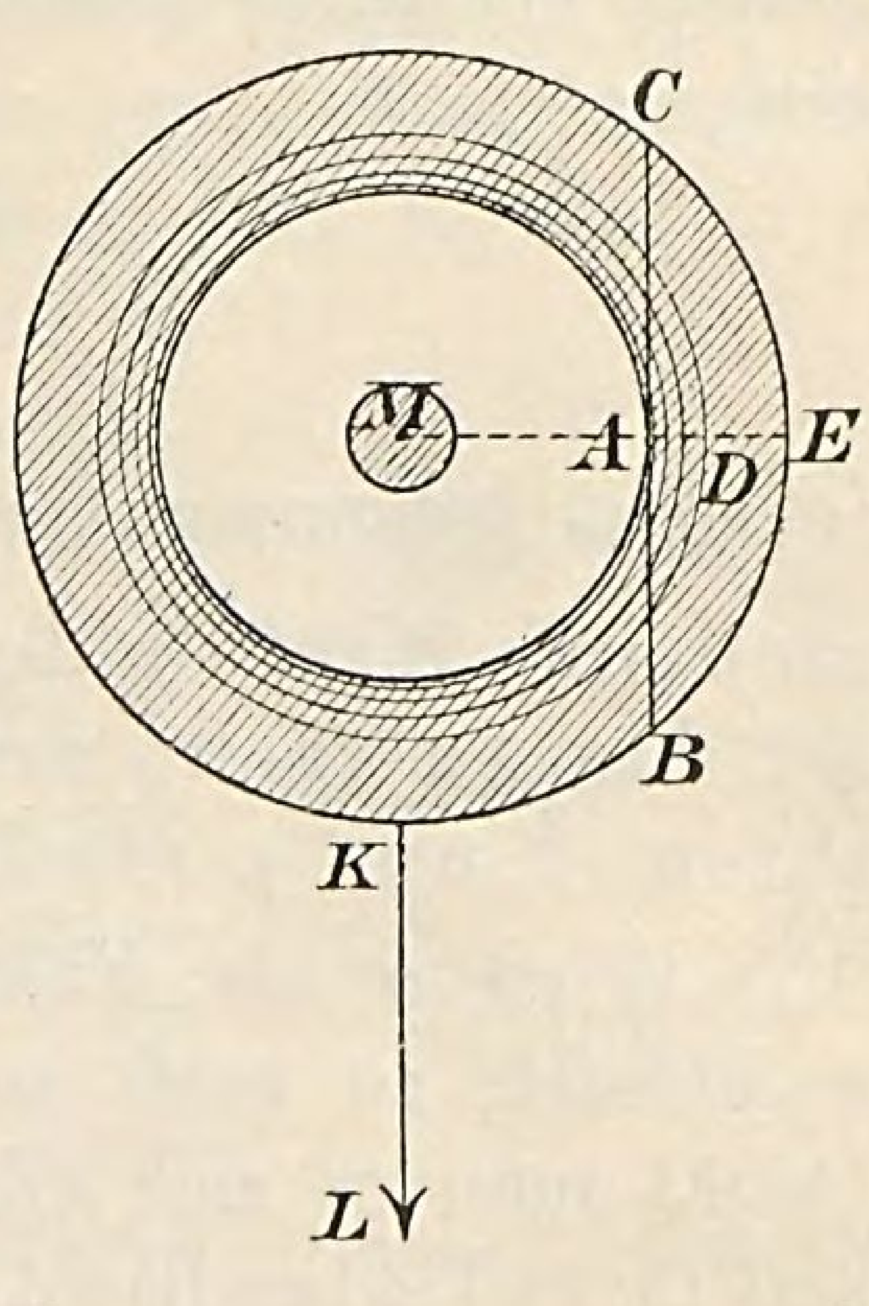
Entfernt man die Ladungen aus L_1 und L_2, so hört der Zwangszustand des elektrischen Feldes auf, und die Elektrizitäten der Moleküle kehren in die ursprüngliche Lage zurück. Anziehung und Influenz z. B. sind daher von der Art des Dielektrikums abhängig. Zu jedem Dielektrikum gehört eine gewisse Dielektrizitätskonstante, über die sich die Lehrbücher näher aussprechen. Vgl. Nr. 68.

Auch der leere Raum ist als Dielektrikum zu betrachten. Als isolierendes Mittel wird in ihm von Maxwell hypothetisch der sogenannte Lichtäther angenommen. Dadurch erklärt er zugleich den eigentümlichen Zusammenhang zwischen den elektrischen und optischen Erscheinungen, z. B. den Einfluſs der elektrischen Spannung auf die Lage der Polarisationsebene doppeltbrechender Krystalle, die Übereinstimmung der Fortleitungsgeschwindigkeiten, was schlieſslich auf die von ihm aufgestellte elektromagnetische Theorie des Lichtes führte, die auch von Helmholtz bearbeitet worden ist.

Auf die Gestalt der Kraftlinien für schwierigere Probleme gehen also erst die folgenden Kapitel ein. Jetzt sollen Influenzprobleme über die Kugel bezw. die Kugelschale nebst dazugehörigen Erscheinungen besprochen werden.

60) Centrische Influenz eines Konduktors auf eine homogene koncentrische Hohlkugel, die zur Erde abgeleitet ist.

Fig. 46.



Man denke sich im Mittelpunkte einer aus leitendem Material bestehenden koncentrischen Hohlkugel, die durch einen Draht KL mit der Erde in Verbindung steht, einen kleinen kugelförmigen Konduktor angebracht, der auf irgend eine Art mit der positiv elektrischen Menge $+E$ geladen wird (z. B. durch einen Draht, der isoliert durch eine Öffnung der Kugel tritt, zu vermitteln). Sobald die Ladung geschehen ist, tritt folgendes ein. Jedes Molekül der Hohlkugel enthält ursprünglich beide Arten von Elektrizität in gleichen Mengen, deren Wirkungen sich bisher aufhoben. Jetzt wird die negative nach M hingezogen, die positive abgestoſsen, und zwar flieſst die letztere zur Erde ab, während die erstere sich in homogener Anordnung an der Innenwand ansammelt. Wie lange dauert dieser Prozeſs an? So lange, bis die an der Innenwand angesammelte negative Influenzelektrizität (Infl. El. 1. Art) die Wirkung des Konduktors auf die Elektrizitäten der Schale aufhebt. Nun wirkt der Konduktor dorthin mit der Kraft $\frac{E}{r^2}$, die Influenzelektrizität $-E_1$ mit der Kraft $-\frac{E_1}{r^2}$, es muſs also $\frac{E}{r^2} - \frac{E_1}{r^2} = 0$, d. h. $E = E_1$ sein. Die Menge der Influenzelektrizität erster Art ist also gleich der Ladung des Konduktors. Ebenso groſs ist die Menge der zur Erde abgeflossenen Influenzelektrizität zweiter Art.

Weil nach Vollendung der Scheidung Ruhe herrscht, ist im Metall der Schale das Potential konstant. Dasselbe Potential mufs aus demselben Grunde in dem Drahte und der mit ihr in Verbindung stehenden Erde, oder wenn der Draht bis in unendliche Entfernung reicht, in dem unendlich fernen Bereiche herrschen.

Wie man beim Thermometer einen willkürlichen Nullpunkt annimmt, so kann man auch bei der Zählung der Potentialwerte einen solchen Nullpunkt willkürlich wählen. Man pflegt das Potential der Erde gleich Null zu setzen. Weil jetzt dort das Potential gleich Null ist, mufs es auch im Metall der Kugel gleich Null sein, ebenso auch im Aufsenraume der Kugel, wenn sich dort nichts Störendes befindet. Die mittlere Dichte der Influenzelektrizität ist $\delta = -\frac{E_1}{4\varrho_1^2\pi}$, wenn ϱ_1 der innere Radius der Hohlkugel ist, und zwar ist $E_1 = E$, d. h. auf der Flächeneinheit befindet sich die Elektrizitätsmenge $\delta = -\frac{E}{4\varrho_1^2\pi}$.
Nun wirkt aber die $+E$ des inneren Konduktors auf die Einheit der Menge der Influenzelektrizität mit der Kraft $p = \frac{E}{\varrho_1^2}$, zugleich ist nach obigem

$$4\pi\delta = \frac{E}{\varrho_1^2}$$

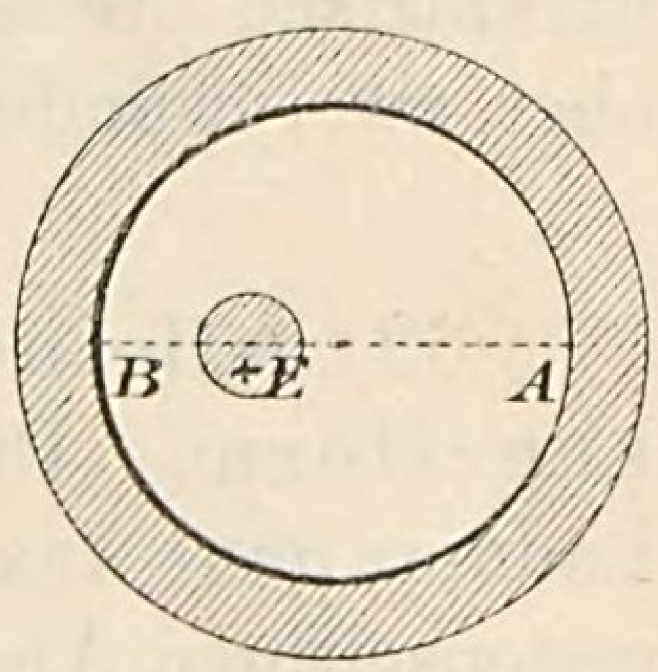
(absolut genommen), also ist $p = 4\pi\delta$, oder $\delta = \frac{p}{4\pi}$, d. h. die anziehende Kraft p des Konduktors auf die elektrische Einheit ist das 4π-fache der mittleren Dichte der Influenzelektrizitäten, δ und p sind also proportionale Gröfsen.

Wird δ als Flächenbelegung betrachtet, also zweidimensional aufgefafst, so mufs es aus Symmetriegründen überall konstant sein. Denkt man es sich allerdings räumlich aufgelagert, so ist die Dichtigkeit in radialer Richtung verschieden. Betrachtet man z. B. in Fig. 46 eine Masseneinheit A der innersten Lage, so ergiebt sich, dafs dieses Teilchen von M mit der Kraft $p = \frac{m_1}{\varrho_1^2}$ nach links gezogen wird. Aufserdem wird es mit irgend einer Kraft q_l nach rechts abgestofsen, nämlich von aller links von der Tangentialebene BC liegenden Influenzelektrizität, dagegen mit einer Kraft q_r nach links von der rechts von BC lagernden Influenzelektrizität. Der Druck ist also von der Gröfse $p - (q_l - q_r)$. Nun ist aber $(q_l - q_r) = 0$ (nach dem Gesetze der Hohlkugel), demnach ist der Druck gleich $p = \frac{E}{\varrho_1^2}$. Dagegen wird die äufserste Schicht D von zwei Kräften nach links und rechts

gepreſst, von $p = \frac{E}{\varrho_1^2}$ und von $q = \frac{-E}{\varrho_1^2}$, wobei ϱ_1 fast dasselbe ist, wie vorher. Beide Kräfte heben sich auf, der Druck bei D ist also Null. In radialer Richtung also nimmt der Druck schnell von p zu Null ab. Entsprechendes muſs mit der Dichte geschehen, so daſs das obige δ nur eine mittlere Dichte war. Die räumlich aufgefaſste elektrische Einheit von Höhe AD wird also nur von einem zwischen p und 0 liegenden Drucke gegen die Wand gedrückt. Nimmt man bei der unendlich geringen Dicke der Schicht das Mittel an, so ist an Stelle des Druckes $p = 4\pi\delta$ die Hälfte $2\pi\delta$ zu setzen. Da ferner δ die Menge pro Flächeneinheit ist, so wirkt auf der Flächeneinheit der Druck $2\pi\delta \cdot \delta = 2\pi\delta^2$, den man als die Oberflächenspannung bezeichnet. Die Oberflächenspannung ist also proportional dem Quadrate der Dichte oder auch proportional dem Produkte aus p und δ, oder dem Quadrate von p. Auf die graphische Darstellung des Potentials kommen wir in Nr. 72 zurück.

61) Vorläufige Bemerkung über die excentrische Lage des Konduktors. Die Ruhelage ist nur dadurch möglich, daſs die an jedem Teilchen der Influenzelektrizität wirkende Kraftresultante senkrecht gegen die Fläche steht. Bringt man den Konduktor in excentrische Lage, so wirkt er am stärksten auf B, am schwächsten auf A, auf diese Stellen senkrecht, auf alle anderen schräg, folglich treten sofort Verschiebungen auf. Später soll gezeigt werden, daſs dann die Dichtigkeit der Influenzelektrizität umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung des Mittelpunktes des klein zu denkenden Konduktors $+E$ von der Innenfläche der Hohlkugel ist. Dies stimmt mit dem Störungsgesetz überein (dritte Potenzen der umgekehrten Entfernung). Ruhe tritt nämlich erst dann ein, wenn wieder alle Resultanten, die an den Influenzteilchen wirken, senkrecht gegen die Innenfläche stehen.

Fig. 47.



Nun könnte ja der Fall eintreten, daſs $+E$ bei dieser neuen Lage mehr Influenzelektrizität festhalten könnte, oder daſs es einen Teil loslassen müſste. Daſs dies nicht der Fall sein wird, läſst sich schon hier zeigen. Wiederum muſs im Metall der Hohlkugel auſserhalb der Belegung das Potential Null herrschen, d. h. die Wirkungen beider Elektrizitäten nach auſsen heben einander auf. Für gröſsere Entfernungen aber ist es gleichgültig, ob man sich ihre Teilchen so, wie augenblicklich, oder in einem einzigen Punkte koncentriert denkt, denn es ist, wenn e die gröſste der dazu nötigen Verschiebungen

bedeutet, $\frac{1}{(r+e)^2} = \frac{1}{r^2\left(1+\frac{e}{r}\right)^2}$. Ist nun $\frac{e}{r}$ sehr klein, z. B. gleich $\frac{1}{10^6}$, so geht der Ausdruck über in

$$\frac{1}{r^2\left(1+\frac{2}{10^6}+\frac{1}{10^{12}}\right)} = \frac{1}{r^2[1{,}000\,002\,000\,001]},$$

so daſs man bei einer Genauigkeit auf 5 Stellen $\frac{1}{r^2}$ dafür schreiben darf. Die endliche Entfernung e kommt also gegen r gar nicht in Betracht. Wäre nun die Menge $-E_1$ verschieden von der Menge $+E$, so würde in jener Entfernung das Potential gleich $\frac{E-E_1}{r^2}$ sein. Es ist aber gleich Null, also müssen beide Mengen gleich sein. Der Schluſs wird um so zwingender, weil er für jede beliebige Stelle des Raumes gilt. Also auch bei excentrischer Lage ist die Menge der Influenzelektrizität erster Art gleich der der Ladung des Konduktors. Dieses Problem kommt später noch einmal zur Sprache. Dort wird sich zeigen, daſs der Mittelpunkt des kleinen Konduktors der Schwerpunkt für die Teilchen der Influenzelektrizität ist.

Angenommen, die Erde sei eine koncentrische Hohlkugel, in der sich ein solcher Kernkörper befindet, so würden die Tiefenverhältnisse des Oceans sich in ähnlicher Weise ändern, wenn der Kernkörper excentrisch festgelegt würde. Ein dort kreisender Mond würde aber zwei wandernde Flutberge erzeugen.

62) Alleinige Ladung des Leiters von Kugel- oder Hohlkugelform. Die Verbindung mit der Erde werde aufgehoben, die Ladung ganz aus der Mitte entfernt, was wird geschehen? Infolge der gegenseitigen Abstoſsungen sprühen die Teilchen der Influenzelektrizität auseinander. Sie würden nach der Erde abflieſsen, wenn die Verbindung noch da wäre. So aber können sie nur bis zur Oberfläche der Kugel flieſsen, wo sie sich so anordnen müssen, daſs alle Resultanten senkrecht gegen diese Fläche gerichtet sind. Dies ist nur möglich bei gleichmäſsiger Verteilung. Die mittlere Dichte wird $\delta = \frac{E}{4\varrho_2^2\pi}$, wo E die Ladung, ϱ_2 der äuſsere Radius ist. Die äuſsersten Schichten werden pro Masseneinheit mit der Kraft $p = \frac{E}{\varrho_2^2}$ abgestoſsen, die innersten wieder mit Null, beides nach den Gesetzen der Hohlkugel, der Mitteldruck kann als $\frac{p}{2}$ angenommen werden. Auf die Flächeneinheit, wo die Masse δ lagert, hat man also den Druck $\frac{p}{2}\delta$, oder

da $p = 4\pi\delta$ ist, den Druck $2\pi\delta^2$, der wieder als Oberflächenspannung bezeichnet wird. Ist die Kugel massiv, so gilt von einer auf sie gebrachten elektrischen Ladung dasselbe.

63) Centrische Influenz auf die isolierte Hohlkugel. Der in M liegende Konduktor sei mit $+E$ geladen, die Influenz tritt auf der nicht abgeleiteten Hohlkugel ein und schafft $-E_1$ an die Innenfläche, ebenso viel $+E_2$ an die Aufsenfläche. Die Dichte wird auf jeder Fläche überall gleichmäfsig, aufsen natürlich kleiner als innen, dabei übt $+E_2$ nach innen die Wirkung Null aus (Kugelschale), $+E$ und $-E_1$ üben, da Gleichgewicht herrscht, auf die Punkte des Metalls aufserhalb der inneren Belegung beim Ruhezustande auch die Wirkung Null aus, und da diese Wirkung gleich $\frac{E}{r^2} - \frac{E_1}{r^2}$ ist, so mufs $+E = +E_1$ und nun ebenso $+E = +E_2$ sein. Folglich:

Aufserhalb der Hohlkugel ist das Potential gleich

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} + \frac{E_2}{r} = \frac{E}{r},$$

also so grofs, als ob nur die innerste, oder nur die äufserste der drei Elektrizitäten da wäre.

Im Metall der Hohlkugel ist das Potential

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} + \frac{E}{\varrho_2} = \frac{E}{\varrho_2}.$$

Zwischen Konduktor und Hohlkugel ist das Potential gleich

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{\varrho_1} + \frac{E}{\varrho_2} = E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right);$$

im Innern des Konduktors ist es gleich

$$\frac{E}{\varrho} - \frac{E_1}{\varrho_1} + \frac{E}{\varrho_2} = E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Die Radien sind der Gröfse nach gleich ϱ, ϱ_1, ϱ_2 gesetzt.

Bringt man den Konduktor in excentrische Lage, so wirken $+E$ und $-E_1$ auf das Metall der Hohlkugel wieder mit der Kraft Null, die äufsere Elektrizität $+E_1$ ordnet sich also so an, als ob die beiden andern nicht da wären. Dieser Fall kommt noch genauer zur Sprache, da er auf die interessante Theorie der centrobarischen Körper führt.

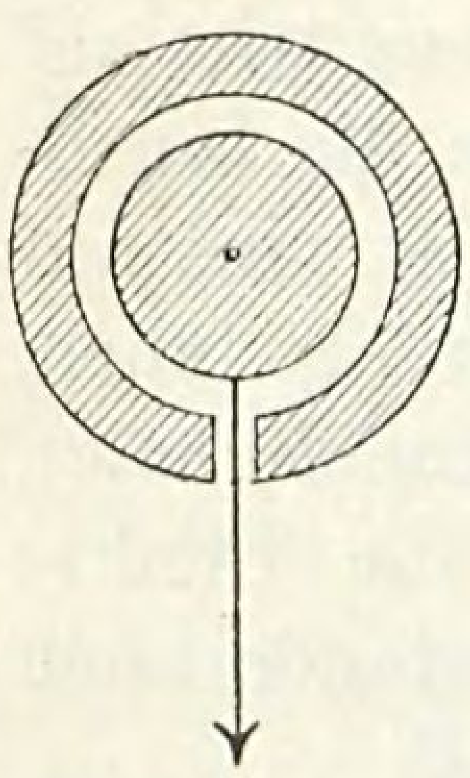
Leitet man die Schale ab, so ist das Potential innerhalb des Kernes gleich

$$E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\,\varrho_1}.$$

64) Die innere Kugel sei nach der Erde abgeleitet. Die Radien seien der Reihe nach ϱ, ϱ_1 und ϱ_2, die Ladung der Aufsen-

schale sei $+E$. Durch die Verbindung mit der Erde herrsche im Innern des Kerns das Potential Null. Die Ladung $+E$ sammelt sich an der Innenwand der Schale, die Influenzelektrizität $-E_1$ an der Aufsenwand des Kerns an. Da aber im Innern des letzteren $\frac{E}{\varrho_1} - \frac{E_1}{\varrho} = 0$ sein mufs, ist jetzt $E_1 = \frac{\varrho}{\varrho_1} E$. Die Influenzelektrizität ist also von geringerer Menge, als die Ladungselektrizität, und zwar ist das Verhältnis der Radien mafsgebend. Für äufsere Punkte wird das Potential gleich

Fig. 48.



$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} = \frac{E}{r} - \frac{\varrho}{\varrho_1} E \cdot \frac{1}{r} = \frac{E}{r} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}.$$

Bei den besprochenen Influenzproblemen enthält das Dielektrikum nur da Kraftröhren, wo das Potential veränderlich ist. Stimmen $+E$ und $-E_1$ in der Menge überein, und ist E_2 abgeleitet, so befinden sich sämtliche Kraftröhren zwischen den beiden Leitern. Sind wie im letzten Falle die Mengen verschieden, so geht der von der gröfseren Menge herrührende Überschufs von Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche. Entsprechendes findet bei den später zu behandelnden Mehrpunktproblemen statt. An den beiden Enden jeder Kraftlinie sind also stets gleiche Mengen von Elektrizität aufgespeichert.

65) **Aufgabe.** Für den Fall koncentrischer Kugelschalen, von denen die eine abgeleitet ist, soll die potentielle Energie der Ladung berechnet werden.

a) Die Schale sei leitend mit der Erde verbunden, der Kern mit E geladen, so dafs $E_1 = E$ ist.

Um die Einheit positiver Elektrizität aus unendlicher Entfernung nach dem Kern zu bringen, braucht man, nachdem er mit E geladen ist, bis an die Innenbelegung $-E_1$ der Schale die Arbeit Null. Von dort bis zum Rande des Kernes steigt der Potentialwert auf $\frac{E}{\varrho} - \frac{E_1}{\varrho_1} = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1}$. Im Anfang war dazu nur die Arbeit Null nötig. Da die Arbeit proportional E ist, ist der Mittelwert für die nötige Arbeit gleich $E\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho\varrho_1}$. Um jedoch nicht die Einheit, sondern die Ladung $+E$ nach dem Kern zu schaffen, ist die Efache Arbeit nötig, die geleistete Arbeit ist also

$$\text{Energie} = E^2\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho\varrho_1}.$$

Sie ist proportional dem Quadrate der Ladung und dem Quotienten aus der Differenz und dem Produkte der inneren Radien. Das Potential innerhalb des Kerns war nach Nr. 63

$$V = E \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho \varrho_1},$$

also ist

$$E = V \frac{\varrho \varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}$$

und daher

$$\text{Energie} = E^2 \frac{\varrho_1 - \varrho}{2 \varrho \varrho_1} = V^2 \frac{\varrho^2 \varrho_1^2}{(\varrho_1 - \varrho)^2} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho}{2 \varrho \varrho_1} = V^2 \frac{\varrho \varrho_1}{2(\varrho_1 - \varrho)}.$$

Demnach ist die aufgespeicherte Energie auch proportional dem Quadrate des Potentials im Innern des Kerns.

b) Der Kern sei leitend mit der Erde verbunden. In diesem Falle ist das Potential auf der Kugelschale gleich $\frac{E}{\varrho_2} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}$, also, wenn sie sehr dünn ist, gleich $E \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1^2}$. Daraus folgt als Energie ähnlich, wie vorher, durch Multiplikation des halben Endwertes mit E,

$$E^2 \frac{\varrho_1 - \varrho}{2 \varrho_1^2} \quad \text{oder} \quad V^2 \frac{\varrho_1^2}{2(\varrho_1 - \varrho)}.$$

66) Begriff der Kapazität. Den Quotienten aus Ladung und Potential eines Leiters bezeichnet man als seine Kapazität, also $K = \frac{E}{V}$. Nun ist aber E dividiert durch V die auf die Einheit des Potentials reduzierte Ladung. Folglich:

Unter Kapazität eines Leiters versteht man diejenige elektrische Ladung, die nötig ist, um sein Potential um 1 zu erhöhen, also z. B. von 0 auf 1 zu bringen.

(Die Definition gilt vorläufig nur von der Kugelgestalt, denn für allgemeinere Gestalten mufs erst nachgewiesen werden, dafs das Potential proportional der Ladung, also die Kapazität bei fortgesetzter Ladung dieselbe ist. Bei der Kugel ist es der Fall.)

Für die allein im Raume befindlichen Leiter von der Gestalt einer Kugel oder Kugelschale ist

$$K = \frac{E}{\left(\frac{E}{\varrho}\right)} = \varrho,$$

sie ist also gleich dem Radius der Kugel oder Kugelschale, möge das Material des Leiters sein, welches es wolle.

Ist die Ladung = 1 (z. B. in Coulomb), das Pontential = 1 (z. B. in Volt), so ist die Kapazität = 1 (im Beispiel gleich ein Farad), zugleich bei der Kugel der Radius = 1 cm. Über diese Einheiten vergl. Anhang.

Setzt man den Radius der Erde gleich $6{,}37 \cdot 10^8$ cm (der Äquatorradius ist gleich 6 377 397 m, der Polradius gleich 6 356 079 m), so folgt, dafs die Kapazität gleich $6{,}37 \cdot 10^8$ ist, d. h. $6{,}37 \cdot 10^8$ mal so grofs, als die Kapazität einer Kugel vom Radius 1 cm. Mit andern Worten, um das Potential des Erdballes von 0 auf 1 Volt zu bringen, ist eine Ladung von 637 000 000 Coulomb nötig.

67) Einflufs benachbarter Leiter auf die Kapazität.

Ganz anders aber wird es, wenn der kugelförmige Leiter nicht allein im Raume ist. Ist er z. B. von einer abgeleiteten Kugelschale umschlossen, so ist nach obigem das Potential $V = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1}$, also die Kapazität

$$K = \frac{E}{V} = \frac{\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho},$$

also wenn ϱ_1 sehr wenig von ϱ verschieden ist,

$$K = \frac{\varrho^2}{\varrho_1 - \varrho} = \frac{4\varrho^2\pi}{4(\varrho_1 - \varrho)} = \frac{O}{4(\varrho_1 - \varrho)}.$$

Die Kapazität ist also jetzt proportional der Oberfläche des Kerns und umgekehrt proportional der Differenz der Radien, d. h. der Dicke der isolierenden Schicht.

Die Arbeit des Ladens mit einer elektrischen Einheit ist eben jetzt nur $E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$, während sie vorher $E\frac{1}{\varrho}$ war. Man kann also mit weit geringerem Aufwande von Arbeit eine grofse Menge elektrischer Energie im Kerne aufspeichern.

Dies ist, von der besonderen Gestalt abgesehen, der Fall der Leydener Flasche und überhaupt jedes sogenannten Kondensators oder Verstärkungsapparats. Bei der Entladung kommt diese Energie (abgesehen vom elektrischen Rückstande) wieder zur Erscheinung, sei es als Licht-, Wärme- und Schallerscheinung des elektrischen Funkens, oder als mechanische Arbeit desselben beim Durchschlagen von Nichtleitern, als Erwärmung des Drahtes u. s. w.

Entsprechendes gilt von dem Falle, dafs der Kern mit der Erde leitend verbunden ist. Ist dagegen keine Ableitung zur Erde vorhanden, so handelt es sich um dieselbe Arbeit, wie bei der allein im Raume befindlichen Kugel, denn die Wirkungen von $-E_1$ und $+E_2$ heben sich nach aufsen auf, so dafs die von $+E$ voll zu überwinden ist.

Handelt es sich nicht um einen umschliefsenden, sondern um einen benachbarten Leiter, so braucht letzterer nicht abgeleitet zu sein, und er kann, wie sich später zeigen wird, doch die Kapazität der Kugel vergröfsern.

Man kann die Kapazität einer Leydener Flasche dadurch verstärken, dafs man die Oberfläche des Kerns sehr grofs und die Glas-

stärke sehr klein macht. Die Oberfläche läfst sich auch durch Kombinieren mehrerer Flaschen zu einer Batterie erheblich verstärken. Darüber soll später gesprochen werden.

68) Die Dielektrizitätskonstante eines isolierenden Mittels. Auch die Umgebung, d. h. das isolierende Mittel, ist auf die Kapazität von Einflufs. Ist z. B. eine Kugel von $\varrho = 1$ cm von Luft umgeben, so erhält sie durch die Ladung 1 Coulomb das Potential 1 Volt. Ist aber die Umgebung z. B. Schwefelkohlenstoff, so bringt die Ladung 1 Coulomb nur das Potential $\frac{1}{1{,}8}$ Volt hervor, die Kapazität ist also die 1,8 fache, die Energie der Ladung die $\frac{1}{1{,}8}$ fache. Diese Zahl nennt man die Dielektrizitäts-Konstante oder das spezifische Induktionsvermögen des Schwefelkohlenstoffs. Sie ist insofern wichtig, als auf einem benachbarten Leiter auch die 1,8 fache Menge von Influenzelektrizität hervorgerufen wird, wenn die Umgebung Schwefelkohlenstoff ist. An den elektrischen Vorgängen sind also die isolierenden Mittel, die Dielektrika, wesentlich beteiligt. Dies war einer der Ausgangspunkte für die Faraday-Maxwellschen Theorien.

Die elektrische Kapazität ist ganz analog der Wärmekapazität oder der spezifischen Wärme. Trotzdem besteht nach obigem ein grofser Unterschied. Die Kapazität bezüglich der Wärme ist nur vom Stoff abhängig, um den es sich handelt; die elektrische Kapazität dagegen ist unabhängig vom Stoff des Leiters, dagegen abhängig vom Stoff des isolierenden Mittels, aufserdem abhängig von der Form und Gröfse des Leiters, ebenso von der Nachbarschaft isolierter oder abgeleiteter Leiter. — Wird in folgendem nichts Besondere gesagt, so ist stets Luft als isolierendes Mittel angenommen.

69) Dichtigkeit der Ladungen auf einem System verbundener Kugeln.

Ladet man ein System von Kugeln, die durch sehr dünne Drähte miteinander verbunden und so weit voneinander entfernt sind, dafs keine wesentlichen Influenzwirkungen entstehen, so tritt folgendes ein. Nach Eintritt des Ruhezustandes ist das Potential innerhalb des ganzen Systems konstant gleich V. Für zwei Kugeln folgt bezüglich der Kapazität $K_1 = \frac{L_1}{V}$, $K_2 = \frac{L_2}{V}$, folglich $\frac{K_1}{K_2} = \frac{L_1}{L_2}$, d. h. die Ladungen der beiden Kugeln sind proportional ihren Kapazitäten. Nun ist aber nach obigem $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, es folgt also $\frac{L_1}{L_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, d. h. die Ladungen der beiden Kugeln verhalten sich wie ihre Radien. Nun sind aber die Dichtigkeiten $\delta_1 = \frac{L_1}{4\,\varrho_1^2 \pi}$, $\delta_2 = \frac{L_2}{4\,\varrho_2^2 \pi}$, folglich ist

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

folglich:

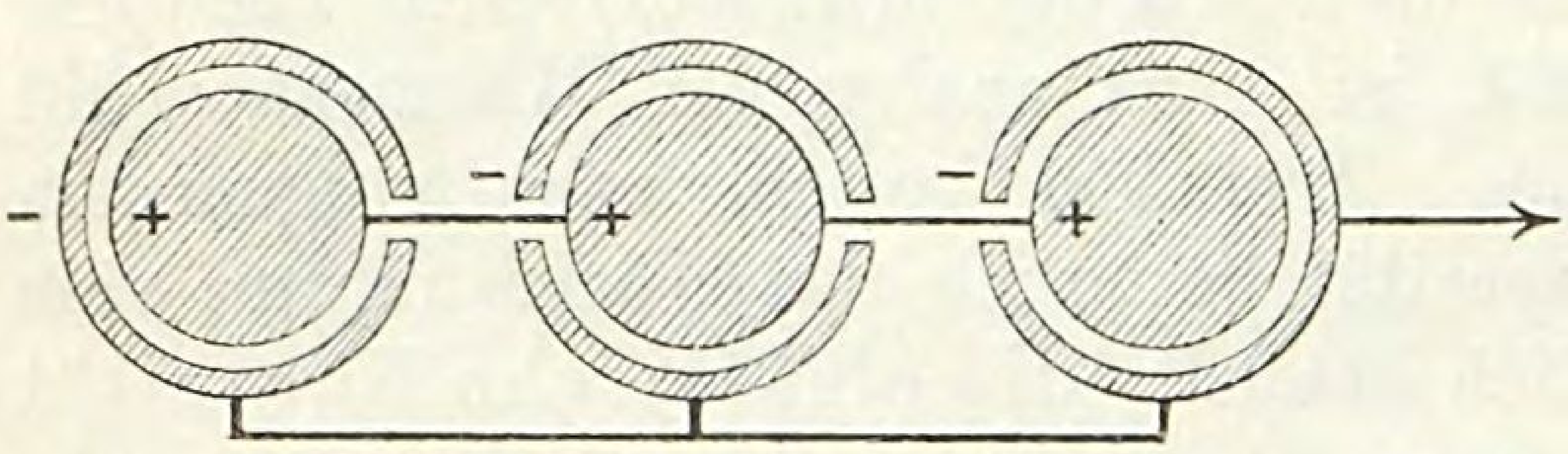
Die Dichtigkeiten der Ladungen verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Ist eine der Kugeln sehr klein, so wird die Dichtigkeit δ und damit die Oberflächenspannung $2\pi\delta^2$ so grofs, dafs die bekannte büschelförmige Ausstrahlung eintritt, die naturgemäfs bei Spitzen am stärksten hervortreten wird. Mit feineren Hülfsmitteln läfst sich beweisen, dafs bei Ladung eines beliebig gestalteten Konduktors die Dichte der Belegung umgekehrt proportional dem Krümmungsradius ist.

70) Batterie Leydener Flaschen, nebeneinander geschaltet.

Mehrere kugelförmige Leydener Flaschen vom Innenradius r und Aufsenradius ϱ und von der Glasdicke $d = \varrho - r$ mögen so verbunden werden, dafs alle Kerne unter sich und alle Schalen unter sich kommunizieren. Die letzte Schale sei nach der Erde abgeleitet. Befindet sich auf jedem Kerne die Ladung $+E$, so ist die Gesamtladung gleich nE. Das Potential der abgeleiteten Schalen ist Null. Das Potential jedes Kernes ist

Fig. 49.



$$V = \frac{E}{r} - \frac{E_1}{\varrho} = E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) = E\frac{\varrho - r}{r\varrho} = \frac{Ed}{r\varrho}.$$

Liegen nämlich die Flaschen so weit auseinander, dafs man von der Influenzwirkung der einen auf die anderen absehen kann, so darf man wie früher E_1 absolut gleich E setzen. Der Draht ist so dünn zu denken, dafs die auf ihm befindliche Elektrizität aufser Acht bleiben kann. Aus $V = \frac{Ed}{r\varrho}$ folgt $E = \frac{Vr\varrho}{d}$, also ist die Gesamtladung gleich

$$nE = \frac{nVr\varrho}{d}.$$

Die Energie der Ladung jedes Kernes ist gleich

$$E^2 \cdot \frac{\varrho - r}{2\varrho r} = \frac{E^2 d}{2\varrho r},$$

also die gesamte Energie gleich $n\frac{E^2 d}{2\varrho r}$ oder auch gleich

$$\frac{n}{2}\cdot\frac{V^2r^2\varrho^2}{d^2}\cdot\frac{d}{\varrho r}=\frac{n}{2}\frac{V^2r\varrho}{d}.$$

Die Energie der Ladung ist also proportional dem Quadrate der Ladung oder auch dem Quadrate des Potentials.

Sie ist aber auch abhängig von $r\varrho$ und d. Ist d sehr klein gegen r und ϱ, so kann man $r\varrho = r(r + d) = r^2 + rd$ gleich r^2 setzen $\left[r\varrho = r^2\left(1+\frac{d}{r}\right) = r^2 \text{ für } \frac{d}{r} = o\right]$. Dann ist die Energie gleich

$$nE^2\frac{d}{2r^2}=\frac{2nE^2d\pi}{4r^2\pi}=\frac{2nE^2d\pi}{O}$$

$$\text{bezw. } \frac{nV^2r^2}{2d}=\frac{4nV^2r^2\pi}{8\pi d}=\frac{nV^2O}{8\pi d},$$

wo O die Oberfläche ist. Stimmen demnach in zwei Fällen die Ladungen überein, so ist die Energie proportional der Glasdicke d und umgekehrt proportional der Fläche der inneren Kugelschalen. Ist dagegen das Potential in zwei Fällen dasselbe, so ist die Energie proportional der Oberfläche nO und umgekehrt proportional der Glasdicke.

Die Kapazität ist gleich

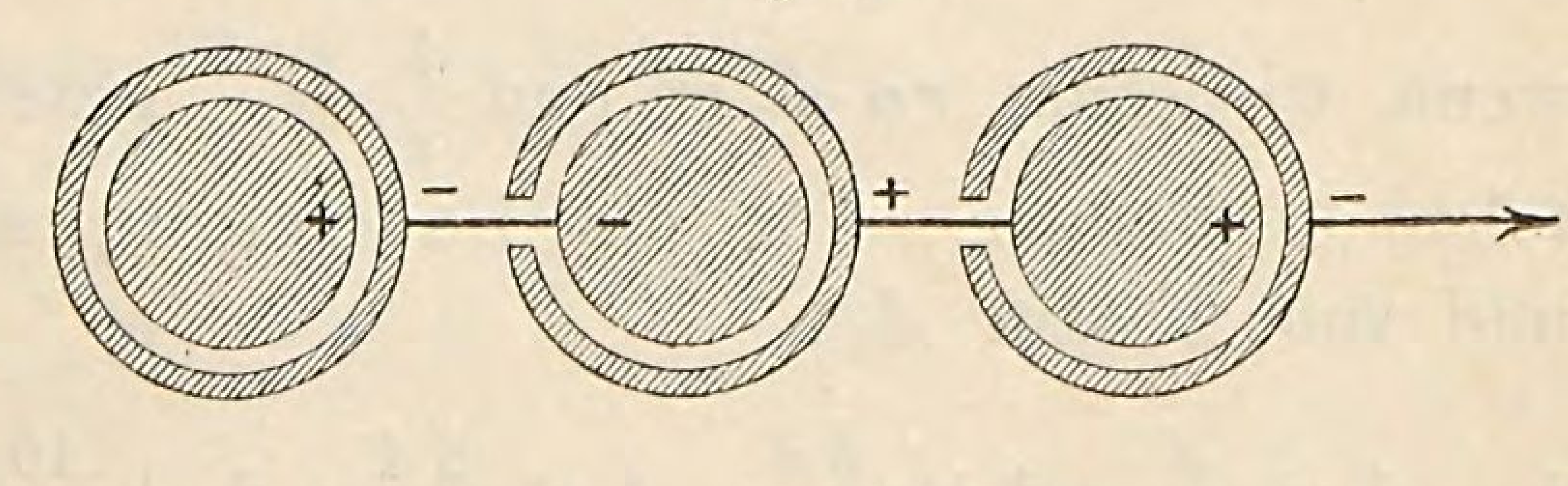
$$\frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}}=\frac{nE}{\left(\frac{Ed}{r\varrho}\right)}=\frac{nr\varrho}{d},$$

also das nfache der Kapazität einer einzelnen Flasche.

71) Batterie Leydener Flaschen, nacheinander geschaltet. (Franklinsche oder Kaskaden-Batterie.)

Alle inneren Radien seien gleich r, alle äufseren gleich ϱ, die Innenladungen seien $J_1, J_2, J_3 \ldots$, alle äufseren $-A_1, -A_2, -A_3, \ldots$, die Innenpotentiale $V_1, V_2, V_3, \ldots$, die Aufsenpotentiale $U_1, U_2, U_3, \ldots$ Jede Schale sei mit dem benachbarten Kern, die eine Schale mit der Erde verbunden. Die Glasdicke sei wieder d. Die nach Ladung der ersten Kugel mit J_1 sich bildenden Influenzelektrizitäten sind, da bei der Scheidung jedesmal gleiche Mengen sich trennen, paarweise gleich, also $-A_1 = -J_2$, $-A_2 = -J_3, \ldots, -A_{n-1} = -J_n$. Der Verbindungen wegen sind ebenso je zwei Potentiale einander gleich. $U_1 = V_2$, $U_2 = V_3$, $\ldots, U_{n-1} = V_n$, nur das letzte U_n ist gleich Null, weil die Schale

Fig. 50.



mit der Erde verbunden ist. Von dort werde angefangen. Zunächst ist absolut genommen $A_{n-1} = J_n = A_n$, und $U_n = 0$. Dagegen

$$V_n = \frac{J_n}{r} - \frac{A_n}{\varrho} = A_n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) = A_n\frac{\varrho - r}{r\varrho} = A_n\frac{d}{r\varrho}.$$

Ebenso grofs ist U_{n-1}. Aus

$$U_{n-1} = \frac{J_{n-1}}{\varrho} - \frac{A_{n-1}}{\varrho}$$

folgt

$$J_{n-1} = \varrho\, U_{n-1} + A_{n-1} = \varrho A_n \frac{d}{r\varrho} + A_n = A_n\left(1 + \frac{d}{r}\right).$$

Ebenso grofs ist absolut genommen A_{n-2}. Es folgt

$$V_{n-1} = \frac{J_{n-1}}{r} - \frac{A_{n-1}}{\varrho} = \frac{A_n}{r}\left(1 + \frac{d}{r}\right) - \frac{A_n}{\varrho} = A_n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{d}{r^2}\right)$$
$$= A_n\left(\frac{d}{r\varrho} + \frac{d}{r^2}\right),$$

also wenn man angenähert $r\varrho = r^2$ setzt,

$$V_{n-1} = 2\, A_n \frac{d}{r^2}.$$

Ebenso grofs ist U_{n-2}. Aus

$$U_{n-2} = \frac{J_{n-2}}{\varrho} - \frac{A_{n-2}}{\varrho}$$

folgt

$$J_{n-2} = \varrho\, U_{n-2} + A_{n-2}$$

oder

$$J_{n-2} = \varrho \cdot 2\, A_n \frac{d}{r^2} + A_n\left(1 + \frac{d}{r}\right) = 2\, A_n\left(1 + \frac{3\,d}{r}\right),$$

wenn man $\frac{\varrho}{r}$ angenähert gleich 1 setzt. Es folgt

$$V_{n-2} = \frac{J_{n-2}}{r} - \frac{A_{n-2}}{\varrho} = A_n\left[\frac{1}{r} + \frac{3\,d}{r^2} - \frac{1}{\varrho} - \frac{d}{r\varrho}\right] = 3\, A_n \frac{d}{r^2},$$

wenn wiederum $r\varrho = r^2$ und $\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt wird. Man erhält also folgende Reihen. Für die Ladungen, abgesehen vom Vorzeichen und vom Faktor A_n,

$$1,\quad 1 + \frac{d}{r},\quad 1 + \frac{3\,d}{r},\quad 1 + \frac{6\,d}{r},\quad 1 + \frac{10\,d}{r}, \ldots,\quad 1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{d}{r}.$$

[Die Differenzen sind nämlich der Reihe nach $\frac{d}{r}$, $\frac{2\,d}{r}$, $\frac{3\,d}{r}$, ..., $\frac{(n-1)\,d}{r}$, die Faktoren von $\frac{d}{r}$ der Reihe nach 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$,

$\ldots, 1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$, das letzte Glied also $1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{d}{r}\cdot]$ Für die Potentiale aber erhält man die Reihe

$$0,\quad \frac{d}{r^2}A_n,\quad \frac{2d}{r^2}A_n,\quad \frac{3d}{r^2}A_n,\ \ldots,\ \frac{nd}{r^2}A_n.$$

Nun ist aber nicht die letzte Ladung A_n, sondern die erste Innenladung gegeben, für welche

$$J_1=\left(1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\right)A_n$$

gilt. Demnach ist

$$+A_n=\frac{J_1}{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}},$$

und dieser Wert ist in die gefundene Reihe einzusetzen. Die Potentialdifferenz zwischen dem ersten Kern und der letzten Schale ist also

$$D=\frac{nd}{r^2}A_n-0=\frac{nd}{r^2}\cdot\frac{J_1}{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}$$

gegen

$$D=\frac{Ed}{r^2}=\frac{J_1 d}{r^2}$$

im Falle der vorher besprochenen Schaltung, d. h. sie ist $\frac{n}{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}$ mal so grofs. Dieser Ausdruck kann <1, $=1$, >1 sein. Setzt man ihn gleich 1, so erhält man $n=1$, bezw. $n_1=\frac{2r}{d}\cdot$ Dies sagt aus:

Bei $n=1$ hat man eine gewisse Potentialdifferenz D zwischen Kern und Schale. Vermehrt man die Zahl der Flaschen, so wächst die Potentialdifferenz, erreicht einen Höchstwert, nimmt bis $n_1=\frac{2r}{d}$ wieder zu D ab und sinkt dann unter D herab.

Welches ist der höchste Wert des Faktors?

Man setze

$$\frac{n}{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}=c,$$

woraus folgt

$$n=\frac{dc+2r}{2dc}\pm\sqrt{\frac{(dc+2r)^2}{4d^2c^2}-\frac{2r}{d}\cdot\frac{4dc^2}{4dc^2}}.$$

Soll nun n reell sein, so darf der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ werden. Er wird gleich Null, sobald

$$(dc + 2r)^2 = 8rdc^2$$

oder

$$dc + 2r = c\sqrt{8dr}$$

ist. Dies giebt den Grenzwert

$$c = \frac{2r}{\sqrt{8dr} - d}.$$

Setzt man diesen in die Gleichung für n ein, so fällt die Wurzel weg und man erhält

$$n = \frac{dc + 2r}{2dc} = \frac{d\frac{2r}{\sqrt{8dr} - d} + 2r}{2dc} = \sqrt{\frac{2r}{d}}.$$

Setzt man also die Anzahl der Flaschen gleich $\sqrt{\frac{2r}{d}}$, so erhält der Faktor $\frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}$ entweder einen gröfsten oder einen kleinsten Wert. Nachbarwerte zeigen, dafs es sich um einen Höchstwert handelt, d. h. um diejenige Flaschenzahl der Batterie, die die gröfste Potentialdifferenz ergiebt. Bei gebrochenem n wählt man die nächste ganze Zahl.

Hier bedeutet nun r den Radius der inneren Kugeln, d die Glasdicke. Ist beispielsweise der Radius r das 32 fache der Glasdicke, so ist

$$n = \sqrt{\frac{2 \cdot 32d}{d}} = \sqrt{64} = 8.$$

In diesem Falle geben demnach 8 Flaschen den Höchstwert der Potentialdifferenz, der nun $\frac{8}{1 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{32}} = \frac{64}{15}$ mal so grofs ist, als bei der Schaltung nebeneinander und bei gleicher Ladung der ersten Flasche.

Der Potentialwert des ersten Kernes

$$V_1 = \frac{nd}{r^2}A_n = \frac{ndJ_1}{r^2\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\right)}$$

giebt an, wie viel Arbeit es am Schlusse macht, die elektrische Menge 1 positiver Art auf diese Kugel zu bringen, was anfangs die Arbeit Null beanspruchte. Während des ganzen Verlaufs war diese Arbeit proportional der Flaschenzahl und der Ladung J_1, im Durchschnitt also handelt es sich für die elektrische Einheit um den Mittelwert $\frac{V}{2}$, für die Menge J_1 um die Durchschnittsarbeit

$$\frac{1}{2} V_1 J_1 = \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{n d J_1^2}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}.$$

Dies ist zugleich die Energie der Ladung der Kaskadenbatterie. Im obigen Falle $r = 32\,d$ erreicht sie den Höchstwert für 8 Flaschen. Er hat den Betrag

$$\frac{1}{2r^2} \cdot \frac{64}{15} d J_1^2 = \frac{32\,d J_1^2}{15\,r^2} = \frac{128\,\pi\,d J_1^2}{15\,O}.$$

Die Energie ist proportional dem Quadrate der Ladung der ersten Flasche. Der Höchstwert ist aufserdem proportional dem Faktor $\frac{d}{O}$, wo d die Flaschendicke, O die Oberfläche jeder Innenkugel ist.

Ist $J = E$, d. h. ist die Ladung der ersten Kugel in beiden Schaltungsfällen dieselbe, ist ferner die Glasdicke und die Flaschenzahl dieselbe, so verhalten sich die aufgespeicherten Energiemengen bei Neben- und Kaskadenschaltung wie

$$\frac{n E^2 d}{2r^2} : \frac{n J_1^2 d}{2r^2\left[1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}\right]} \quad \text{oder wie} \quad 1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r} : 1.$$

Die erreichten Potentialdifferenzen dagegen verhalten sich wie

$$\frac{E d}{r^2} : \frac{J_1 d}{r^2} \cdot \frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}} \quad \text{oder wie} \quad 1 : \frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}.$$

Bildet man für beide Fälle den Quotienten aus Energie und Potentialdifferenz, so findet man für den einen Fall $\frac{E}{2}$, für den andern $\frac{n J_1}{2}$, das Verhältnis für beide Fälle ist also $1 : n$.

Um also dieselbe Potentialdifferenz zu erreichen, hat man im Falle der Kaskadenbatterie die n fache Arbeit nötig, wie bei der Nebenschaltung.

Man ist aber mit Hilfe des Machschen Kommutators imstande, eine Batterie mit geringem Aufwande zunächst unter Nebenschaltung zu laden und dann in eine Kaskadenbatterie zu verwandeln, worauf durch Influenzwirkung die Anordnung eine ganz andere wird. Während man aber bei der Kaskadenbatterie nur eine Elektrizitätsmenge E zur Ladung der ersten Flasche nötig hat, ist bei der Machschen Methode für jede Flasche so viel Ladung nötig, also die n fache Menge nE.

[Man vergleiche damit die Erscheinungen, welche bei galvanischen Batterien auftreten, sobald man nebeneinander oder nacheinander schaltet. Das eine Mal hat man n fache Strömungen und einfache Potentialdifferenz, das andere Mal des grofsen Widerstandes wegen einfache Strömungen aber n fache Potentialdifferenz.]

Die Gesamtladung der Innenkugeln ist nach der obigen Theorie, wenn man mit der n^{ten} beginnt,

$$A_n\left[1 + \left(1 + \frac{d}{r}\right) + \left(1 + \frac{3d}{r}\right) + \left(1 + \frac{6d}{r}\right) + \left(1 + \frac{10d}{r}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\right)\right].$$

Die Reihe nimmt zu. Ist J_1 die Ladung der letzten (vorher ersten) Kugel, so ist offenbar die Summe der Ladungen kleiner, als nJ_1, also diese Elektrizitätsmenge kleiner als die bei entsprechender Nebenschaltung angesammelte Menge nJ_1.

Die Berechnung der Summe hat nur mathematischen Wert. Nach dem Method. Lehrbuch II, Seite 117, ergiebt sich

$$A_n\left[n + \frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d}{r}\right] = nA_n\left[1 + \frac{n^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d}{r}\right] = nA_n\frac{6r + (n^2-1)d}{6r}$$

$$= \frac{nJ_1}{1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}} \cdot \frac{6r + (n^2-1)d}{6r} = \frac{n}{3}J_1\frac{6r + (n^2-1)d}{2r + n(n-1)d}.$$

Für sehr grofses n strebt dies dem Werte $\frac{n}{3}J$ zu. Die Kapazität ist gleich $\frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}}$, also, da nur die erste Kugel geladen wird

$$\frac{\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\right)r\varrho}{nd} = \frac{r\varrho}{nd} + \frac{n-1}{2}\varrho.$$

Da oben mehrfach $r\varrho = r^2$ gesetzt und die gegenseitige Influenz der Flaschen vernachläfsigt wurde, hat die Untersuchung nur den Wert einer informierenden Annäherungsbetrachtung, die immerhin über das Wesentliche aufklärt. Um diese Vernachlässigung zu charakterisieren, soll das Potential der ersten Flasche für äufsere Punkte in der Entfernung R gebildet werden. Es ist gleich

$$\frac{J_1}{R} - \frac{A_1}{R} = \frac{1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}{R}A_n - \frac{1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{d}{r}}{R}A_n = \frac{A_n}{R}\frac{d(n-1)}{r}$$

$$= \frac{J_1 d(n-1)}{2r + n(n-1)d} \cdot \frac{1}{R} = \frac{J_1}{R} \cdot \frac{1}{n + 2\frac{r}{d}\cdot\frac{1}{n-1}}.$$

Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen kleiner als $\frac{J_1}{nR}$, so dafs z. B. bei 10 Flaschen der Einflufs geringer ist, als $\frac{1}{10}$ des Einflusses der Ladung der Innenkugel allein. Ist z. B noch $r = 27\,d$, also der Durchmesser das 27fache der Glasdicke, so würde sein

$$\text{Potential} = \frac{J_1}{R} \cdot \frac{1}{10 + 54 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{16}\frac{J_1}{R}.$$

72) Eine andere Betrachtungsweise, die aber ebenso wenig genaue Resultate giebt, findet sich in einigen physikalischen Lehrbüchern. Dort wird die Ladung der ersten Innenflasche gleich E gesetzt, die Influenzelektrizität erster Art gleich $-mE$, wo m ein echter Bruch ist, weil die Influenzelektrizität zweiter Art nicht ins Unendliche abfliefsen konnte (auch nicht die beiden andern kugelförmig umgiebt) und durch ihre Anziehung hemmend auf die Scheidung einwirkt. Unter der vereinfachenden Annahme, dafs dieses m in allen Flaschen dasselbe sei, findet man als Gesamtladung

$$E(1 + m + m^2 + \cdots + m^{n-1}) = E\frac{1 - m^n}{1 - m},$$

was nun ebenfalls kleiner als nE ist. Dabei ist also an Stelle der arithmetischen Reihe höherer Ordnung eine einfachere geometrische getreten. Hier soll die weitere Berechnung nicht durchgeführt werden. Es handelte sich nur darum, den betreffenden Unterschied aufzuklären.

73) **Aufgabe.** Das Potential des geladenen kugelförmigen Kondensators graphisch darzustellen.

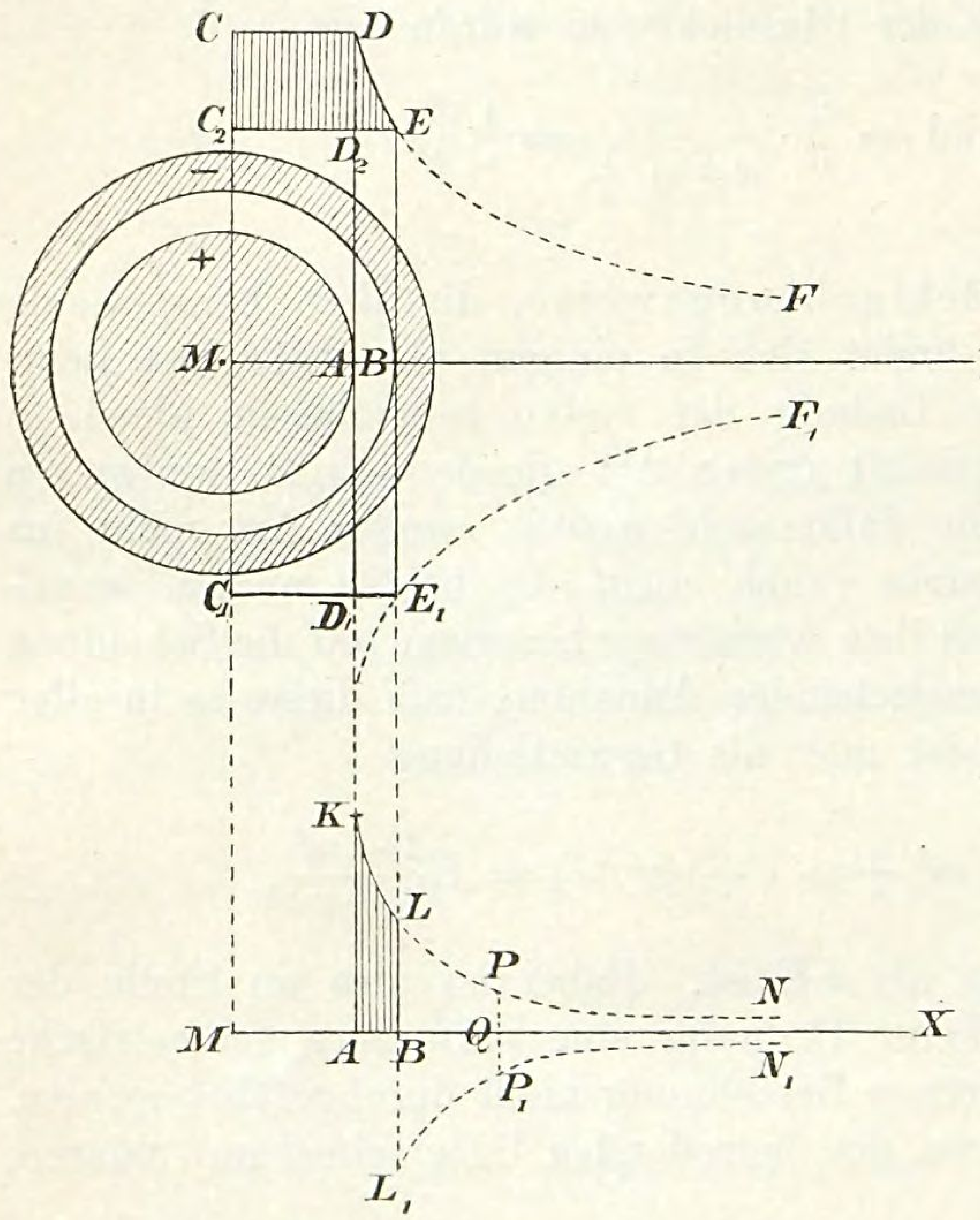
Auflösung. Sind die Radien wieder gleich ϱ, ϱ_1 (und ϱ_2), so handelt es sich nach Nr. 63 für Punkte innerhalb der inneren Kugel um

$$E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1} = \frac{Ed}{\varrho\varrho_1},$$

also um eine konstante Gröfse. Ist nun $MC = \frac{E}{\varrho}$ und $-MC_1 = \frac{-E}{\varrho_1}$, so ist $MC - MC_1$ oder C_2C die den Potentialwert darstellende Strecke. Sie gilt für das ganze Rechteck CDD_2C_2. Aufserhalb der inneren Kugel nimmt das Potential derselben ab nach dem Gesetz der gleichseitigen Hyperbel DEF, während von A bis B das Potential der Schale noch konstant gleich $-\frac{E}{\varrho_1}$ bleibt. Das Diagramm für die Innenkugel giebt eine Fläche $ABED$, von der ABD_1E_1 abzuziehen ist, so dafs eine Fläche DD_2E bleibt. Die Lote dieser Fläche geben

die Potentialwerte zwischen A und B an. Für B wird der Potentialwert gleich Null. Für die außerhalb der Schale liegenden Punkte der X-Achse ist der Potentialwert gleich Null, denn die Lote zweier übereinstimmender Hyperbeln sind voneinander abzuziehen. Die eine Hyperbel hat die Gleichung

Fig. 51.



$$xy = MADC = \frac{E}{\varrho} \cdot \varrho = E,$$

die andere die Gleichung

$$xy = MC_1E_1B = -\frac{E}{\varrho_1} \cdot \varrho_1 = -E.$$

Die Dichtigkeit auf der Innenkugel ist $\delta = \frac{E}{4\varrho^2\pi}$, die auf der Außenkugel

$$\delta_1 = -\frac{E}{4\varrho_1^2\pi} = -\delta\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}.$$

Setzt man $\varrho_1 = \varrho + \delta$, so kann man schreiben

$$\delta_1 = -\delta\frac{\varrho^2}{(\varrho + d)^2} = -\delta\frac{\varrho^2}{\varrho^2\left(1 + \frac{d}{\varrho}\right)^2} = -\frac{\delta}{\left(1 + \frac{d}{\varrho}\right)^2}.$$

Je kleiner $\frac{d}{\varrho}$ ist, um so weniger sind δ_1 und δ dem absoluten Betrage nach voneinander verschieden. Die Anziehung in A ist von der Stärke

$$\frac{E}{\varrho^2} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho^2} = 4\pi\delta,$$

an der Stelle B ist sie gleich $4\pi\delta\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}$. Zwischen A und B in beliebigem Abstande ist sie von der Stärke $y = \frac{4\pi\delta\varrho^2}{x^2}$. Dies ist die Gleichung der Gravitationskurve, welche das Arbeitsdiagramm $ABLK$ begrenzt, wie es in Figur 51 unten angebracht ist. Längs der

Strecke MA und längs der Horizontalen von B bis $+\infty$ ist die Diagrammhöhe gleich Null. Ist der Kern eine koncentrische Hohlkugel, so ist die Sache dieselbe.

74) Der Fall zweier unbegrenzten parallelen Ebenen. Man denke sich den Abstand d ebenso grofs wie vorher, die Radien ϱ und ϱ_1 aber sehr grofs. Soll δ dasselbe sein, wie vorher, so folgt aus $\frac{E}{4\varrho^2\pi} = \delta$, dafs die Ladung in dem Mafse verstärkt werden mufs, wie ϱ^2 vergröfsert worden ist. Dabei wird $\delta_1 = \delta$. Das Potentialdiagramm C_2BDC der letzten Figur fällt mit der Geraden C_2E sehr weit nach oben (BE ist proportional ϱ), DE wird geradlinig, also D_2ED ein rechtwinkliges Dreieck. Die Anziehung bei A bleibt von der Stärke $\frac{E}{\varrho^2} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho^2} = 4\pi\delta$, an der Stelle B wird sie gleich $4\pi\delta\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}$, also da $\varrho = \varrho_1$ wird, ebenfalls gleich $4\pi\delta$. Das Anziehungsdiagramm zwischen A und B wird also ein Rechteck vom Inhalte $4\pi\delta d = \frac{E}{\varrho^2}d$.

Denkt man sich die äufsere Kugel mit der Erde in Berührung, so ist auf ihr das Potential gleich Null. In A ist das Potential gleich $\frac{E}{\varrho} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho} = 4\varrho\pi\delta$, in $B = \frac{E}{\varrho_1}$, also ist die Potentialdifferenz gleich

$$\frac{E}{\varrho} - \frac{E}{\varrho_1} = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1} = \frac{Ed}{\varrho\varrho_1},$$

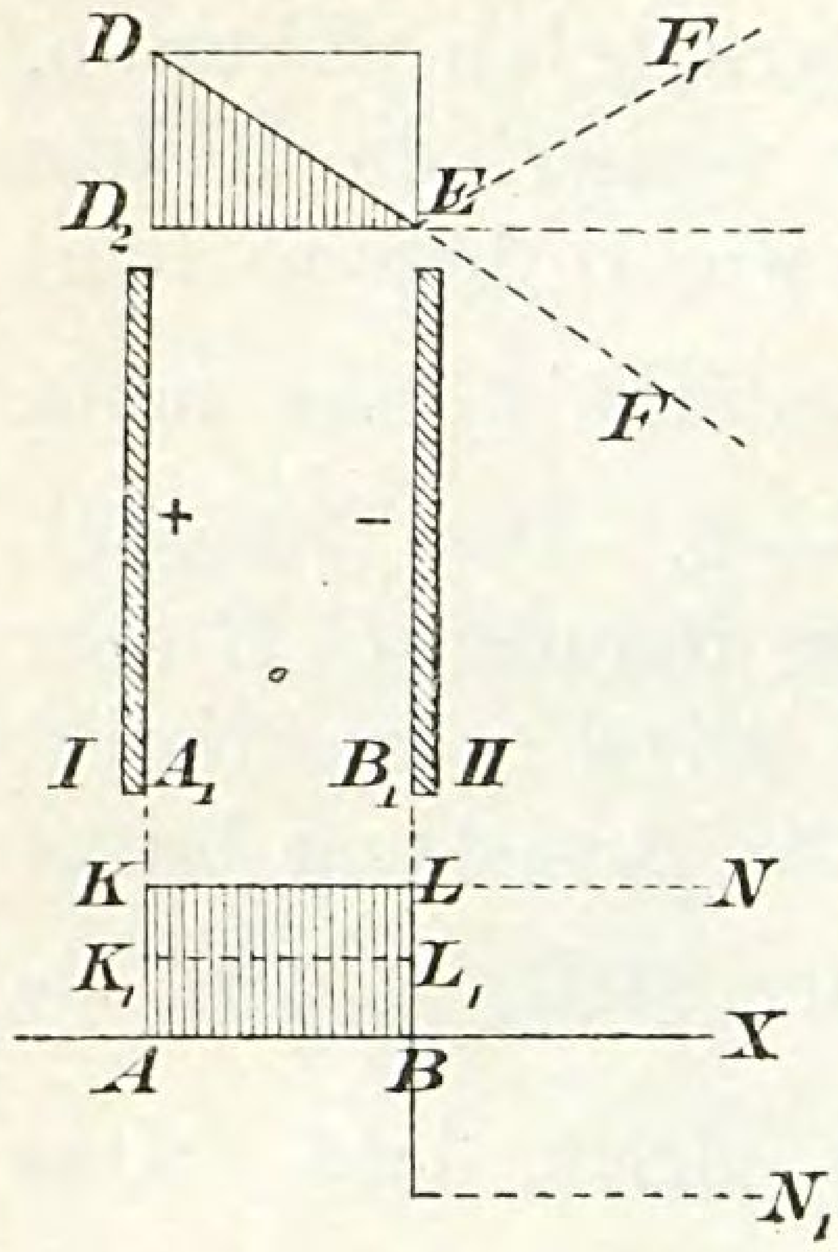
also, da $\varrho = \varrho_1$ zu setzen ist, gleich $\frac{Ed}{\varrho^2}$, wie vorher. Wird das Potential in B gleich Null gesetzt, so ist es in A gleich $\frac{Ed}{\varrho^2} = 4\pi\delta d$ zu setzen.

Dasselbe Resultat ergiebt sich auch auf anderem Wege. Die Kraftlinien sind bei der Kugel Radien, bei der Ebene also Lote auf der Ebene. Die Kraftröhren sind also prismatisch, zweckmäfsig nimmt man sie als quadratische Prismen an. Die Strömung der inkompressiblen Flüssigkeit hat in ihnen konstante Geschwindigkeit, denn $vF = v_1F_1$ giebt $v = v_1$ für $F = F_1$. Demnach ist auch $p = p_1$, d. h. die Anziehung einer homogenen Ebene ist konstant, das Arbeitsdiagramm also ist ein Rechteck, sein Inhalt nimmt auf gleichen Strecken um denselben Betrag zu, bezw. ab, folglich ist das Potentialdiagramm durch eine schräge Gerade begrenzt.

In Fig. 52 sind I und II die beiden als unbegrenzt zu denkenden parallelen Ebenen. Aufserhalb beider heben sich die Wirkungen auf, weil $\delta_1 = -\delta$ ist. Ist $AK = 4\pi\delta$, so ist $ABLK$ das Arbeits-

diagramm für die Bewegung der elektrischen Einheit von I bis II. Diese Einheit wird von der Ebene I ebenso stark abgestofsen, wie von der anderen angezogen, folglich kommt auf jede Ebene die Hälfte der Arbeit. Durch $K_1 L_1$ ist diese Teilung herbeigeführt. Folglich ist $2\pi\delta$ der Kraftanteil jeder der beiden Ebenen. (Ist $\delta = 1$, so ist die Anziehung gleich 2π, was schon in Nr. 27 angedeutet wurde und später noch auf anderem Wege bewiesen werden soll.) Ist $D_2 D = 4\pi\delta d$, so ist $D_2 ED$ das Potentialdiagramm.

Fig. 52.

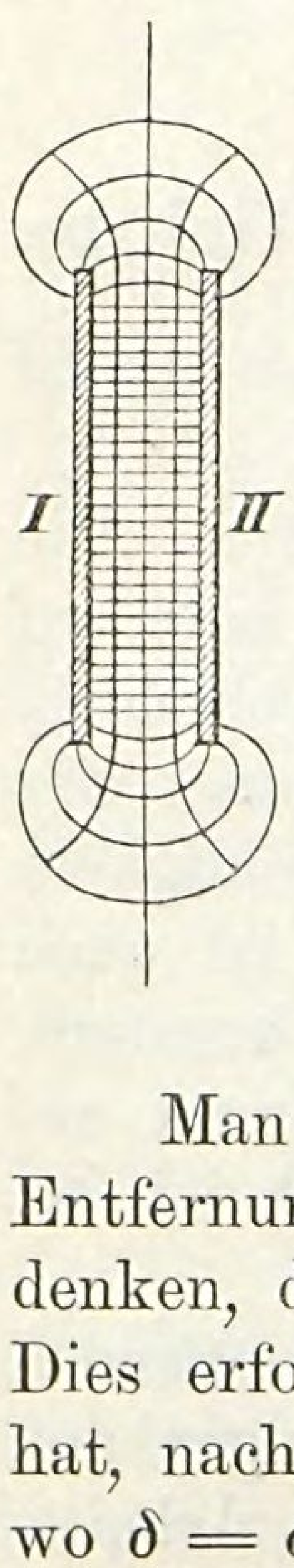


[Bei der Symmetrie des Problems darf man den Potentialwert auch in der Mitte zwischen den Ebenen als Null annehmen, so dafs die Ebenen auf Potentialwerte $\pm 2\pi\delta d$ gelangen.]

Diese Betrachtungen finden praktische Anwendung bei der angenäherten Theorie des Kondensators von Kohlrausch.

75) Kohlrauschs Kondensator. Hat man zwei gleiche Kreisscheiben von geringem Abstande d und grofsem Durchmesser R einander parallel gegenüber gestellt, so erhält man mit beliebig grofser Annäherung zwischen beiden denselben Vorgang, wie zwischen den unbegrenzten Ebenen, sobald die eine mit $+E$ geladen ist und die andere unter Ableitung der Influenzelektrizität $-E$ erhalten hat. Die Kraftlinien im Innern sind parallele Gerade, nur an den Rändern krümmen sie sich nach aufsen. Dort sind sie entsprechend fortzusetzen. Die Niveaulinien aber sind im Innern den Platten parallel und beginnen ebenfalls erst beim Austritt sich zu krümmen, um aufsen nach Art von elliptischen Bogen in sich zurückzuwandern. Abgesehen vom Rande also stimmt im Innern alles mit dem vorigen Falle überein, auch wird das Potentialdiagramm wieder ein Dreieck $D_2 ED$ und das Arbeitsdiagramm ein Rechteck $ABLK$.

Fig. 53.



Man kann sich das Laden von I, die Scheidung in II und die Entfernung der Influenzelektrizität 2ter Art aus II dadurch ersetzt denken, dafs man die positive Elektrizität aus II direkt nach I schafft. Dies erfordert, wenn die freie Elektrizität in I bereits die Dichte δ hat, nach dem Arbeitsviereck $ABLK$ die Arbeit $4\pi\delta d$. Im Anfang, wo $\delta = o$ war, war die erforderliche Arbeit 0. Im Mittel ist sie $2\pi\delta d$

für die Einheit, also $2\pi\delta d E$ für die Ladung E. Da $2\pi\delta d = \frac{V_1 - V_2}{2}$ ist, kann man daher auch schreiben $(V_1 - V_2)\frac{E}{2}$. Für die unbegrenzte Ebene ist, um die Dichte gleich δ zu machen, eine Zufuhr von unendlich vieler Elektrizität nötig, ist dagegen F der Flächeninhalt jeder der beiden endlichen Platten, so ist $E = \delta F$. Die gesamte Arbeit oder Energie ist also $2\pi d\delta E$ oder $2\pi d\frac{E^2}{F}$.

Hätte es sich aber um die Entfernung d_1 gehandelt, so würde die Energie gleich $2\pi d_1 \frac{E^2}{F}$ sein. Der Unterschied

$$A = 2\pi\frac{E^2}{F}(d_1 - d)$$

kann aber auch anders gedeutet werden. Ladet man bei Entfernung d und entfernt man dann die Ebenen so weit voneinander, daſs der Abstand d_1 ist, so ist das Schluſsresultat dasselbe, als ob man beim Abstande d_1 ladet. Folglich ist A die Arbeit, die nötig ist, die beiden Ebenen aus dem gegenseitigen Abstande d in den gegenseitigen Abstand d_1 zu versetzen. Ist nun p der nach obigem konstante Widerstand gegen diese Bewegung, so ist jene Arbeit auch als

$$A = p(d_1 - d)$$

zu schreiben. Der Vergleich giebt

$$p = 2\pi\frac{E^2}{F}.$$

Die gegenseitige Anziehung der beiden Kondensatortafeln ist also proportional dem Quadrate der Ladung und umgekehrt proportional der Fläche.

Die Messung von p kann experimentell erfolgen. Daraus folgt dann für die Gröſse der Ladung

$$E = \sqrt{\frac{pF}{2\pi}}.$$

Als Dichte ergiebt sich

$$\delta = \frac{E}{F} = \sqrt{\frac{p}{2\pi F}}.$$

Wird dies in die Potentialgleichung $V_1 - V_2 = 4\pi\delta d$ eingesetzt, so ergiebt sich die Möglichkeit, die Potentialdifferenz mittels der Gleichung

$$V_1 - V_2 = 4\pi d\sqrt{\frac{p}{2\pi F}} = d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}$$

zu bestimmen.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Man pflegt aber das Potential V_2 der einen Platte durch Ableitung auf Null zu bringen, die Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$V_1 = d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}.$$

Die Kapazität, d. h. die für die Potentialeinheit nötige Ladung ist also

$$K = \frac{E}{V_1} = \frac{\sqrt{\frac{pF}{2\pi}}}{d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{F}{4\pi},$$

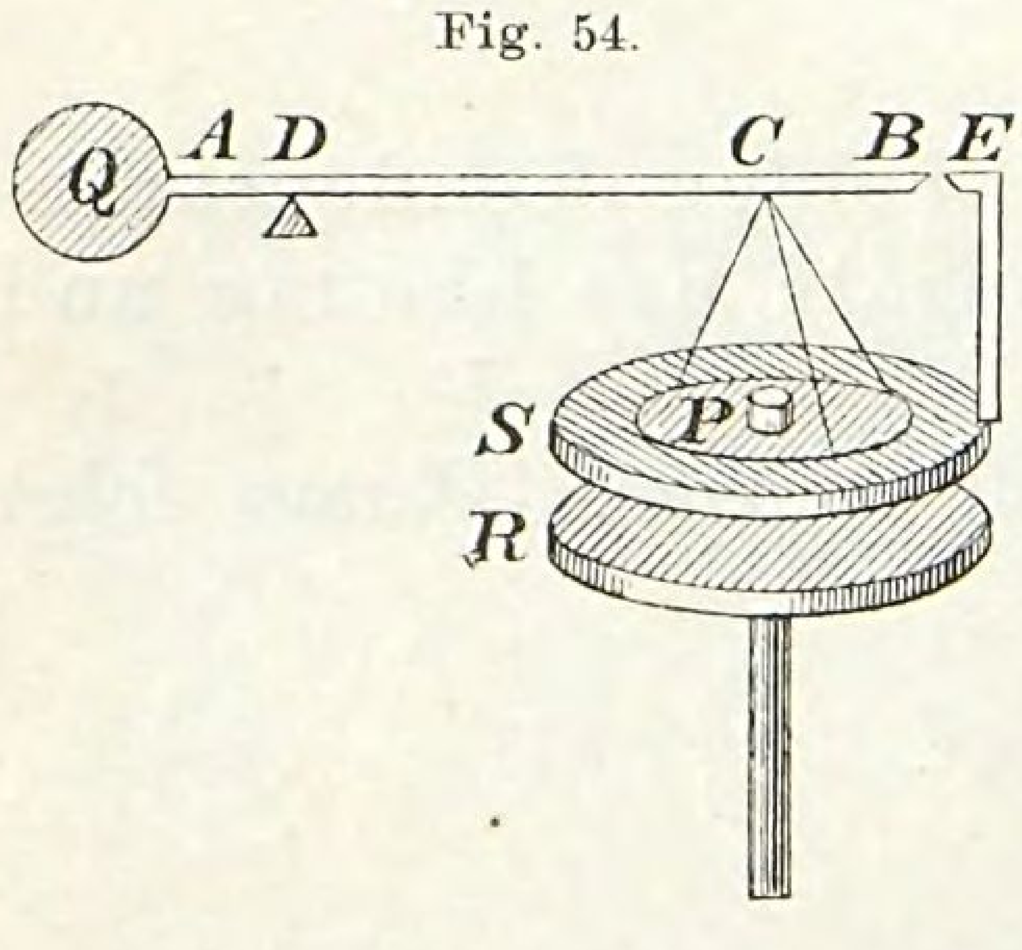
oder, wenn man $F = \varrho^2\pi$ setzt,

$$K = \frac{\varrho^2}{4d}.$$

Die Kapazität des Kondensators ist also proportional dem Quadrate des Plattenradius und umgekehrt proportional dem Abstande d der Platten. — Dies ist die übliche Darstellung der angenäherten Theorie des Kondensators von Kohlrausch, die auch im folgenden Anwendung findet. Später wird sie entsprechende Verfeinerung erhalten.

76) Schutzringelektrometer von W. Thomson. Die Beschreibung des Apparates findet man in den besseren Lehrbüchern. Rein schematisch handelt es sich um folgendes. Ein Hebel AB ist drehbar um D und trägt bei C eine Platte P, auf der ein loses Gewicht p ruht und bei A ein Gegengewicht Q. Das erstere Gewicht ist so gewählt, daſs Gleichgewicht herrscht. Nimmt man es ab, so wird die Platte emporgehoben. Sie kann aber dadurch wieder herabgezogen werden, daſs man sie und eine darunterliegende Platte R, die fest auf isolierendem Träger T ruht, in oben besprochener Weise als Kondensatoren elektrisch macht, so daſs Anziehung stattfindet. Die Platte P kann durch einen festen Schutzring S passieren, mit dem sie stets leitend durch einen beweglichen Draht verbunden ist. Dieser Ring hat nur den Zweck, die oben besprochene Randstörung zu übernehmen, so daſs die bewegliche Platte P als homogen mit Elektrizität belegt gelten kann. Gleichgewicht herrscht, wenn B und E genau koinzidieren (was mittels Lupe und Haar auf das genaueste kontroliert werden kann). Dabei fallen die Ebenen von P und S zusammen. Wird diese Lage durch

Fig. 54.



die Anziehung der Elektrizitäten noch nicht erreicht, so kann die Platte R mittels Mikrometerschraube so hoch emporbewegt werden, dafs die Anziehung stark genug wird, jene Absicht zu erreichen. Soll nun die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ zweier Leiter untersucht werden, so verbindet man sie leitend mit den Platten und stellt mittels der Mikrometerschraube das Gleichgewicht her. Jetzt ist nach obigem die zwischen den Scheiben bestehende Potentialdifferenz

$$V_1 - V_2 = d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}.$$

Der Schutzring würde unwirksam sein, wenn er nicht mit der Innenplatte leitend verbunden wäre. Zwischen beiden ist allerdings ein kleiner Zwischenraum, aber man braucht nur einige der Kraft- und Niveaulinien des Hauptschnittes zu skizzieren, um zu sehen, dafs das Ausbuchten der Kraftlinien und das Auseinandergehen der Niveaulinien für die Innenplatte so zu sagen vollständig verhindert wird und erst am Rande des Ringes stattfindet. Darüber soll erst später gesprochen werden.

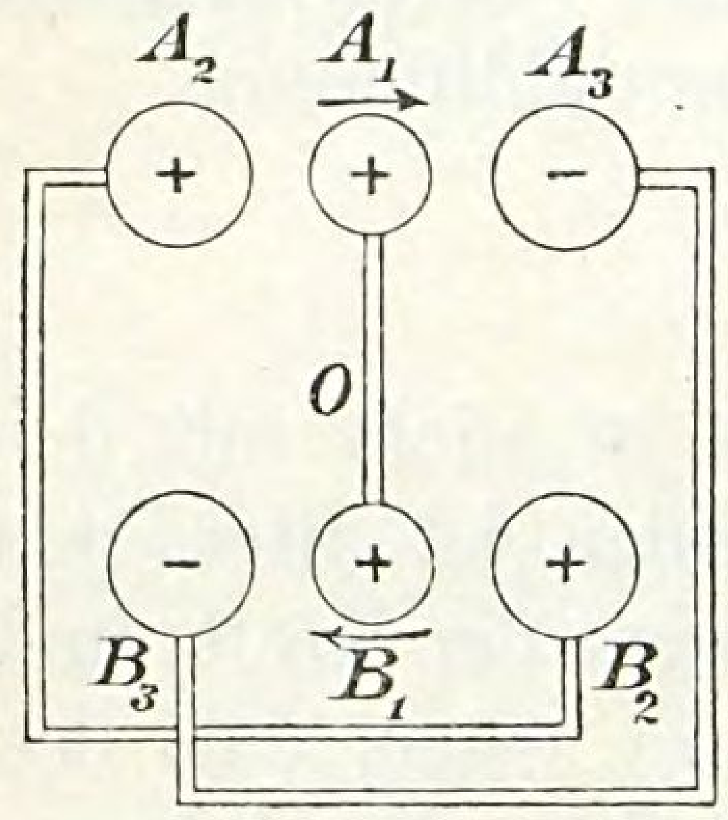
Der Ring dient zugleich als Grundfläche für eine leitende Metallkapsel, die den Apparat umgiebt und nach der Erde abgeleitet den Mechanismus ringsum mit dem Potentiale $V_2 = 0$ umgiebt, wobei die Gleichung in $V_1 = d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}$ übergeht. So ist der Mechanismus vor jeder störenden Influenzwirkung von aufsenher geschützt. Eine kleine Öffnung für das Anbringen der Beobachtungslupe ist von geringer störender Einwirkung.

Die obige, in den Lehrbüchern übliche Theorie bedarf noch einer Korrektur, da die bewegliche Platte nicht den richtigen Durchmesser hat. Da es sich nur um einen konstanten Faktor handelt, soll die von Maxwell und Kirchhoff gegebene Rechnung hier unterlassen werden. Es handelt sich nur darum, ein praktisches Beispiel und das Prinzip eines wichtigen Apparates zu geben. Seine genauere Beschreibung und die Verwendungsweise findet man in den Lehrbüchern. Oben wurde gezeigt, wie jeder Kondensator durch seine grofse Kapazität gestattet, weit gröfsere Mengen schwach gespannter Elektrizität aufzunehmen, als eine einfache Platte mit ihrer geringen Kapazität. Seine Aufnahmefähigkeit dauert fort, bis die Potentialdifferenz aufgehoben ist. Die einfache Platte würde in den Fällen, um die es sich hier handelt, zu geringe Mengen aufnehmen, als dafs Messungen möglich sein könnten.

77) Thomsons Quadrantenelektrometer. Die Beschreibung dieses sehr empfindlichen Apparates sehe man ebenfalls in den Lehrbüchern nach. Grundprinzip und Rechnungsmethode seien kurz klar

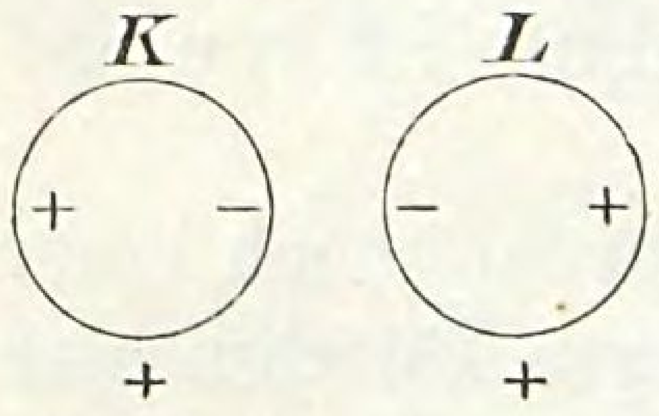
gelegt. Fig. 55 stellt im Grundrisse vier mit positiver bezw. negativer Elektrizität geladene Leiter vor, die man vorläufig als Kugeln betrachten möge. In der Mitte befindet sich ein Aluminiumplatte, die bifilar aufgehängt ist, so dafs sie aus jeder Lage mit einem gewissen Drehungsmomente, welches theoretisch oder experimentell bestimmt werden kann, in die normale Lage zurückgetrieben wird. Erhält diese Platte eine geringe elektrische Ladung, z. B. eine positive, so tritt Drehung im angedeuteten Sinne ein, bis das Bifilarmoment grofs genug geworden ist, um Gleichgewicht zu geben. A_2 und B_2 sind verbunden, um gleiches Potential V_2 zu zeigen, ebenso A_3 und B_3, die $-V_3$ geben mögen, während die Platte das Potential V_1 habe.

Fig. 55.



Zur vorläufigen Berechnung ist folgendes zu sagen. Eine kleine Kugel K Fig. 56 habe an der Oberfläche das Potential $V = \frac{E_1}{\varrho_1}$. Nähert sich eine andere mit dem Potentiale $V = \frac{E_2}{\varrho_2}$, so tritt beiderseitige Influenz ein, die wegen des Additionsgesetzes der Potentiale auf jeder Kugel so stattfindet, als ob sie unelektrisch wäre. Sind z. B. beide positiv geladen, so geben die ursprünglichen Ladungen eine gegenseitige Abstofsung proportional dem Produkte der Ladungen, also auch proportional dem Produkte der Potentiale, so dafs es sich um einen Ausdruck $+ c V_1 V_2$ handelt. Die von K auf L hervorgerufene Influenzwirkung giebt eine negative Elektrizitätsmenge F, die proportional E, also auch proportional V_1 ist, z. B. gleich $k V_1$. Ladung E und F geben eine Anziehung proportional $E \cdot F$, also auch proportional $V_1 \cdot k V_1$, d. h. proportional V_1^2, sie sei gleich $-c_1 V_1^2$. Ebenso giebt die von L ausgeübte Influenz eine Anziehung $-c_2 \cdot V_2^2$. [Man kann ebenso die Influenzelektrizitäten 2ter Art in Rechnung ziehen, was aber nicht geschehen soll, weil bei gröfserer Annäherung der Kugeln ihre Wirkungen sehr gegen die anderen zurücktreten, überhaupt sollen nur die drei besprochenen Posten berücksichtigt werden.] Die Gesamtwirkung ist dann

Fig. 56.



$$-c_1 V_1^2 - c_2 V_2^2 + c V_1 V_2.$$

Auch bei Einrechnung der vernachlässigten Posten ergeben sich drei Glieder von dieser Form.

Nähert man jetzt dem beweglich gedachten ersten Körper noch

einen dritten vom Potentiale V_3 und bringt man diesen so an, daſs seine Wirkung auf den ersten entgegengesetzt der vom zweiten ausgeübten ist, so handelt es sich unter gleichartigen Verhältnissen um eine Wirkung

$$-\left[-c_1 V_1^2 - c_2 V_3^2 + c V_1 V_3\right].$$

Die Gesamtwirkung ist

$$c_1\left(V_1^2 - V_1^2\right) + c_2\left(V_3^2 - V_2^2\right) - c V_1\left(V_3 - V_2\right),$$

oder, da der erste Posten wegfällt, der zweite aber als

$$c_2(V_3 + V_2)(V_3 - V_2) \cdot \frac{V_1}{V_1} \cdot \frac{c}{c}$$

geschrieben werden kann, gleich

$$c V_1 (V_2 - V_3)\left[1 - \frac{c_2}{c} \cdot \frac{V_2 + V_3}{V_1}\right].$$

Ist nun V_1 sehr groſs gegen $V_2 + V_3$, so bleibt nur der Ausdruck

$$c V_1 (V_2 - V_3)$$

zu berücksichtigen. Ist übrigens $V_3 = - V_2$, so geht letzteres über in

$$2 c V_1 \cdot V_2 .$$

Eine solche Kraft ist es, die bei dem Quadrantenelektrometer auf die Aluminiumplatte wirkt und ihr ein Drehungsmoment giebt, dessen Gröſse proportional $V_1 V_2$ ist und mit $\gamma V_1 V_2$ bezeichnet werden möge. Beim Gleichgewichte ist dieses gleich dem bekannten Bifilarmomente M. Ist also V_2 und ebenso γ bekannt, so bestimmt sich V_1 aus

$$V_1 = \frac{M}{\gamma V_2}.$$

Die Lehrbücher beschreiben noch andere elektrostatische Meſsapparate, z. B. das bekannte Sinuselektrometer von Kohlrausch. Das Gegebene wird hinreichen, einen Begriff davon zu geben, wie man auch geringere Potentialdifferenzen messen und nach Nr. 66 aus Kapazität und Potential auf die Elektrizitätsmengen schlieſsen kann. Die über die Apparate vorgetragenen Theorien sind dem bisherigen elementaren Standpunkte angepaſst worden und können nur als erste Annäherungen betrachtet werden. Die folgenden Kapitel werden feinere Untersuchungen ermöglichen, ohne daſs der elementare Standpunkt verlassen wird.

Kapitel V.

Die Mehrpunktprobleme.

78) **Vorbemerkung.** Wirken mehrere Punkte anziehend, so werden die Kräfte nach dem Parallelogramm addiert. Graphisch geschieht dies durch das einfache Aneinandersetzen der Kräfte nach der Streckentheorie, rechnend erreicht man dasselbe durch mehrfache Anwendung der Formeln

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2\,p_1 p_2 \cos\alpha}\,, \quad \sin\alpha_1 = \frac{p_2}{p}\sin\alpha\,,$$

wo p_1 und p_2 die Seitenkräfte sind, α der von ihnen eingeschlossene Winkel, p die Resultante, α_1 der von p und p_1 eingeschlossene Winkel ist.

Es fragt sich nun, nach welcher Formel die Potentialwerte zu addieren sind. Es wird sich hier im Anschlufs an Nr. 21 in voller Bestimmtheit herausstellen, dafs, wenn die Einzelpotentiale V_1 und V_2 sind, das Gesamtpotential durch einfache algebraische Addition als $V = V_1 + V_2$ gefunden wird, worin eine aufserordentliche Erleichterung und zugleich die ganze Stärke des Potentialbegriffs liegt. Dieser gehört also zu denjenigen Gröfsen, die von den Engländern nach Hamilton als Skalaren (im Gegensatz zu den Vektoren) bezeichnet werden. Bei diesen Gröfsen geschieht die Addition einfach algebraisch, weil sie selbst durch eine einzige Zahl vollständig dargestellt werden, wie z. B. Länge einer Linie, Inhalt einer Fläche, Inhalt eines Körpers, Masse einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers, Arbeit einer Kraft, Energie einer bewegten Masse, hydrostatischer Druck an irgend einer Stelle u. s. w. Bei den Vektoren dagegen sind mehrere numerische Angaben nötig. Zu ihnen gehören Kräfte, die, wie die Strecken, nach Gröfse und Richtung zu geben sind, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen u. dgl. Ihre Addition folgt besonderen komplizierten Gesetzen. Gelingt es, ein Problem von den Vektoren zu befreien und auf die Skalaren zu beschränken, so ist damit eine erhebliche Vereinfachung erzielt. Dies geschieht bei der

Zurückführung von Problemen der Mechanik auf solche der Potentialtheorie.

Von den Hamiltonschen Methoden, die auf die Quaternionen geführt haben, soll hier nichts vorausgesetzt werden, da ein einfacher Hilfssatz ausreicht, der in jedem Lehrbuche der Mechanik stehen sollte.

79) Hilfssatz aus der Mechanik. Die Arbeit der Resultante ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Seitenkräfte.

Beweis. 1. Die Resultante von p_1 und p_2 sei p, $PQ = w$ der Weg des Angriffspunktes P, so daſs pw die Arbeit der Resultante ist. Projiziert man den Weg w auf die Richtungslinien der Seitenkräfte, so erhält man $PQ_1 = w_1$ und $PQ_2 = w_2$ als die (virtuellen) Wege in den Richtungen dieser Kräfte, so daſs die in diesen Richtungen vollführten Arbeiten $p_1 w_1$ und $p_2 w_2$ sind. Ihre algebraische Summe ist

$$\begin{aligned} p_1 w_1 + p_2 w_2 &= p_1 w \cos\alpha_1 + p_2 w \cos\alpha_2 = w(p_1 \cos\alpha_1 + p_2 \cos\alpha_2) \\ &= w(PB_1 + PB_2) = w(PB_1 + B_1 C) = w_1 PC = pw, \end{aligned}$$

sie ist also gleich der Arbeit der Resultante. Vgl. Fig. 57.

Fig. 57.

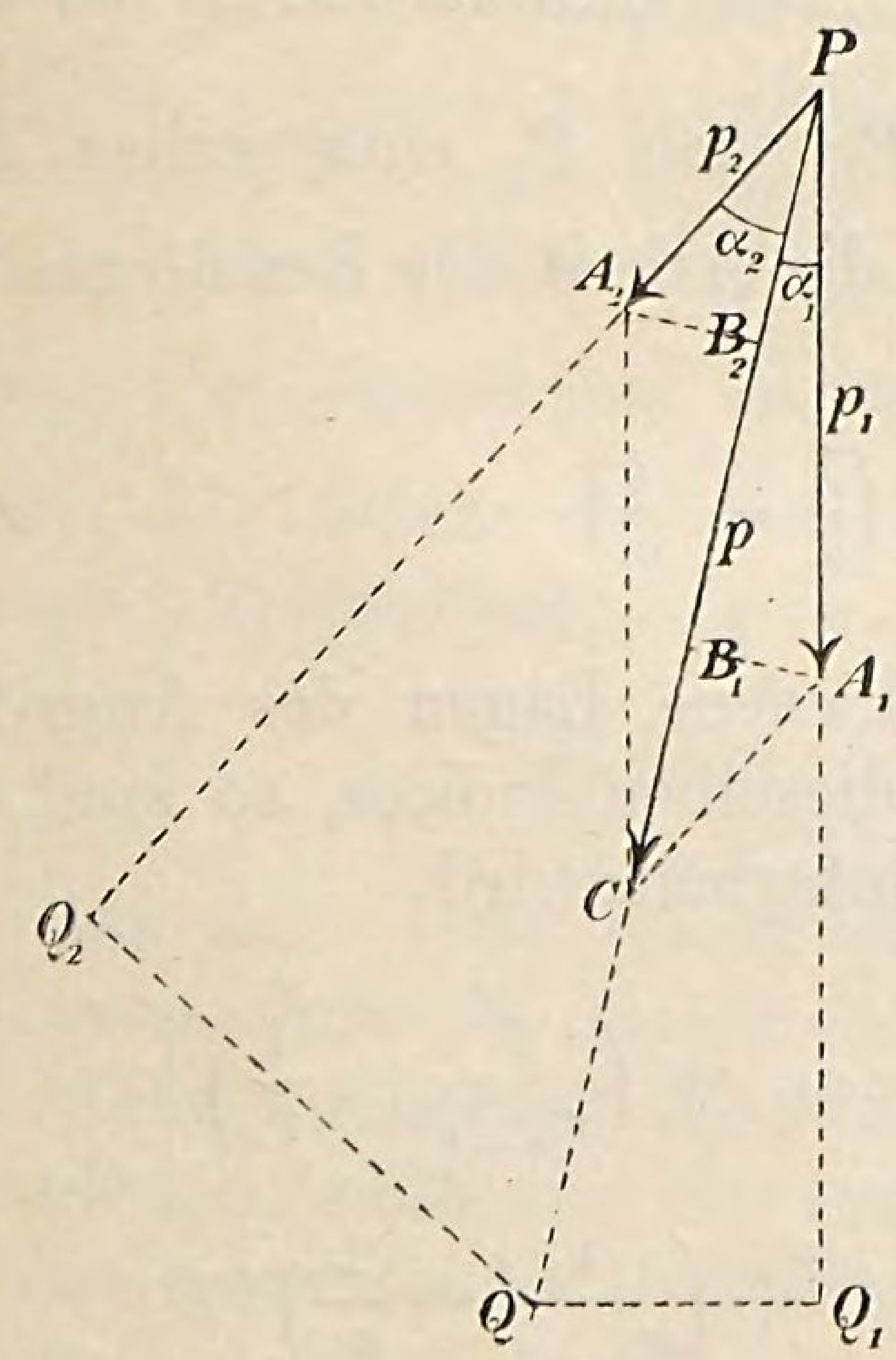
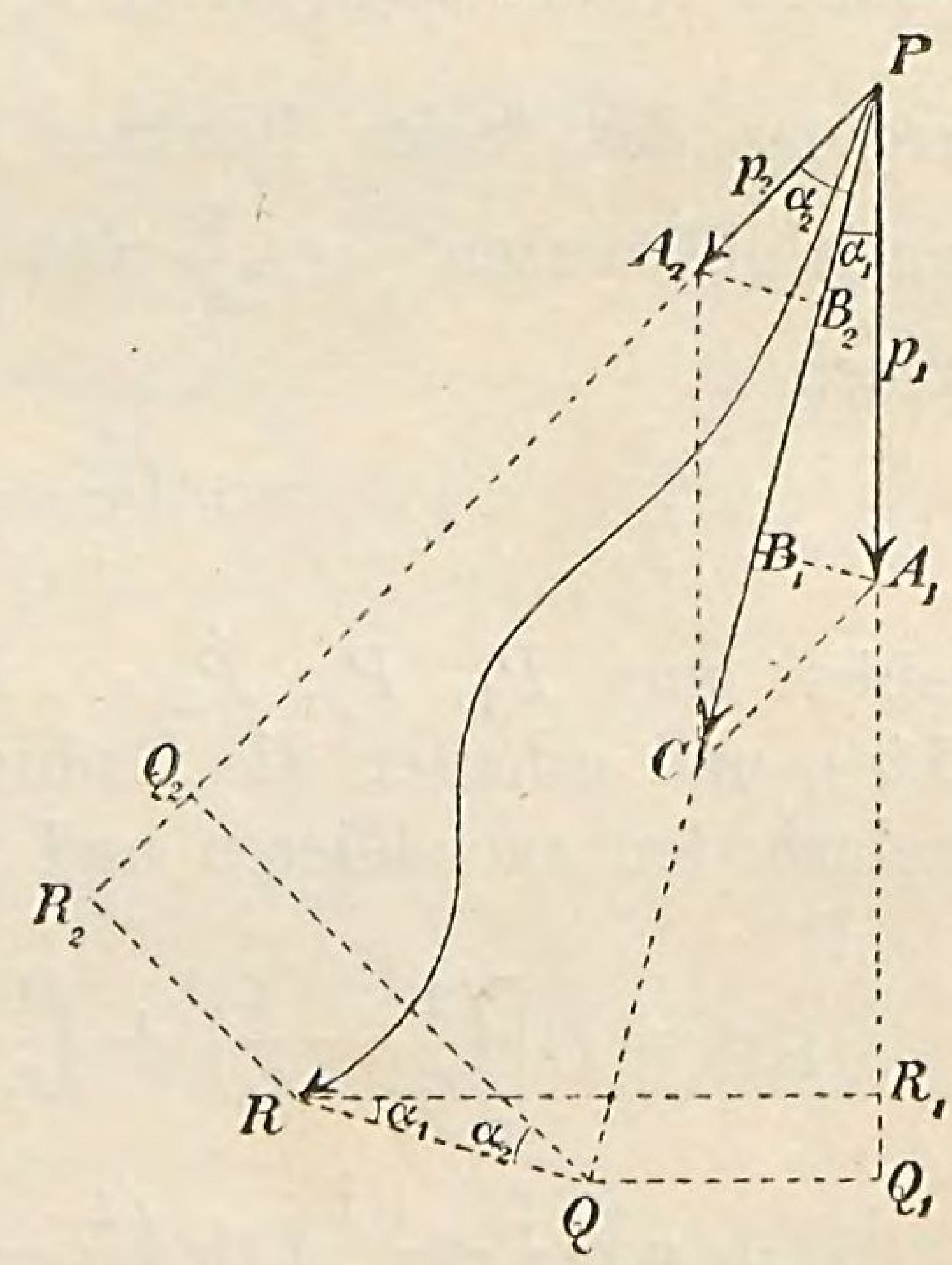


Fig. 58.



Die Addition der Arbeiten geschieht also einfach algebraisch ohne jede Berücksichtigung der Richtungen. Arbeitsgröſsen gehören daher zu den Skalaren.

2. Behalten die Kräfte p, p_1 und p_2 ihre Richtungen stets bei, so kann P einen beliebigen Weg PR zurücklegen, ohne daſs sich

etwas ändert. Geschieht die Bewegung z. B. in der Ebene der Kräfte, so ist der Weg auf die drei Kraftlinien zu projizieren, was die „virtuellen“ Wege PQ, PQ_1 und PQ_2 geben mag. Projiziert man noch Q nach Q_1 und Q_2, und setzt man $RQ = e$, so ist, da auch bei R und Q die Winkel α_1 und α_2 auftreten, $R_1Q_1 = e \sin\alpha_1$, $R_2Q_2 = e\sin\alpha_2$, also, da $A_1B_1 = A_2B_2$, oder $p_1 \sin\alpha_1 = p_2 \sin\alpha_2$ ist, $p_1 \cdot R_1Q_1 = p_2 \cdot Q_2R_2$. Vorher war $p_1 \cdot PQ_1 + p_2 \cdot PQ_2 = p \cdot PQ$, jetzt ist $(p_1 \cdot PQ_1 - p_1 \cdot R_1Q_1) + (p_2 \cdot PQ_2 + p_2 \cdot Q_2R_2) = p \cdot PQ$ oder $p_1 \cdot PR_1 + p_2 \cdot PR_2 = p \cdot PQ$. Der Satz bleibt also bestehen.

Tritt der Angriffspunkt aus der Ebene der Kräfte heraus, so kann sich z. B. R senkrecht über der gezeichneten Lage im Raume befinden. Die Figur ist dann die Projektion der zugehörigen räumlichen Figur. Am Beweise ändert sich sonst nichts. Vgl. Fig. 58.

3. Ändern die Kräfte während der Bewegung des Angriffspunktes stetig ihre Richtungen, wie es z. B. bei der Anziehung durch mehrere feste Punkte geschieht, so gilt der obige Beweis zunächst nur für eine unendlich kleine Bewegung, durch Summierung aber für die gesamte Bewegung.

4. Das Beispiel der Anziehung durch zwei feste Punkte nach dem Newtonschen Gesetze wird dies erläutern. Die auf die Einheit wirkenden Kräfte sind dabei $\frac{m}{r_1^2}$ und $\frac{\mu}{\varrho_1^2}$. Die Einzelarbeiten bei der Bewegung des freien Punktes P von P_1 nach P_2 entsprechen den Potentialdifferenzen $\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$ und $\frac{\mu}{\varrho_1} - \frac{\mu}{\varrho_2}$, die Arbeit der Resultante ist demnach

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Bedeuten nun P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ verschiedene Lagen des Angriffspunktes, und erhalten die Radiivectores dieselben Indices, so sind die Einzelarbeiten zu addieren und die Gesamtarbeit wird

$$pw = m\left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}\right)\right]$$
$$+ \mu\left[\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) + \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\varrho_{n-1}} - \frac{1}{\varrho_n}\right)\right],$$

oder

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_n}\right).$$

Dies gilt für beliebig gestaltete Wege von beliebiger Länge.

Entfernt man p ins Unendliche, so ist der Arbeitsaufwand

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{m}{r_1} + \frac{\mu}{\varrho_1},$$

d. h. gleich der algebraischen Summe der Einzelpotentiale.

Man bezeichnet die dazu nötige Arbeit als das Gesamtpotential, folglich gilt zunächst für zwei Punkte der Satz:

Das Gesamtpotential ist gleich der algebraischen Summe der Einzelpotentiale $V = V_1 + V_2$.

Die Ausdehnung auf mehrere Punkte, die beliebig im Raume lagern und anziehend wirken, sei dem Leser überlassen. Neues tritt dabei nicht auf.

Handelt es sich um ein aus unendlich vielen Punkten bestehendes Massengebilde, also um eine Linie, oder um eine Fläche, oder einen Körper von beliebiger Gestalt, so wird die Ermittelung der Kraftresultanten in der Regel auf Schwierigkeiten stoſsen. Leichter ist es im allgemeinen, die algebraische Addition der Potentialwerte durchzuführen und aus dem Gesamtpotential auf einem noch zu lehrenden Wege die Kraftresultante abzuleiten. Auſserdem erhalten gewisse Sätze der Mechanik durch die Benutzung des Potentialbegriffs eine weit einfachere Form, als bei der Anwendung des Kraftbegriffs. Darin liegt der in Nr. 14 angedeutete weitere Vorteil der Greenschen Theorie.

80) Die Niveauflächen für das Problem zweier gleich stark anziehender Punkte. In zwei irgendwo im Raume befindlichen festen Punkten M_1 und M_2 mögen sich Massen von der Gröſse 1 befinden. Sie wirken auf die frei bewegliche in einem Punkte koncentrierte Masseneinheit ein mit dem Potentiale $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\cdot$ Sämtliche Punkte, für welche das Potential einen konstanten Wert hat, liegen auf einer Niveaufläche, deren Gestalt durch die Gleichung

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$$

bestimmt ist. Jede solche Fläche ist eine Drehungsfläche mit der Verbindungslinie $M_1 M_2$ als Achse. Es ist also nur nötig einen durch diese Achse gehenden Meridianschnitt zu untersuchen und nur von Niveaulinien, statt von Niveauflächen zu sprechen.

Die mechanische Bedeutung der Niveaulinien bezw. Niveauflächen besteht darin, daſs zur Bewegung der Masseneinheit von einer solchen Fläche nach einer anderen sie umschlieſsenden eine gewisse Arbeit nötig ist, die gleich dem Potentialunterschiede ist. Zur Bewegung der Masseneinheit nach einer der inneren Flächen ist nicht positive Arbeit nötig, sondern negative, d. h. diese wird durch die anziehenden Punkte ausgeübt und vermehrt die Energie $\frac{1\cdot v^2}{2}$ der frei beweglichen

Masse um einen Betrag, der gleich der Potentialdifferenz für die Endpunkte des Weges ist. Zur Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf der Fläche selbst ist die Arbeit Null nötig. Die Resultante der Anziehung steht also senkrecht auf der Niveaufläche. Nun läfst sich aber die Resultante der Kräfte $p_1 = \frac{1}{r_1^2}$ und $p_2 = \frac{1}{r_2^2}$ aus r_1 und r_2 leicht konstruieren, folglich ist die Resultante und damit zugleich die Normale der Niveaulinie in jedem Punkte elementar konstruierbar, ebenso die Tangente und die durch diese senkrecht zum Meridianschnitt gelegte Tangentialebene der Niveaufläche elementar konstruierbar.

Da jede Niveaulinie dieses Problems zwei Symmetrieachsen hat, die Gerade $M_1 M_2$ und die zugehörige Mittelsenkrechte, so kann man die Betrachtung auf einen Quadranten beschränken.

Denkt man sich die Niveaulinien so aufeinander folgend, dafs die Werte von c einer arithmetischen Reihe folgen, z. B. der Reihe

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots, \frac{n+n}{n} = 2, \frac{2n+1}{n}, \ldots$$

so gilt folgendes:

Wie sich auch P von P_1 aus nach aufsen hin bewege, stets ist von einer Niveaulinie zur andern derselbe Arbeitsaufwand $\frac{1}{n}$ nötig. Geht P nach innen, so ist natürlich der Arbeitsaufwand negativ. Geschieht nämlich die kleine Verschiebung um w längs der Kraftlinie und ist der Mittelwert des Widerstandes gleich p, so ist die geleistete Arbeit gleich pw. Weicht die Richtung des Weges um α ab, so handelt es sich um die Kraft $p_1 \cos\alpha$ und den Weg $w_1 = \frac{w}{\cos\alpha}$, so dafs wiederum $p_1 w_1 = pw$ ist.

Trägt man an jeder Stelle des Weges auf der Ebene ein Lot auf, welches gleich der Projektion der Anziehungsresultante p an dieser Stelle auf die Bewegungsrichtung ist, so erhält man das Arbeitsdiagramm für den Verlauf der Bewegung von P. Wie nun auch von P_1 aus nach einer der Niveaulinien gewandert werde, stets erhält man denselben Arbeitsaufwand und dieselbe Diagrammfläche, als ob man den Weg von der einen Niveaulinie zur andern auf der x-Achse oder y-Achse gemacht hätte. (Die x-Achse soll die Verbindungslinie der beiden festen, anziehenden Punkte sein, die y-Achse die Mittelsenkrechte dazu.) Geht das Diagramm von P_1 aus bis ins Unendliche auf beliebig gewundenen Wegen, stets ist sein Inhalt gleich $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. (Vergl. dazu Nr. 14.)

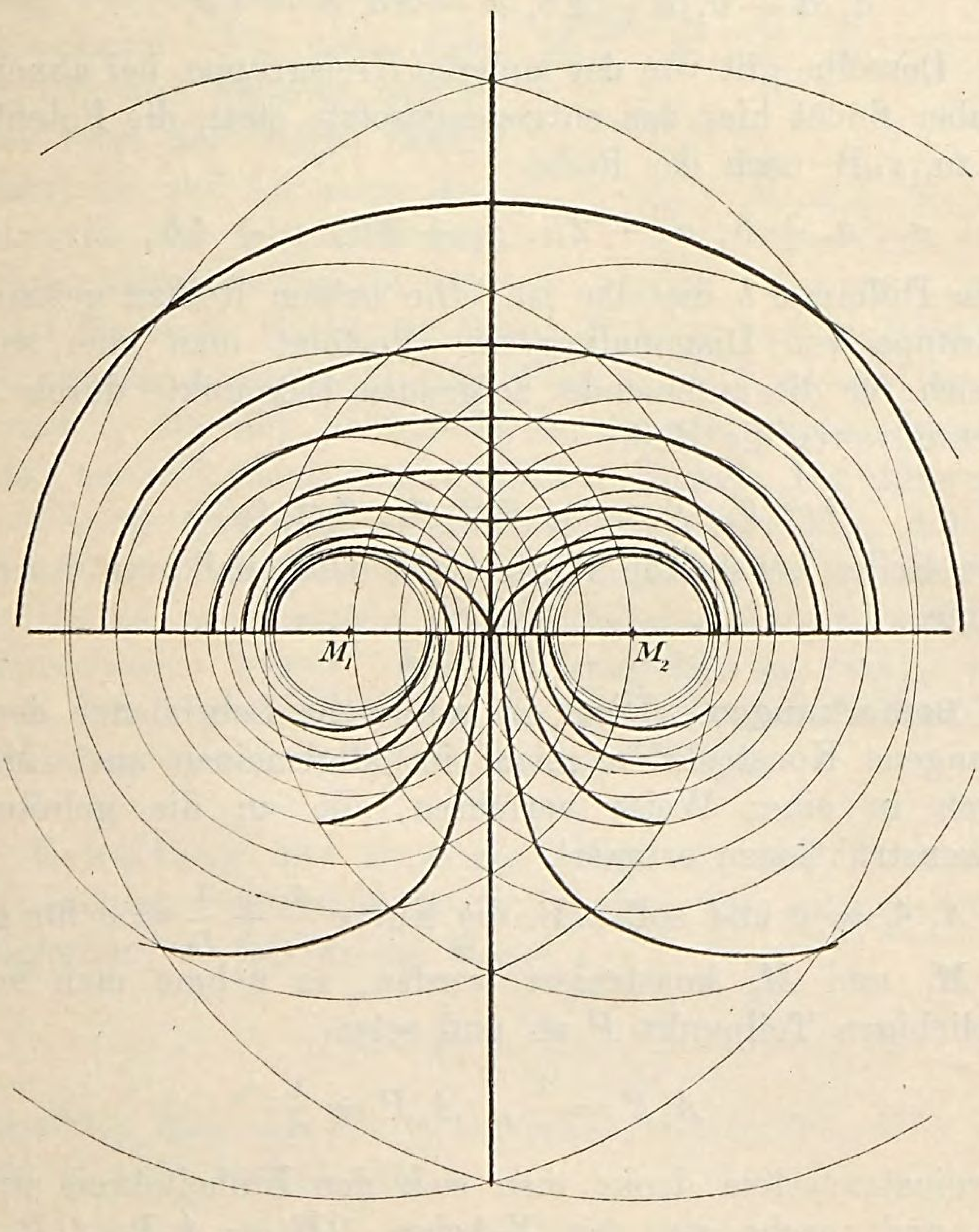
81) **Aufgabe.** Die Niveaulinien für dieses Problem zu konstruieren.

Auflösung. Man schlage um die festen Punkte M_1 und M_2 Kreise mit den Radien, deren reciproke Werte einer arithmetischen Reihe, z. B. 0, 1, 2, 3, 4, ... entsprechen, also z. B. mit den Radien

$$\infty,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \ldots,$$

allgemeiner mit den in Fig. 10 zu A_1, A_2, A_3, A_4, ... gehörigen Ordinaten (und etwa auch mit den durch Halbierung der Grundlinien

Fig. 59.



zu bestimmenden Ordinaten), so daſs man ein Netz krummliniger Vierecke erhält. Die Diagonalkurven dieses Netzes können mit beliebiger Genauigkeit eingezeichnet werden, indem man durch fortgesetzte Interpolation von Ordinaten der Fig. 10 die Zahl der Vierecke beliebig vermehrt. Im oberen Teile der Fig. 59 sind die hierher gehörigen Diagonalkurven gezeichnet. Der untere Teil, der symmetrisch zum

oberen ist, ist dort weggelassen. (Die unten gezeichnete Kurvengruppe kommt später zur Sprache, sie entspricht den Niveaulinien für Punkte M_1 und M_2, von denen der eine ebenso stark abstofsend wirkt, wie der andere anziehend.)

Beweis. Dafs diese Diagonalkurven solche konstanten Potentials, also Niveaulinien sind, ergiebt sich folgendermafsen.

Die zu M_1 gehörige Kreisgruppe giebt bei zunehmenden Radien nach der Konstruktion Potenentialwerte, die nach arithmetischer Reihe abnehmen. Von irgend einem der Eckpunkte aus möge es sich z. B. um die Reihe

$$a,\ a - b,\ a - 2b,\ a - 3b,\ a - 4b, \ldots$$

handeln. Dasselbe gilt von der anderen Kreisgruppe, bei abnehmenden Radien aber findet hier das entgegengesetzte statt, die Potentialwerte nehmen zu, z. B. nach der Reihe

$$a_1,\ a_1 + b,\ a_1 - 2b,\ a_1 + 3b,\ a_1 + 4b, \ldots,$$

wobei die Differenz b dieselbe ist. Die beiden Reihen gelten für die obere Gruppe von Diagonalkurven. Verfolgt man eine solche, so ergiebt sich für die aufeinander folgenden Eckpunkte durch Addition der Potentialwerte die Reihe

$$a + a_1,\ a + a_1,\ a + a_1,\ a + a_1, \ldots,$$

d. h. eine Reihe konstanter Werte. Die Diagonalkurve ist also eine Niveaulinie.

82) **Bemerkungen.** Diese in zahlreiche Lehrbücher der Physik übergegangene Konstruktion reicht im allgemeinen aus. Man kann aber auch in einer Weise verfahren, die an die gebräuchlichen Ellipsenkonstruktionen erinnert.

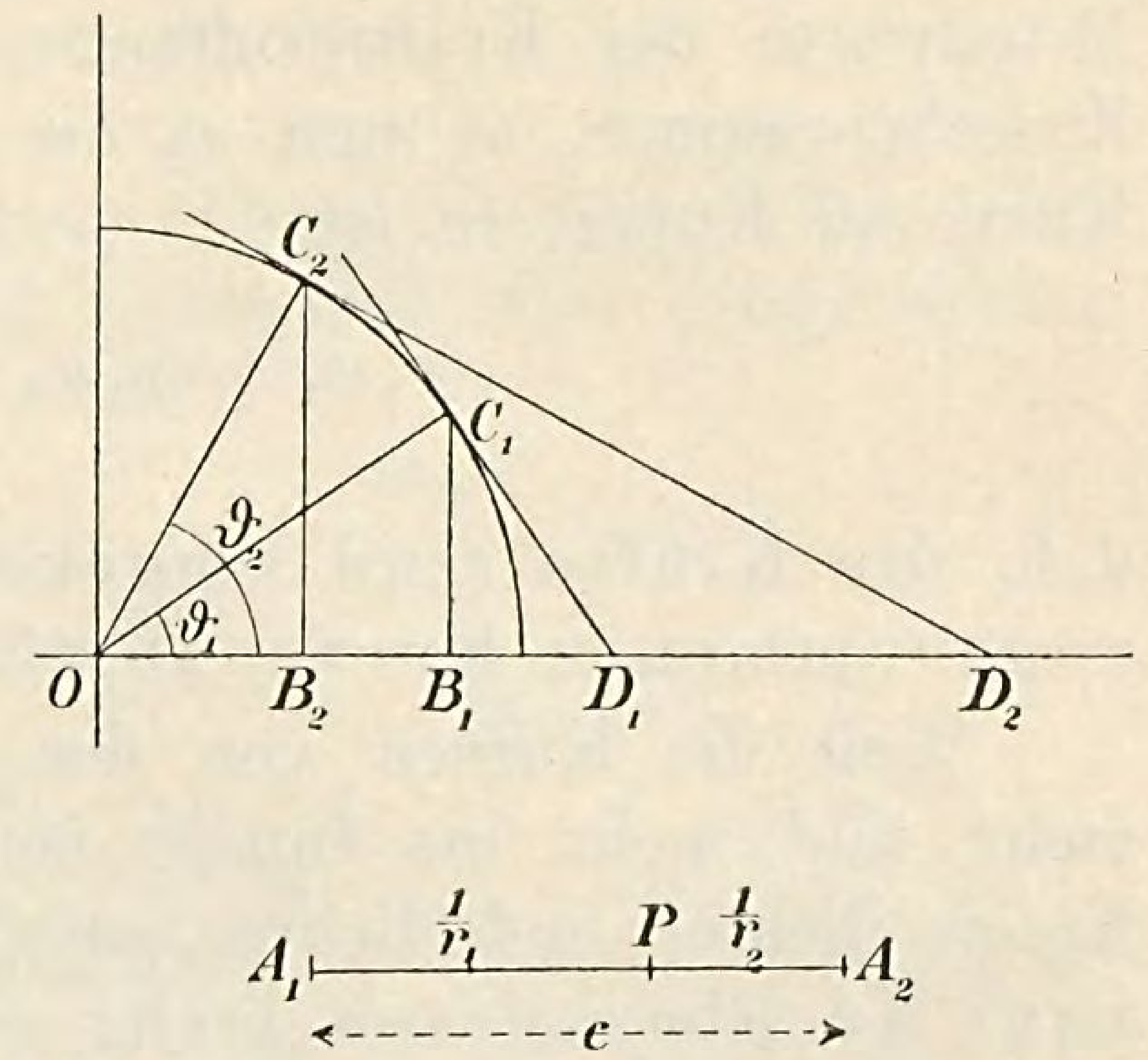
Ist $A_1 A_2 = c$ und soll z. B. die Kurve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$ für gegebene Punkte M_1 und M_2 konstruiert werden, so nehme man auf $A_1 A_2$ einen beliebigen Teilpunkt P an und setze

$$A_1 P = \frac{1}{r_1}, \quad A_2 P = \frac{1}{r_2}.$$

Im Koordinatensystem denke man sich den Einheitskreis um O geschlagen und mache auf der X-Achse $OB_1 = A_1 P$, $OB_2 = A_2 P$. Die in B_1 und B_2 auf der X-Achse errichteten Lote geben auf dem Kreise Punkte C_1 und C_2. Die Tangenten in diesen schneiden die X-Achse in D_1 und D_2. Jetzt ist $OD_1 = r_1$ und $OD_2 = r_2$. Mit diesen Radien schlage man um die festen Punkte M_1 und M_2 (z. B. um die Punkte ± 1) Kreisbogen, die, wenn sie sich schneiden, zwei und bei Vertauschung der Mittelpunkte nochmals zwei Punkte der

Kurve geben, so dafs man nur einen Quadranten zu konstruieren nötig hat. Jeder Teilpunkt von A_1A_2 giebt so im allgemeinen vier reelle Punkte, jedoch hat die Teilung, wie bei der Ellipsenkonstruktion, eine bestimmte Grenze.

Fig. 60.



Giebt man $A_1A_2 = c$ verschiedene Werte, so erhält man die ganze Kurvengruppe. Die vorige Methode giebt ganz von selbst eine potentiell gleichwertige Einteilung, wie man sofort an der Y-Achse erkennt. Für diese sind (vgl. Fig. 59) die Vektoren gleich und jeder folgt der obigen Reihe der Radien, die auf Abnahme der Potentialwerte in arithmetischer Reihe führt. Allgemein ergiebt sich dies so: Ist für einen Punkt der Ebene $V_1 = c_1$ und zugleich $V_2 = c_2$, so ist für ihn die Pontentialsumme $V = V_1 + V_2 = c_1 + c_2$. Folgen also c_1 und c_2 für sich arithmetischen Reihen, die beide zunehmen, so wächst auch V nach arithmetischer Reihe. Die Intervalle von Kurve zu Kurve sind also potentiell gleichwertig, d. h. den angezogenen Körper von einer Kurve zur anderen zu bringen, erfordert bei dem Gange nach aufsen überall dieselbe Arbeit, welcher Weg auch eingeschlagen werde. Bei dem umgekehrten Gange wird entsprechende Arbeit gewonnen, d. h. der frei bewegliche Körper gewinnt entsprechend an Geschwindigkeit und an Energie.

83) Erhaltung der Energie. Sind P_1 und P_2 im letzteren Falle die beiden Potentialwerte, v_1 und v_2 die entsprechenden Geschwindigkeiten, so ist für die Masse 1

$$P_2 - P_1 = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}.$$

Betrachtet man die Schlufslage als veränderlich, läfst man also die Marke 2 weg, so hat man

$$P - P_1 = \frac{1}{2}\left(v^2 - v_1^2\right)$$

oder

$$P - \frac{v^2}{2} = P_1 - \frac{v_1^2}{2},$$

d. h. $P - \frac{v^2}{2}$ ist eine konstante Gröfse. Darin liegt der Satz von der Erhaltung der Energie für dieses Problem.

84) Gesetz der Abstände zwischen zwei Niveaulinien. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Kurven ist veränderlich. Die Arbeit, die nötig ist, den beweglichen Körper von der einen zur anderen zu bringen, ist überall dieselbe. Sind also p_1 und p_2 die Mittelwerte der Kraftresultanten an zwei verschiedenen Stellen des Zwischenraumes, w_1 und w_2 die entsprechenden kürzesten Wege von Kurve zu Kurve, so ist

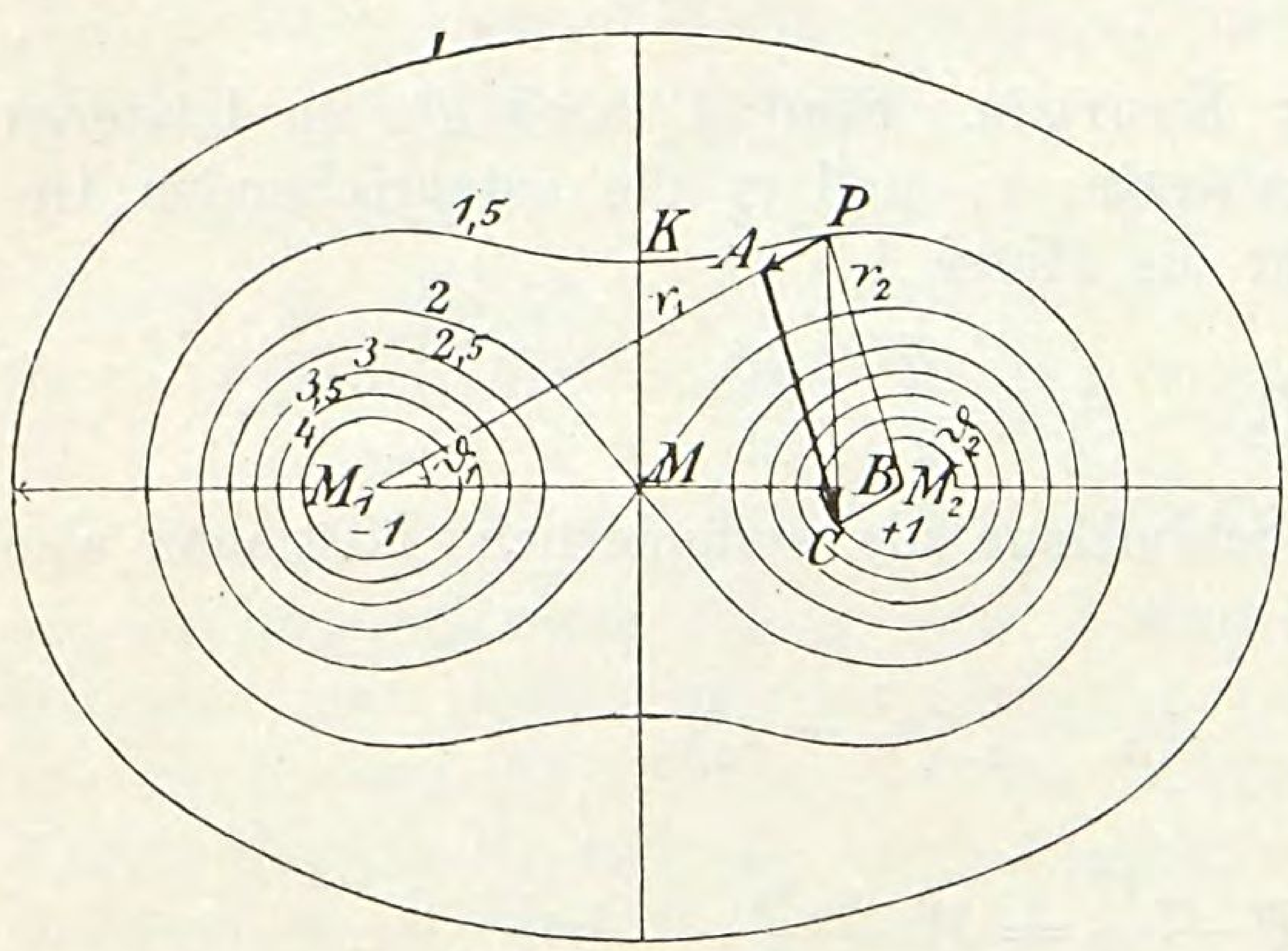
$$p_1 w_1 = p_2 w_2 \quad \text{oder} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{w_2}{w_1},$$

d. h. die Kräfte sind umgekehrt proportional den als klein angenommenen Kurvenabständen.

Weil die Kurven von der Y-Achse aus in jedem Quadranten mehr und mehr ins Innere der einen Kreisschar rücken, wo die Kreise dichter und dichter aufeinander folgen, so nähern sich je zwei Nachbarkurven mehr und mehr und erreichen auf der X-Achse das Minimum des Abstandes, während auf der Y-Achse das Maximum stattfindet.

Für die aus getrennten Ovalen bestehenden Kurven wird auf der X-Achse sowohl das Maximum, als auch das Minimum des Abstandes erreicht, innen das eine, aufsen das andere. Dem Maximum des Abstandes entspricht auf der Niveaulinie das Minimum der Anziehungsresultante, dem Minimum des ersteren entspricht das Maximum der anderen. Es ist also zu betonen, dafs auf den Niveaulinien bezw. auf den durch Drehung um die X-Achse entstehenden Niveauflächen zwar das Potential konstant ist, aber nicht die Gröfse der Anziehungskraft. Für die Elektrizitätslehre z. B. folgt daraus, dafs die Kurven gleicher Intensität im allgemeinen ganz andere Gestalt haben, als die Kurven gleichen Potentials.

Fig. 61.

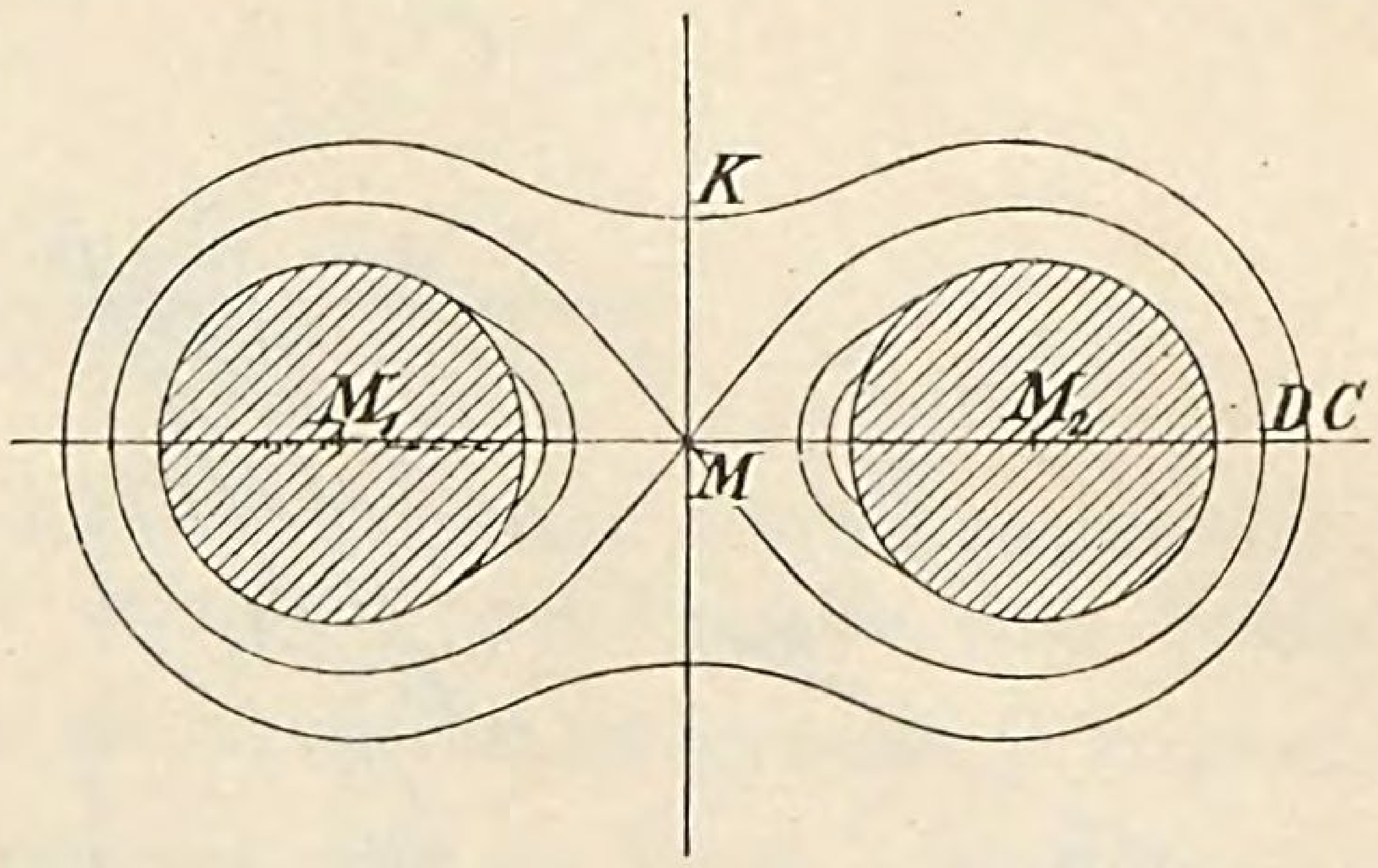


Handelt es sich um zwei sehr nahe beieinander liegende Niveaulinien, und ist an irgend einer Stelle der kürzeste Abstand gleich w, die Arbeit aber, die nötig ist, von der einen zur anderen überzuführen,

gleich A, so ist $pw = A$, also $p = \frac{A}{w}\cdot$ Auch auf diese Weise kann man den Mittelwert der Anziehungskraft zwischen den Nachbarkurven finden, wobei sich wiederum ergiebt, dafs die Kräfte umgekehrt proportional den Kurvenabständen sind.

85) Eine mechanische Veranschaulichung. Mit Hilfe einfacher mechanischer Anschauungen lassen sich diese Dinge bequem aufklären Denkt man sich statt der Punkte M_1 und M_2 zwei homogene, kugelförmige Weltkörper gleicher Masse, deren gegenseitige Anziehung durch eine starre Verbindung unwirksam gemacht ist, und belegt man beide mit ozeanischen Wassermassen, so ordnet sich unter der Voraussetzung, dafs die Wasserteilchen aufeinander keine Anziehung ausüben, das Wasser nach den besprochenen Niveauflächen an. Ist die Wassermenge gering, so hat man nur zwei Wasserberge auf den einander zugewendeten Teilen der Kugeloberfläche. In einem bestimmten Falle berühren sich die beiden Ozeane im Schnittpunkte der Achse. Ist noch mehr Wasser vorhanden, so umgiebt der Ozean nach Art der äufseren Kurve beide Kugeln einheitlich. Nach dem Gesetze der kommunizierenden Röhren giebt die Wassersäule DC denselben Druck, wie die höhere Säule MK.

Fig. 62.



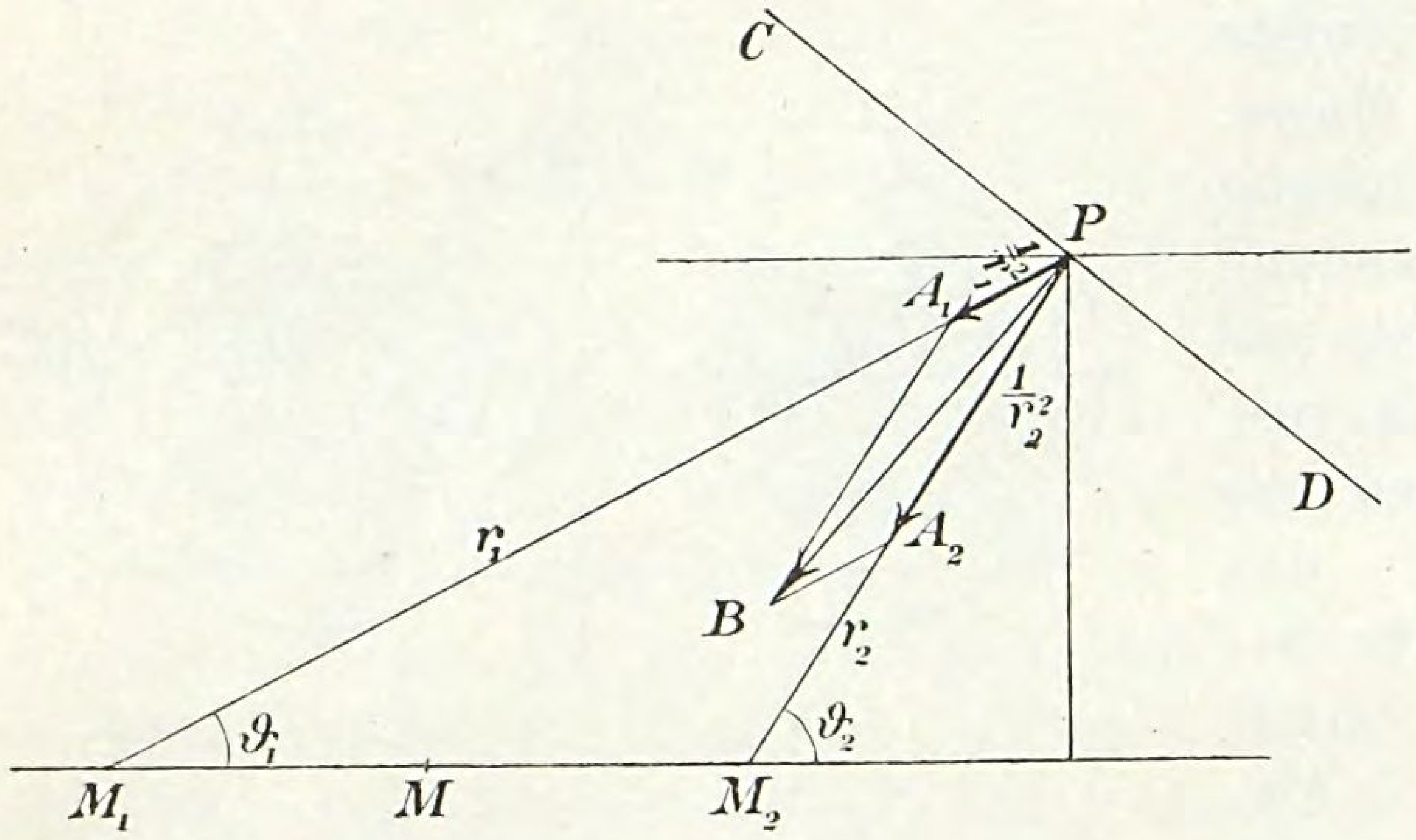
Man nehme z. B. den Zwischenfall, bei dem die Ozeane sich wie die beiden Teile eines Kegels in einer Spitze M berühren. Segelt ein Schiff von der Aufsenseite der einen Kugel aus nach dem Schnittpunkte der Koordinatenachsen hin, so nimmt sein „Gewicht" allmählich ab und wird in jenem Schnittpunkte gleich Null. Dabei ist die Tiefe des Ozeans allmählich bis zu einem Höchstwerte gewachsen. Ein mitgenommenes Pendel, welches anfangs z. B. Sekundenschwingungen machte, würde langsamere und langsamere Schwingungen erhalten haben und sich schliefslich ganz indifferent verhalten. Der Übergang zu den Schwingungen der Magnetnadel im magnetischen Felde und zu den Erscheinungen im entsprechenden elektrischen Felde macht jetzt keine Schwierigkeiten mehr.

Noch klarer wird die Darstellung, wenn man die Gröfse und Richtung der Kraftresultante für jede Stelle durch Konstruktion und

Rechnung bestimmt, was nach obigem zugleich die Normale und Tangente für jede Stelle jeder Niveaulinie giebt, so daſs elementare Behandlung der Kurven möglich ist. Dabei möge $m = 1$ gesetzt werden.

86) **Aufgabe.** P sei ein Punkt der Kurve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$, die Normale und die Tangente der Kurve sollen für P konstruiert und ihre Neigungen berechnet werden.

Fig. 63.



Auflösung. Man konstruiere nach obigem Verfahren

$$PA_1 = \frac{1}{r_1^2}$$

und

$$PA_2 = \frac{1}{r_2^2}$$

und setze beides nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen. Dies giebt p nach Gröſse und Richtung und mit letzterer die Normale. Das Lot auf dieser giebt die Tangentenrichtung in P.

Will man p durch Rechnung finden, so ergiebt es sich aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}.$$

Man kann auch mit Hilfe der wagerechten und senkrechten Seitenkräfte rechnen, was

$$-\xi = \frac{\cos\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\cos\vartheta_2}{r_2^2}, \quad -\eta = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\sin\vartheta_2}{r_2^2} \quad \text{und} \quad p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

giebt. Dadurch findet man zugleich die Tangente des Neigungswinkels α gegen die positive Richtung der X-Achse als

$$\tan\alpha = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\frac{\sin\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\sin\vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{\cos\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\cos\vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{r_2^2\sin\vartheta_1 + r_1^2\sin\vartheta_2}{r_2^2\cos\vartheta_1 + r_2^2\cos\vartheta_2}.$$

Sind M_1 und M_2 nach ± 1 verlegt, so hat man

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3}}{\frac{x+1}{r_1^3} + \frac{x-1}{r_2^3}} = \frac{r_2^3 y + r_1^3 y}{r_2^3(x+1) + r_1^3(x-1)} = \frac{\sin^3\vartheta_1 + \sin^3\vartheta_2}{\sin^2\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_2\cos\vartheta_2}.$$

Die Tangentenrichtung β der Niveaulinie folgt aus $\tan\beta = -\frac{1}{\tan\alpha}$. [Dieselben Resultate erhält man durch implicites Differentiieren.]

87) Die Linien gleicher Intensität und gleicher Kraftrichtung.

Setzt man $p = c_1$, d. h.

$$\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2} = c_1^2,$$

so hat man die Gleichung der Linien gleicher Anziehungsstärke (gleicher Intensität). Jede derselben passiert nach dem Gesetze $\frac{p}{p_1} = \frac{w_1}{w}$ zugleich die Stellen konstanten Abstandes w benachbarter Niveaulinien, vorausgesetzt, daſs die Werte c des Potentials einer arithmetischen Reihe folgen, bei der die konstante Differenz sehr klein zu denken ist. Auf diesen Punkt kommt die Betrachtung später zurück.

Die Linien

$$\tan\alpha = \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{r_2^3 y + r_1^3 y}{r_2^3(x+1) + r_1^3(x-1)} = \gamma$$

sind Linien konstanter Anziehungsrichtung. Legt man also eine Schar paralleler Tangenten an die Schar der Niveaulinien, so erhält man diese Art von Kurven, deren Bedeutung gleichfalls noch einmal zur Sprache kommt.

Denkt man sich die Punkte M_1 und M_2 mit gleichen Mengen von positivem Magnetismus (bezw. Elektrizität) geladen, so würde eine kleine Magnetnadel sich überall in der Richtung der Resultante einstellen, wobei von dem störenden Erdmagnetismus jetzt abzusehen ist. Der eine Pol unterliegt nämlich der Wirkung der konstruierten Resultante, der andere einer entgegengesetzt zu zeichnenden Resultante. Es giebt eine Lage stabilen und eine Lage labilen Gleichgewichts.

Denkt man sich die Nadel senkrecht gegen die Resultante gestellt, so ist das statische Moment des wirkenden Kräftepaares (ein solches wirkt bei sehr kleiner Nadel, da dann die beiden Resultanten gleich und parallel, aber entgegengesetzt sind) ein Maximum. Die Nadel hat in Bezug auf ihren Drehungspunkt ein bestimmtes Träg-

heitsmoment. Die Schwingungsdauer der Nadel ist (kleine Schwingungen vorausgesetzt)

$$\mathrm{t} = \pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{größtes statisches Moment}}} = \pi \sqrt{\frac{T}{M}},$$

was dem Gesetze $\mathrm{t} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für das mathematische Pendel, dem Gesetze $\mathrm{t} = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}}$ für das physische Pendel entspricht.

Die Normalen der Niveaulinien geben also die Stellung der Nadel an, die Kurven $\tan \alpha = \gamma$ verbinden die Stellen gleicher Nadelrichtung, die Kurven $p = c$ dagegen verbinden die Stellen gleichen Maximalmoments, d. h. die Stellen gleicher Intensität und gleicher Schwingungsdauer miteinander. (Ein Magnetstab von der Länge l habe Pole von der Ladung $\pm m$, dann nennt man ml das magnetische Moment des Stabes. Schwingt er horizontal im homogenen Felde, z. B. in dem des Erdmagnetismus, so ist bei der Feldstärke F das gröfste Drehmoment gleich Fml, also die Schwingungsdauer $t = \pi \sqrt{\frac{T}{Fml}}$.)

So erhält man einen vorläufigen Einblick in die Gesetze des zusammengesetzten magnetischen und elektrischen Feldes. An die bekannten Versuche mit Eisenfeilspänen braucht nur erinnert zu werden. Jedes Teilchen wird polarisiert und ordnet sich so ein, dafs die gröfste Länge in die Kraftlinie fällt. Durch leises Schütteln entsteht in den Kraftlinien gewissermafsen eine Kette kleiner Magnete. Das Nötige darüber findet man in den Lehrbüchern der Physik.

88) Konstruktion und Gleichung der Kraftlinien für das symmetrische Zweipunktsystem.

Bezeichnet man die Kurven, welche das System der Niveaulinien senkrecht durchsetzen, als die Kraftlinien des Problems, weil sie für jede Stelle die Richtung der Resultante (vergl. Stellung der Magnetnadel) angeben, so ist diese Definition praktisch ohne weiteres klar.

Nach obigem erhielt man die Niveaukurven des Problems durch die Diagonalkurven der potentiell gleichwertigen Niveauringe der beiden Einzelprobleme. Es steht zu vermuten, dafs die Kraftlinien des Problems sich aus den Diagonalkurven der von den potentiell gleichwertigen Kraftlinien der Einzelprobleme gebildeten Vierecke ergeben. Diese in der Regel für hinreichend gehaltene Vermutung bedarf des Beweises, der erst weiter unten gegeben werden soll.

Nach Nr. 56 erhält man die gleichwertigen Strahlen des Einpunkt-Problems mit Hilfe der Gleichung

$$\cos \vartheta_1 = c_1,$$

indem man c die Werte einer arithmetischen Reihe, z. B.

$$0, \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{2}{n}, \pm \frac{3}{n}, \pm \frac{4}{n}, \ldots$$

annehmen läſst, was in Figur 43 dargestellt war. Dies gelte für den Punkt M_1. Ebenso mache man es mit dem Punkte M_2 und der Gleichung

$$\cos \vartheta_2 = c_2.$$

Läſst man nun schrittweise in dem ersten Strahlenbüschel $\cos \vartheta_1$ um je $\frac{1}{n}$ abnehmen, im andern $\cos \vartheta_2$ um denselben Wert zunehmen, so bleibt die Summe

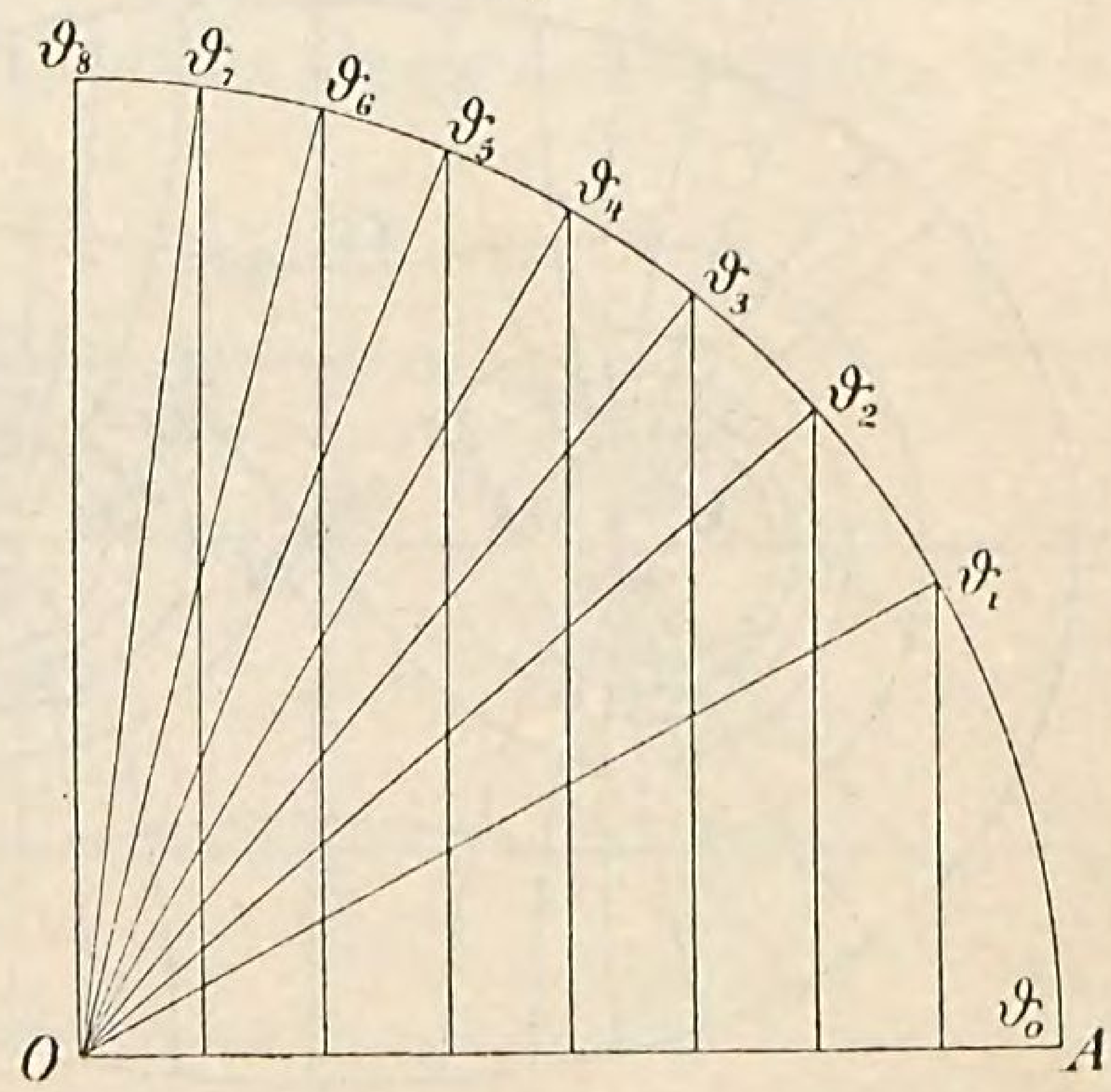
$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c_1 + c_2 = c$$

eine konstante Gröſse, und dem entsprechen die Diagonalkurven der Vierecke, die durch die beiden Strahlenbüschel bestimmt werden. Die Gleichung dieser Diagonalkurven ist also

$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c$$

und es steht zu vermuten, daſs diese zugleich die Kraftlinien des Problems sind. In Fig. 65 und 70 sind beide Arten von Diagonalkurven dargestellt. Fig. 64 giebt einen der Quadranten für jeden der Punkte M_1 und M_2 mit dem zugehörigen Strahlenbüschel an. Man vollende die Zeichnung und ziehe die Diagonalkurven der entstehenden Vierecke, um das Gesuchte mit beliebiger Genauigkeit zu erhalten.

Fig. 64.



Die Konstruktion mit Hilfe der beiden Strahlenbüschel reicht aus. Man kann aber auch folgendermaſsen verfahren.

In Fig. 60 sei $A_1 A_2 = c$ (jedoch < 2). Legt man den Teilpunkt P beliebig, nur mit der Einschränkung, daſs jeder Teil < 1 ist, so läſst sich wie früher $A_1 P$ und $A_2 P$ als OB_1 und OB_2 in den Einheitskreis eintragen, jedoch dort als Cosinuslinie

für die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 auffassen, die durch Verbindung der Lotpunkte C_1 und C_2 mit O entstehen. Durch die festen Punkte M_1 und M_2 lege man Parallele zu OC_1 und OC_2. Ihr Schnittpunkt giebt einen Punkt der Kurve

$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c.$$

Mit Hilfe beliebiger anderer Teilpunkte P erhält man weitere Punkte derselben Kurve.

Die Gleichung der neuen Kurvengruppe läfst sich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{y}{r_1} + \frac{y}{r_2} = c$$

oder

$$y = \frac{c r_1 r_2}{r_1 + r_2},$$

d. h., wenn die Massenpunkte in die Punkte ± 1 der X-Achse verlegt werden

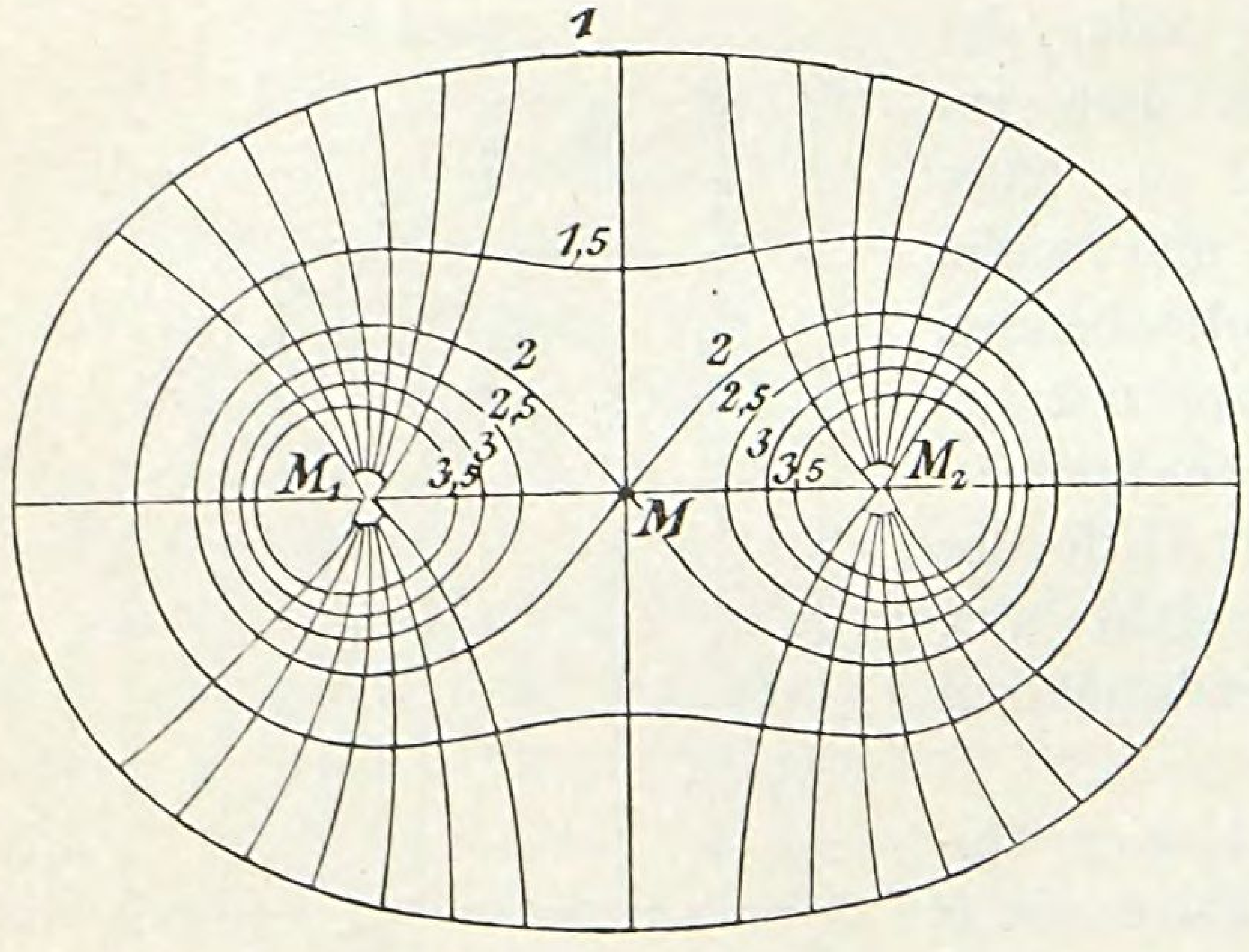
$$y = c \cdot \frac{\sqrt{[(x+1)^2 + y^2] \cdot [(x-1)^2 + y^2]}}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

oder

$$\frac{y}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} - c = 0.$$

In Figur 65 sind die Kurven im Verein mit den Niveaulinien dargestellt.

Fig. 65.



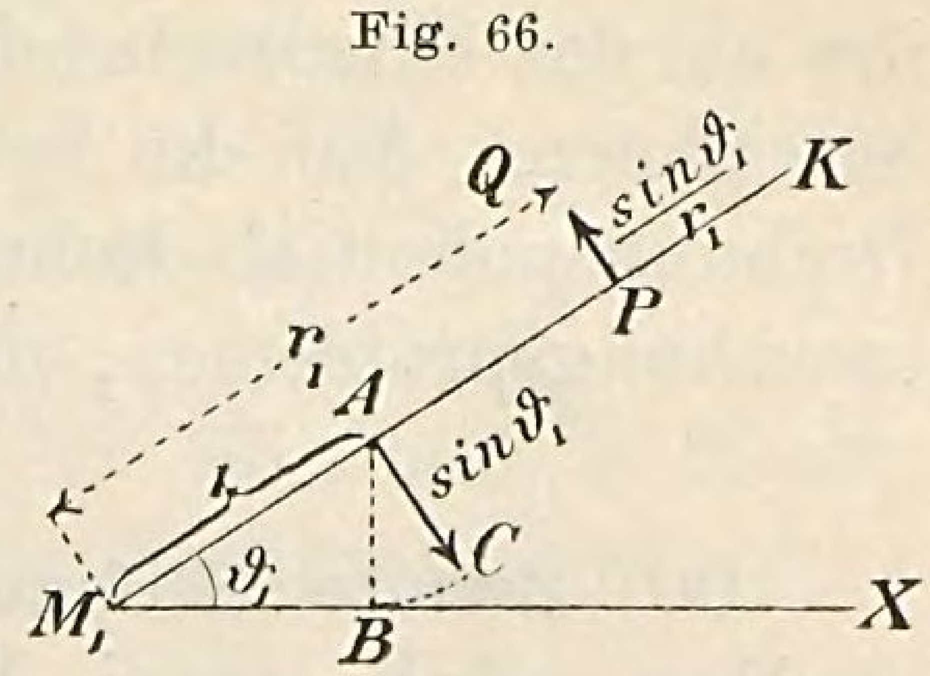
Kann nun nachgewiesen werden, dafs diese Kurven die Orthogonalkurven der Niveaulinien sind, so ist der Beweis dafür geliefert, dafs sie in der That die Kraftlinien darstellen. Geometrisch ist dies auf elementarem Wege nur umständlich zu zeigen. Um zum Ziele zu kommen, ziehe man die folgenden mechanischen Hilfsaufgaben heran, die auch aus anderen Gründen von Interesse sind.

89) Mechanische Hilfsaufgabe und das Drehungspotential.

Der durch M_1 gehende Vektor M_1K soll aus der Lage der positiven X-Achse nach der Richtung der positiven Y-Achse hin gedreht werden, jedoch soll dabei ein Widerstand überwunden werden, dessen Moment für jede Lage ϑ des Vektors den Wert $\sin\vartheta_1$ hat. Die zum Drehen nötige Arbeit soll berechnet und graphisch dargestellt werden.

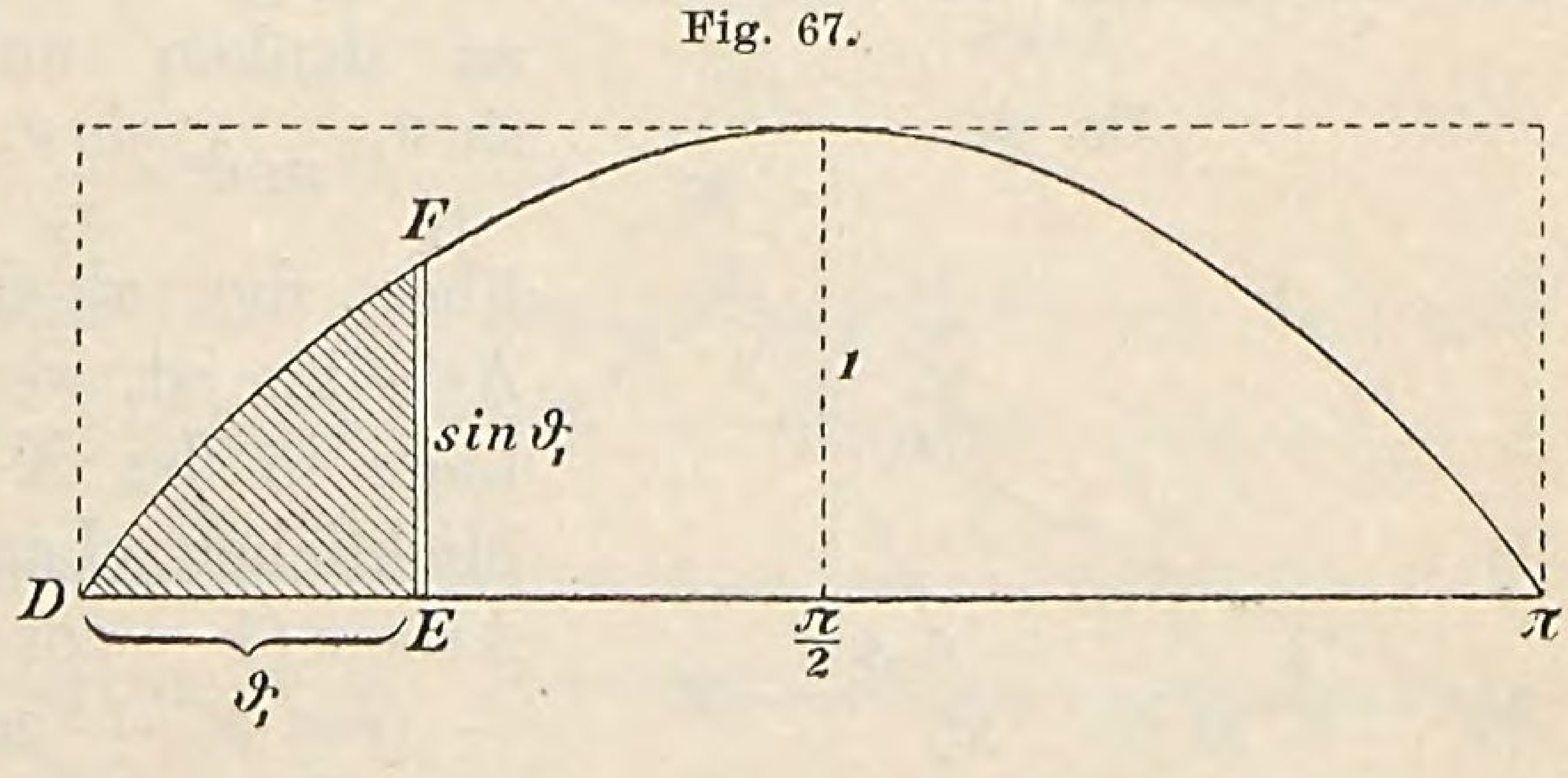
Auflösung. In Figur 66 sei M_1K der Vektor in der Lage ϑ_1 und $M_1A = 1$, so dafs $AB = \sin\vartheta_1 = AC$ ist. Die senkrecht gegen M_1K gerichtete Kraft $AC = \sin\vartheta_1$ hat in Bezug auf den Drehungspunkt M_1 das statische Moment $1 \cdot \sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_1$. Unten wird die zur Überwindung desselben nötige Kraft $PQ = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ für die beliebige Entfernung $M_1P = r_1$ gebraucht. Ihre Konstruktion ergiebt sich aus dem Hebelgesetz $r_1 : 1 = AC : PQ$. Die Arbeit wird durch die Hebelumsetzung nicht geändert, ist also für jeden Radius r_1 dieselbe.

Fig. 66.



Man erhält ihre graphische Darstellung, indem man die Peripherie des Einheits-Halbkreises gestreckt als Gerade zeichnet und für jeden Abstand $DE = \vartheta_1$ das Lot $EF = \sin\vartheta_1$ errichtet. Die Trapezfläche zwischen zwei Nachbarloten stellt dann die für ihren Abstand nötige Arbeit dar. Die Arbeit, die zur Drehung um den Bogen $\vartheta_1 = DE$ nötig ist, wird also durch die Fläche DEF dargestellt. Die gezeichnete Kurve ist bekanntlich eine Sinuskurve. Sowohl stereometrisch (schräger Cylinderschnitt) als auch durch Reihenberechnung läfst sich elementar zeigen, dafs die Fläche $DEF = \cos 0 - \cos\vartheta_1 = 1 - \cos\vartheta_1$ ist. Vgl. Method. Lehrbuch III. Denselben Wert hat also die zu berechnende Arbeit. Der Weg von P ist dabei vollständig gleichgültig. Um aus einer Lage ϑ_1' in eine Lage ϑ_1 zu gelangen,

Fig. 67.



ist die Arbeit $(1 - \cos\vartheta_1) - (1 - \cos\vartheta_1') = \cos\vartheta_1' - \cos\vartheta_1$ nötig. Ist $\vartheta_1' = 90^0$, so ist die nötige Arbeit gleich $\cos\vartheta_1$. Sie ist negativ oder positiv, je nachdem die Bewegung des Vektors eine

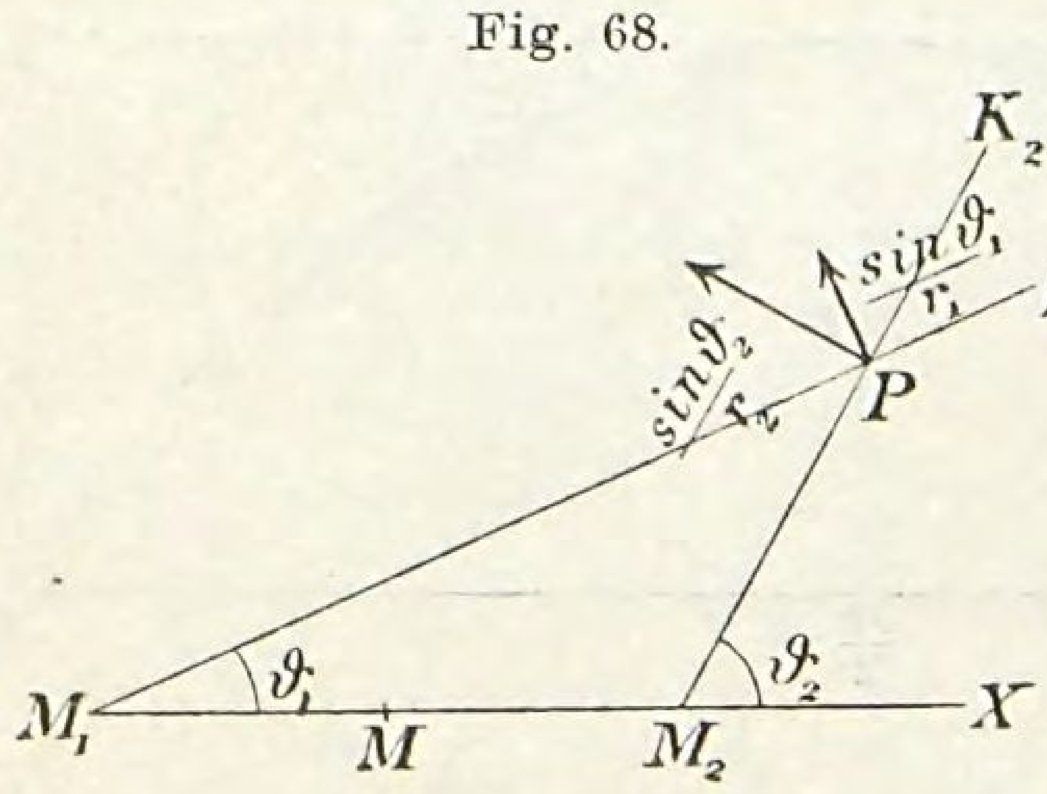
links- oder rechtsdrehende ist. Dabei ist der Widerstand als aktive Kraft zu betrachten. Jeder Vektor ist als eine Niveaulinie des Problems anzusehen, denn die Bewegung auf ihm selbst erfordert die Arbeit Null. Die Kraftlinien sind überall senkrecht gegen die Radien gerichtet, also Kreise. Im Verhältnis zum Newtonschen Anziehungsprobleme sind demnach die Kraftlinien und die Niveaulinien vertauscht worden.

Es findet nun folgende Analogie mit dem gewöhnlichen Potentialprobleme statt. Dort war $\frac{1}{r^2}$ die Anziehung oder der Widerstand, $\frac{1}{r}$ das Potential, d. h. die Arbeit, die dazu nötig ist, die Masseneinheit aus der Entfernung r in unendlich grofse Entfernung zu versetzen. Hier dagegen ist das Moment des Widerstandes gleich $\sin\vartheta$, die Arbeit aber, die nötig ist, den Vektor aus der Lage ϑ in die Lage 90^0 zu versetzen, ist gleich $\cos\vartheta$. Dieser Ausdruck steht also zu $\sin\vartheta$ in derselben Beziehung, wie $\frac{1}{r}$ zu $\frac{1}{r^2}$, man kann ihn als das entsprechende Potential, z. B. als das Drehungspotential bezeichnen. Auf die bedeutungsvolle Analogie zwischen Potential und Drehungspotential kommen wir unten, bei den sogenannten Vertauschungsproblemen, noch einmal zurück.

90) **Zweite Hilfsaufgabe.** Der Bewegung eines Punktes P stellen sich zwei Widerstandsmomente $\sin\vartheta_1$ und $\sin\vartheta_2$ entgegen, die sich auf Vektoren r_1 und r_2 beziehen, die um die festen Punkte M_1 und M_2 der X-Achse drehbar sind. Die zur Bewegung nötige Arbeit soll für beliebige Wege von P bestimmt werden.

Auflösung. Ist $M_1P = r_1$, und $MP = r_2$, so sind die zu überwindenden Kräfte senkrecht gegen die Vektoren angebracht zu denken und ihre Gröfsen sind $\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ und $\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}$. Nach dem Satze über die algebraische Addition der Arbeiten ist, wenn P aus irgend welcher Lage in der X-Achse nach der augenblicklichen Lage gelangen soll, die Arbeit $(1 - \cos\vartheta_1) + (1 - \cos\vartheta_2) = 2 - (\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)$ nötig. Um aus einer Lage ϑ_1', ϑ_2' in eine Lage ϑ_1, ϑ_2 zu gelangen, bedarf es der Arbeit $(2 - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2) - (2 - \cos\vartheta_1' - \cos\vartheta_2') = (\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2') - (\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)$. Für die Lage in der Mittelsenkrechten ist $\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2' = 0$, um also von dort

Fig. 68.



nach der Lage ϑ_1, ϑ_2 zu gelangen, ist die Arbeit $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2$ nötig.

Ist für zwei verschiedene Lagen die Summe der Cosinus dieselbe, so ist zur Bewegung von der einen zur andern die Arbeit Null nötig. Folglich: Die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ sind die Niveaulinien dieses Problems.

Damit haben die oben konstruierten Kurven eine bestimmte Deutung erhalten, die eigentlich beabsichtigte ergiebt sich aber aus folgender Aufgabe.

91) **Aufgabe.** Die Richtungen der Normalen und Tangenten für die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ zu bestimmen.

Auflösung. Um die Normale zu bestimmen, setze man die in P angreifenden Kräfte $\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ und $\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}$ nach dem Parallelogramm zusammen. Da uns jetzt nur die Richtung interessiert, gehe man von ihren Komponenten

$$\xi_1 = -\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}\sin\vartheta_1, \quad \eta_1 = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1}\cos\vartheta_1$$

$$\xi_2 = -\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}\sin\vartheta_2, \quad \eta_2 = \frac{\sin\vartheta_2}{r_2}\cos\vartheta_2$$

aus. (Dies giebt $p = \sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2}$.) Sind nun z. B. M_1 und M_2 die Punkte ± 1, so bestimmt sich die Richtung aus

$$\tan\gamma = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\xi_1 + \xi_2} = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2}{-\frac{1}{r_1}\sin^2\vartheta_1 - \frac{1}{r_2}\sin^2\vartheta_2} = -\frac{\frac{y(x+1)}{r_1^3} + \frac{y(x-1)}{r_2^3}}{\frac{y^2}{r_1^3} + \frac{y^2}{r_2^3}}$$

oder

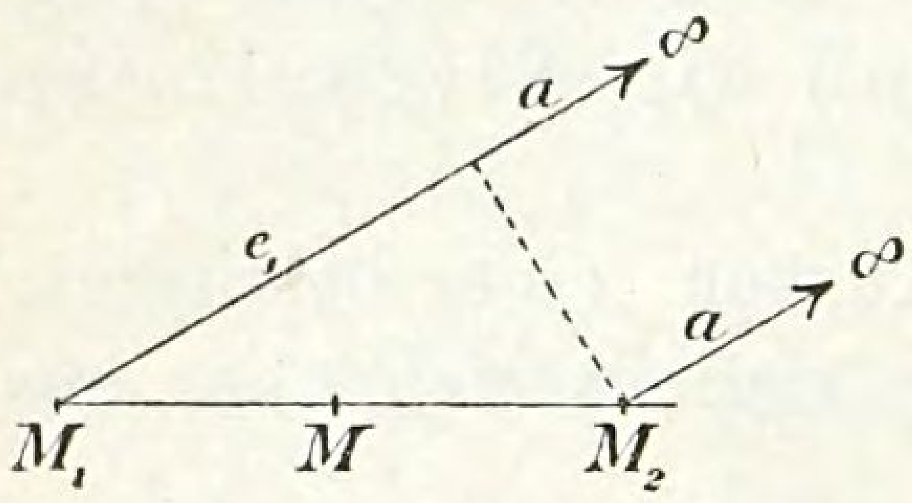
$$\tan\gamma = -\frac{\frac{x+1}{r_1^3} + \frac{x-1}{r_3^2}}{\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3}} = -\frac{1}{\tan\alpha} = \tan\beta.$$

Die Richtung der Normalen fällt also zusammen mit der der Tangente der Kurven $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$. Folglich: Die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 - c$ sind die Orthogonalkurven der Niveaulinien $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$, d. h. sie sind die Kraftlinien des symmetrischen Zweipunktsystems.*)

*) Einen andern Beweisgang findet man in der während des Druckes erschienenen zweiten Auflage von Börner, Lehrbuch der Physik für Realgymn. etc. auf Seite 376.

92) **Bemerkung** über die Asymptoten der Kraftlinien. Sind die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 einander gleich, so fällt der Schnittpunkt der Vektoren in unendliche Entfernung. Da beide Vektoren gleichberechtigt sind, ist er auf der Mittellinie des Parallelstreifens zu suchen. Diese durch M gehende Gerade ist die Asymptote der betreffenden Kraftlinie. Dies stimmt damit überein, dafs die Niveaulinien für gröfser werdende Entfernung und kleiner werdenden Potentialwert allmählich Kreisgestalt annehmen. Da Symmetrie gegen die Koordinatenachsen stattfindet, mufs M Mittelpunkt der unendlich grofsen Kreise sein.

Fig. 69.



Für die Asymptote jeder Kraftlinie ist $\cos\vartheta + \cos\vartheta = c$, also $\cos\vartheta = \frac{c}{2}\cdot$ Läfst man c Werte annehmen, die einer arithmetischen Reihe folgen, so nimmt auch $\frac{c}{2}$ solche an. Die Asymptoten teilen also die Ebene ebenso ein, wie vorher die von jedem der Massenpunkte ausgehenden Radien, nur ist die Anzahl der Kraftröhren die doppelte. Läfst man nun das System der Niveau- und Kraftlinien um die X-Achse rotieren, so geben die Asymptoten, also auch die Kraftlinien auf der unendlich grofsen Kugelfläche Flächen gleicher Zonen. Führt man also durch die X-Achse Normalschnitte, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, so wird die unendliche Kugelfläche in flächengleiche Rechtecke eingeteilt.

Von M_1 und M_2 gehen nach dort die von Faraday und Maxwell eingeführten Kraftröhren rechteckigen Querschnittes. Der ganze Raum ist in rechtwinklige Zellen eingeteilt, die potentiell gleichwertig sind. In den neueren Lehrbüchern der Physik ist dies auf Grund experimenteller Anschauungen dargestellt. Das Obige aber giebt eine theoretische Ableitung dieser Dinge in rein elementarer Darstellung.

Die Hauptsache ist, dafs die Einteilung der unendlich grofsen Kugel in flächengleiche Felder ganz dieselbe ist, wie bei dem Einpunktproblem, also ebenso, als ob die Masse 2 im Punkte M koncentriert wäre. Diese Bedeutung des Schwerpunktes M wird bei den allgemeinen Problemen in noch höherem Grade zur Geltung kommen.

Ebenso, wie bei den Niveaulinien, kann man auch hier die Diagonalkurven als den Ausdruck der Addition der beiden Drehungspotentiale betrachten, so dafs sie der Gleichung $V = V_1 + V_2 = c$ genügen. Die betreffenden Betrachtungen lassen sich wörtlich wiederholen.

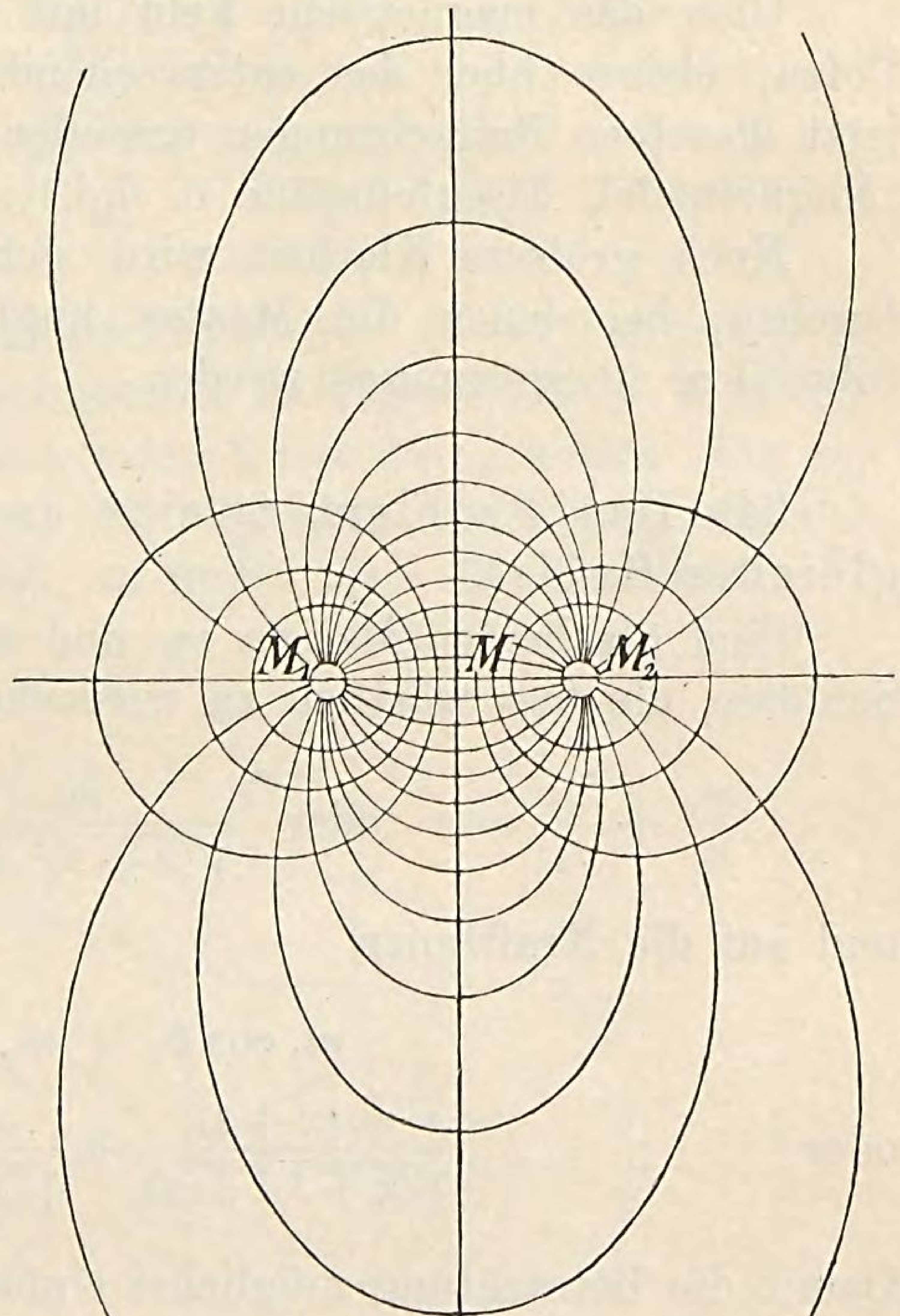
93) Der Fall gleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten.

Man denke sich die Punkte ± 1 der X-Achse mit Elektrizitätsmengen ± 1 geladen, wobei das Vorzeichen die Ungleichartigkeit bedeuten soll. Dann wird der mit -1 geladene freie Punkt von M_1 mit der Kraft $\frac{1}{r_1^2}$ angezogen, von M_2 mit $\frac{1}{r_2^2}$ abgestoſsen. Die Einzelpotentiale sind $\frac{1}{r_1}$ und $-\frac{1}{r_2}\cdot$ Nach denselben Schlüssen wie vorher erhalten die Gleichungen der Niveau- und Kraftflächen die Formen:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}=c \\ \text{oder} \\ \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \\ \quad -\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=c\end{array}\right\} \quad (5),$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2=c \\ \text{oder} \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \\ \quad -\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=c\end{array}\right\} \quad (6).$$

Fig. 70.



Die Konstruktion geschieht entweder mit Hilfe der anderen Gruppen von Diagonalkurven der Einzelsysteme, oder, der zweiten Methode entsprechend, mit Hilfe einer Linie $A_1 A_2$, nur ist der Teilpunkt P auſserhalb zu wählen. Die zweifache Symmetrie ist selbstverständlich. Mit Ausnahme der beiden Symmetrieachsen verlaufen alle Kurven als geschlossene Ovale im Endlichen, so daſs von den eigentlichen Kurven keine eine Asymptote besitzt. Die Grenzfälle

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}=0,\quad \cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2=0,\quad \cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2=2$$

führen auf die Geraden des Netzes.

Nimmt in Gl. (5) c die Werte einer arithmetischen Reihe, z. B. 0, 1, 2, 3 ... an, während in Gl. (6) c Werten wie

$$0, \pm\frac{2}{n}, \pm\frac{4}{n}, \pm\frac{6}{n}, \cdots \pm\frac{2n}{n}$$

entspricht, so erhält man die Einteilung in gleichwertige Felder. In M_1 und M_2 ist für jede Kraftlinie $\cos\vartheta_1 - \cos(180^0 - \vartheta_1) = 2\cos\vartheta_1 = c$, also der Schnittwinkel dort aus $\cos\vartheta_1 = \frac{c}{2}$ und $\cos\vartheta_2 = -\frac{c}{2}$ zu bestimmen. Die Cosinus der Schnittwinkel in M_1 und M_2 folgen somit einer arithmetischen Reihe. Die Tangenten in diesen Punkten würden daher auf der unendlich grofsen Kugel, die hier keine Bedeutung hat, flächengleiche Zonen geben. Dies erleichtert das Zeichnen des Kurvensystems.

Über das magnetische Feld mit gleichen und entgegengesetzten Polen, ebenso über das entsprechende elektrische Feld, lassen sich jetzt dieselben Betrachtungen anstellen, wie bei dem vorigen Problem. (Magnetnadel, Eisenfeilspäne u. dgl.)

Noch gröfsere Klarheit wird sich bei der Behandlung der Fälle ergeben, bei denen die Massen ungleich sind. Zu diesen soll in folgendem übergegangen werden.

94) Das Problem zweier anziehender Massen von ungleicher Gröfse.

Sind die beiden Massen m_1 und m_2 ungleich, so führen dieselben Schlüsse, die fast wörtlich zu wiederholen sind, auf die Niveauflächen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c$$

und auf die Kraftlinien

$$\left.\begin{aligned} m_1\cos\vartheta_1 + m_2\cos\vartheta_2 = c \\ \text{oder}\quad \frac{m_1(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{m_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \end{aligned}\right\}.$$

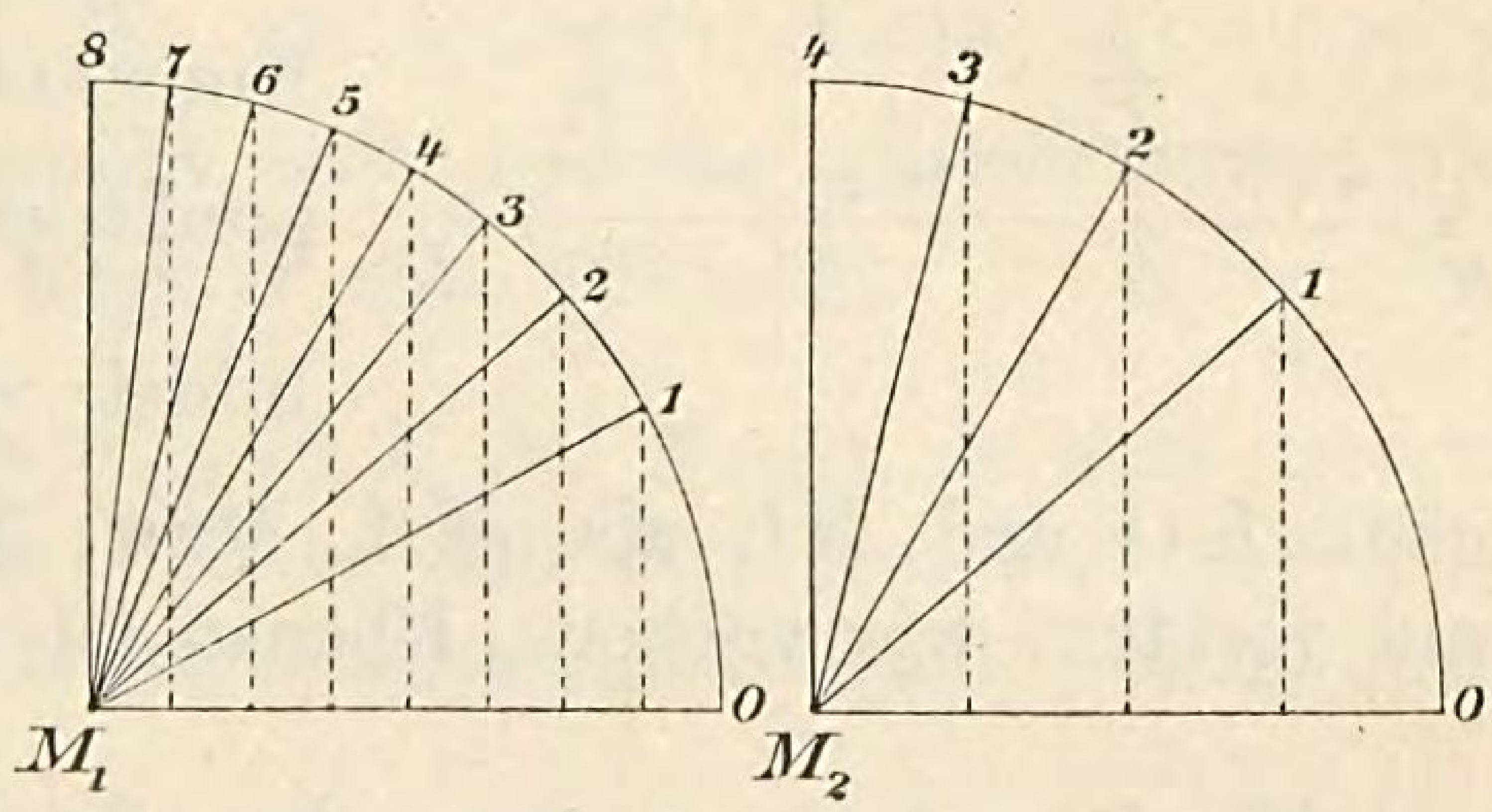
Damit die Betrachtung möglichst einfach werde, soll der Fall $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ als Beispiel eingehender untersucht werden.

Erste Konstruktion. Für den Punkt M_1 denke man sich zunächst die koncentrische Kreisschar $\frac{2}{r_1} = c_1$ so gezeichnet, dafs c z. B. der arithmetischen Reihe $0, d, 2d, 3d, \ldots$ folgt, für M_2 die Kreisschar $\frac{1}{r_2} = c_2$, wobei c_2 derselben arithmetischen Reihe folgt. Zieht man diejenige Gruppe von Diagonalkurven, die in der einen Kreisschar nach innen, in der andern nach aufsen geht, so heben sich von Punkt zu Punkt zwei entgegengesetzte Differenzen auf, und der Ausdruck

$\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ bleibt eine konstante Gröſse c, wie es in dem früher behandelten Falle gleicher Massen geschah. Dies giebt die Niveaulinien.

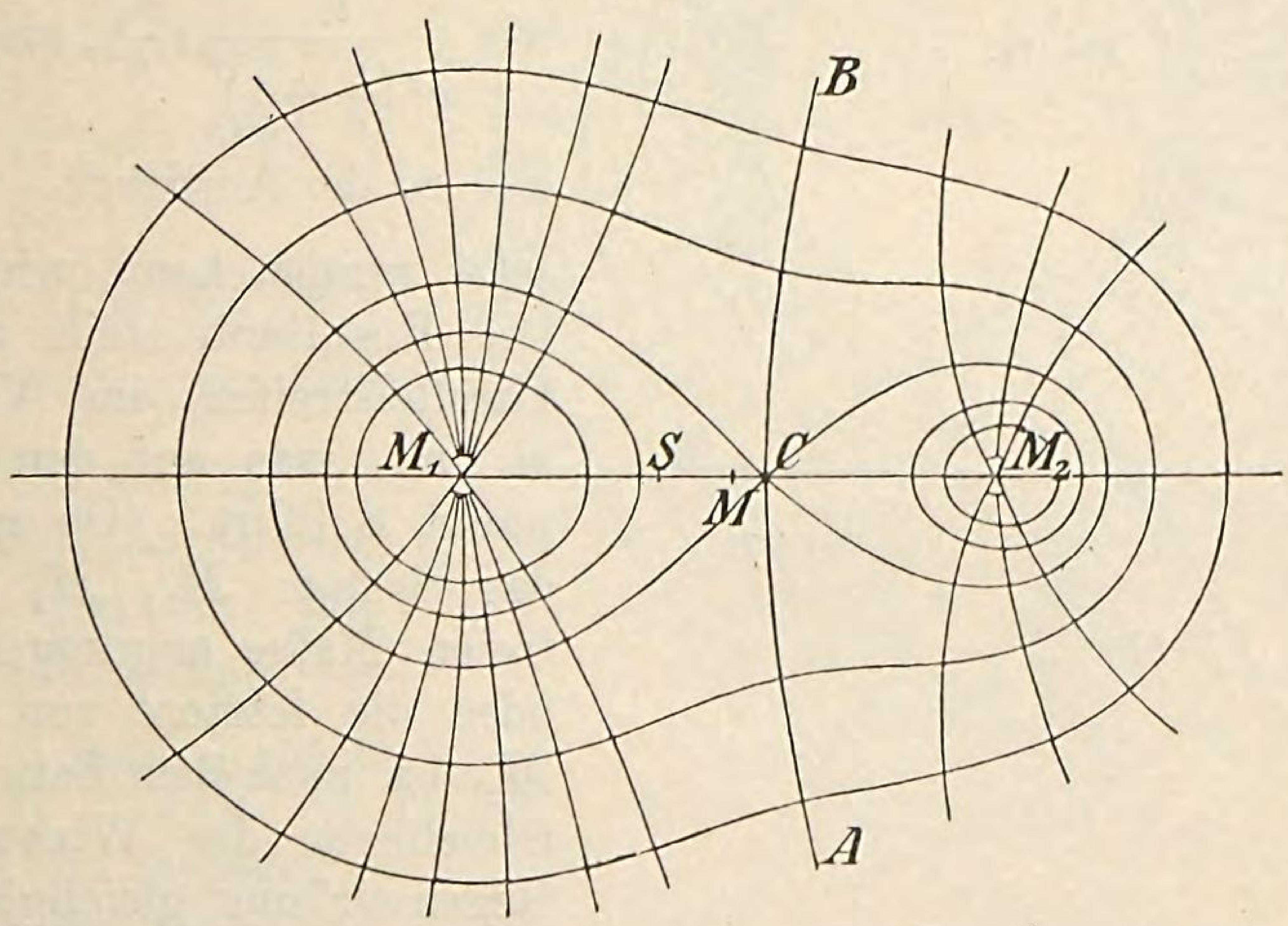
Die Schar M_1 enthält dieselben Kreise, wie die Schar M_2, aber auſserdem in jedem Ringe noch einen durch Interpolation gefundenen Kreis, im ganzen also die doppelte Zahl. Die Schar M_1 kann man sich also aus zwei Scharen bestehend denken, deren jede der Masse 1 entspricht, von denen aber die zweite mit einem anderen, durch Interpolation gefundenen Radius beginnt. Vgl. Fig. 11 und 12.

Fig. 71.



Ebenso verfahre man mit den Strahlenbüscheln. Bei M_1 folge $2 \cos \vartheta_1 = c_1$ einer arithmetischen Reihe, bei M_2 folge $\cos \vartheta_2 = c_2$ derselben arithmetischen Reihe. In der Zeichnung ist dies durch die Einteilung des horizontalen Radius in 8 bezw. 4 gleiche Teile erfolgt. Vervollständigt man jeden Kreis und zeichnet man die eine Gruppe von Diagonalkurven, die das eine Büschel geradläufig, das andere rückläufig durchkreuzt, so findet man die Kraftlinien.

Fig. 72.

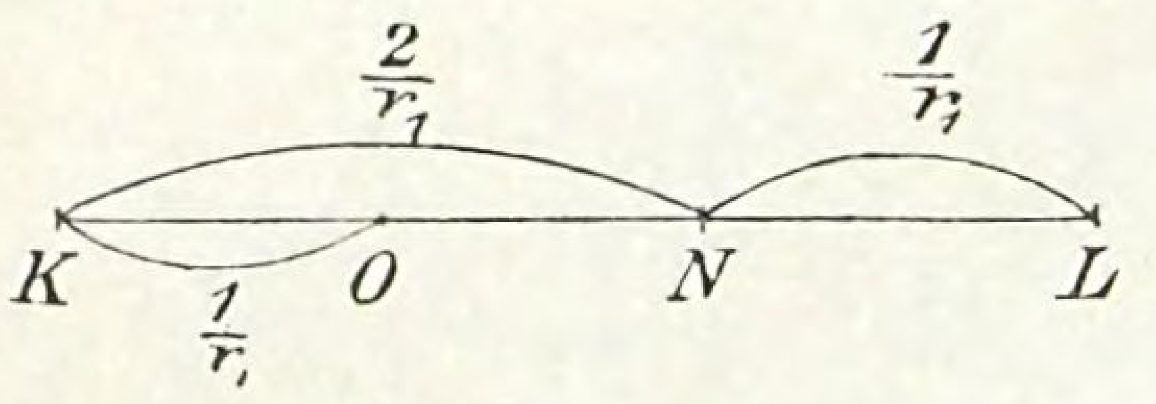


Durch Rotation um $M_1 M_2$ erhält man die Niveauflächen und Kraftflächen und durch Einführung von Meridianschnitten, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, die potentiell gleichwertige Zelleneinteilung des Raumes. In Fig. 72 ist das System skizziert.

Hätte es sich um $m_2 : m_1 = 3 : 1$ gehandelt, so hätte man bei M_1 die dreifache Anzahl von Kraftröhren wie bei M_2 erhalten. Allgemein handelt es sich um das Verhältnis $m_2 : m_1$ bei den Massen wie bei den Kraftröhren. Damit ist eine der wichtigsten von Faradays Behauptungen bewiesen.

Zweite Konstruktionsmethode. Man verfahre ähnlich, wie in Nr. 82.

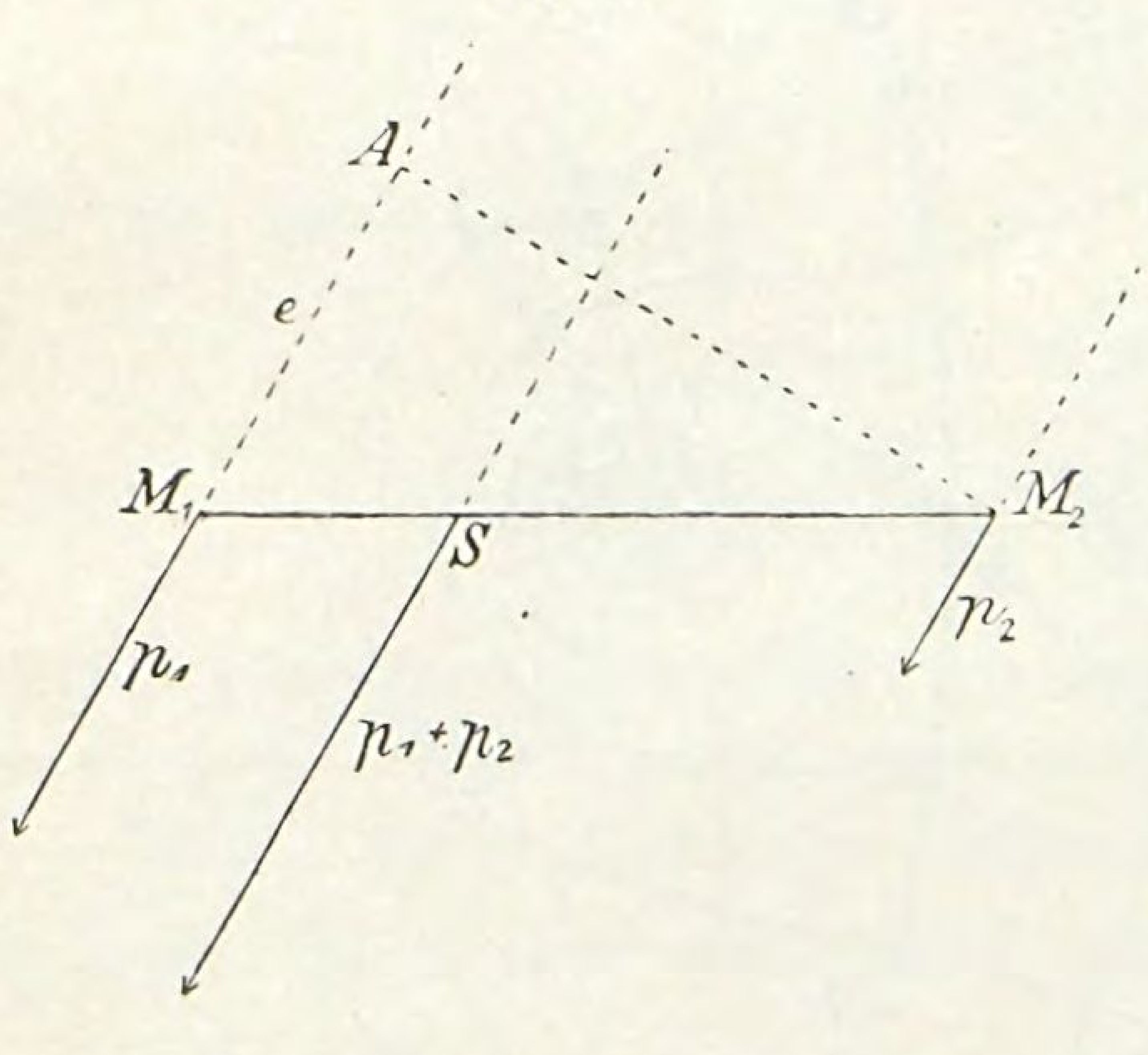
Fig. 73.



Ist $KL = c$, Fig. 73, die gewählte Konstante und N ein beliebiger Teilpunkt, so setzt man $KN = \frac{2}{r_1}$, $NL = \frac{1}{r_2}$, bildet durch Halbierung $KO = \frac{1}{r_1}$, trägt KO und NL als MA_1 bezw. MA_2 in den Einheitskreis ein und verfährt wie vorher. Ebenso ist es bei den Kraftlinien.

95) Die Asymptoten des Problems. Jede der Kraftlinien hat eine Asymptote, die nach dem im Unendlichen liegenden Schnittpunkte je zweier paralleler Strahlen hin gerichtet ist. Es wird behauptet, jede der Asymptoten gehe durch den Schwerpunkt S der Massen M_1 und M_2, der im Beispiele die Gerade $M_1 M_2$ im Verhältnis $1 : 2$ teilt. Für unendliche Entfernung $a = \infty$ sind nämlich die Kräfte parallel und verhalten sich nach Fig. 74 wie $\frac{m_1}{(e+a)^2} : \frac{m_2}{a^2}$ oder wie $\frac{m_1}{a^2\left(\frac{e}{a}+1\right)^2} : \frac{m_2}{a^2}$, also, da für $a = \infty$ der Ausdruck $\frac{e}{a} = o$ gesetzt werden kann, wie $m_1 : m_2$. Die Resultante teilt also den Parallelstreifen im Verhältnis $m_2 : m_1$, was auf den Schwerpunkt S führt. (Ob man sich das System M_1, M_2 von der freien Masse angezogen denkt, oder die letztere von M_1 und M_2, ist nach dem Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung gleichgültig.)

Fig. 74.

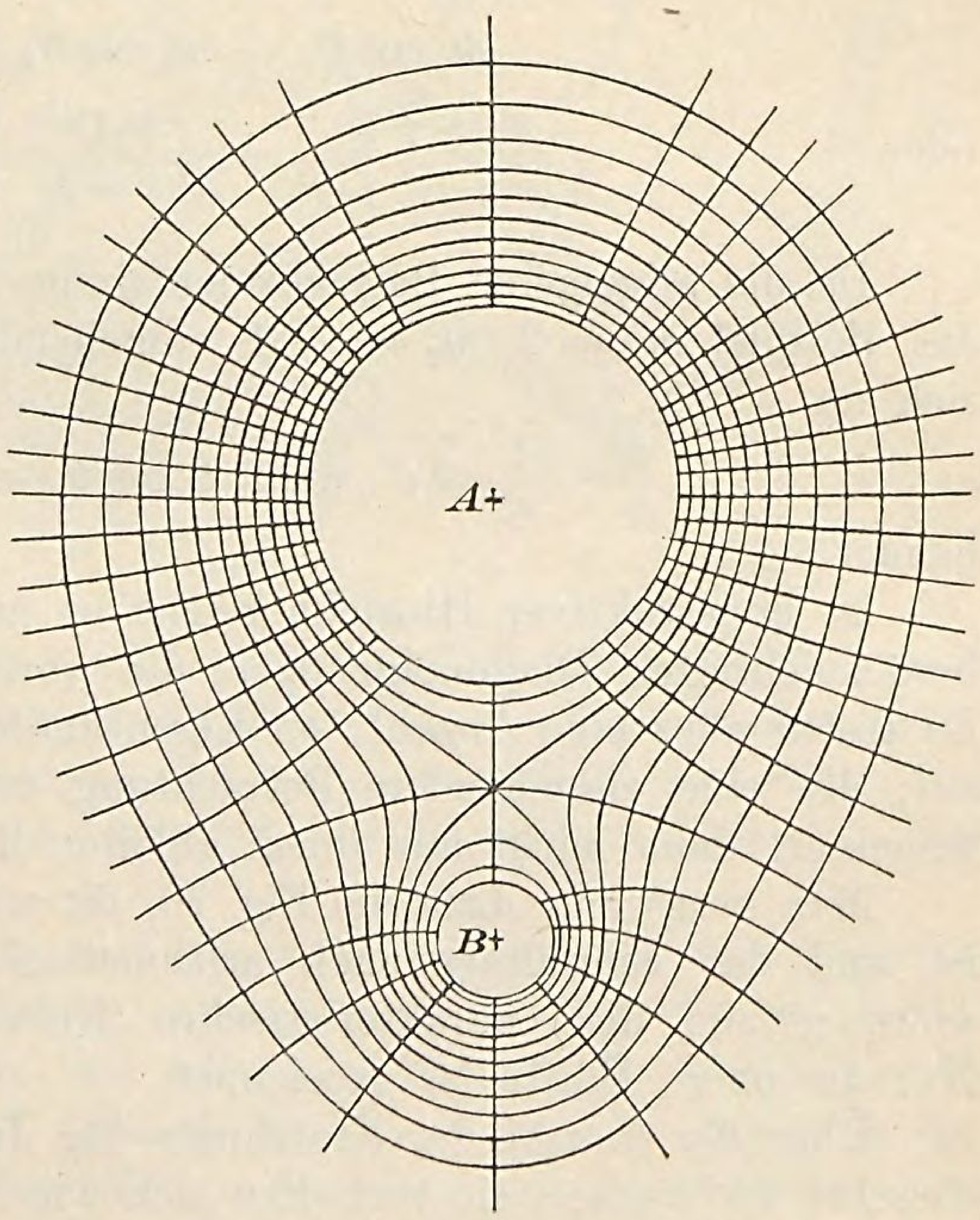


Da für die Asymptoten gebenden Strahlen $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ ist, so folgt für den unendlichen Punkt jeder Kraftlinie eine Gleichung $2 \cos \vartheta + \cos \vartheta = c$ oder $3 \cos \vartheta = c$, also $\cos \vartheta = \frac{c}{3}$. Dies folgt ebenso, wie c einer arithmetischen Reihe. Die um S zu schlagende un-

endlich grofse Kugel, die der Asymptoten wegen zu den Niveauflächen gehört, wird also durch die aus den Kraftlinien durch Rotation um $M_1 M_2$ entstehenden Kraftflächen in gleiche Zonen eingeteilt, von denen $\frac{2}{3}$ dem Bereiche von M_1, $\frac{1}{3}$ dem von M_2 zufallen. (Im allgemeinen handelt es sich nicht um das Verhältnis $2:1$, sondern um $m_1 : m_2$.) Denkt man sich also um S einen Kreis geschlagen, und teilt man seinen horizontalen Durchmesser in 3 gleiche Teile ein, so giebt das Lot in dem von M_1 um $\frac{2r}{3}$, von S um $\frac{2r}{3} - r = \frac{r}{3}$ entfernten Teilpunkte den Kreispunkt, nach dem die teilende Asymptote gerichtet ist. Aus $\cos\vartheta = \frac{1}{3}$ folgt $\vartheta = \sim 70^0\, 32'$.

96) **Bemerkungen.** Ist in Fig. 72 C der Punkt, in dem die zugehörige Kraftlinie die X-Achse trifft, so dafs $M_1 CB\infty$ und $M_2 CB\infty$ die beiden ausgezeichneten und teilweise zusammenfallenden Kraftlinien sind, so treffen sich in C zugleich die beiden zugespitzten Ovale der Niveaulinien, durch welche die zweiteiligen und die einheitlichen Niveaulinien voneinander geschieden werden. Es handelt sich um die Gleichgewichtsstelle, die durch $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{r_2^2}$ oder $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{(M_1 M_2 - r_1)^2}$ oder endlich $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{(2 - r_1)^2}$ sich so bestimmt, dafs $M_1 C = 1{,}172$, $M_2 C = 0{,}828$ ist.

Fig. 75.



Da man für jede Stelle die Resultante der Kräfte $\frac{2}{r_1^2}$ und $\frac{1}{r_1^2}$ nach Gröfse p und Richtung α leicht berechnen und konstruieren kann, was ganz ebenso wie früher geschieht, so sind auch die Normalen und Tangenten der beiden Kurvenscharen leicht zu berechnen und zu konstruieren. Die Kurven $p = c$ sind die Kurven gleicher Intensität, die Kurven $\tan\alpha = c$ solche gleicher Kraftrichtung.

Über diese Kurven und über das Verhalten der Magnetnadel im magnetischen Felde, über das betreffende elektrische Feld, über die Ozeane bei kugelförmigen Weltkörpern vom Massenverhältnis 2 : 1, die starr miteinander verbunden sind, stelle man dieselben Betrachtungen an, wie vorher.

Fig. 75 stellt den Fall der Ladungen $A = 20$, $B = 5$ nach einer Maxwellschen Zeichnung dar. Die Zahlen bedeuten jedesmal die Anzahl der durch Umdrehung der Figur entstehenden Zonen, die also halb so grofs ist, wie die der gezeichneten Sektoren.

97) Der Fall ungleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten in zwei festen Punkten.

Die früheren Schlüsse führen bei entsprechender Anordnung auf Gleichungen:

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = c \text{ oder } \frac{m_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \tag{7},$$

oder

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cos\vartheta_1 - m_2 \cos\vartheta_2 = c \\ \frac{m_1(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{m_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \end{aligned}\right\} \tag{8}.$$

Da die allgemeine Betrachtung einige Schwierigkeiten bietet, sei das Beispiel $m_1 = 2$, $m_2 = -1$ eingehender dargestellt, so dafs es sich um

$$\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c \quad \text{und} \quad 2\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = c$$

handelt.

In konstruktiver Hinsicht reicht es aus, die beiden noch nicht berücksichtigten Diagonalgruppen des vorigen Systems zu zeichnen. Es treten aber eine Anzahl von Eigentümlichkeiten bei diesen Kurven auf, die eine eingehendere Betrachtung erfordern, da sich das Allgemeinere dann leicht aus ihnen ableiten läfst.

Man vergleiche dazu die Fig. 76, die nur als Skizze zu betrachten ist und der Einteilung nach arithmetischer Reihe nicht folgt, da sonst gerade die charakteristischen Kurven hätten fehlen können. Nur die obere Hälfte ist gezeichnet.

Über die Anzahl der Kraftlinien für die Punkte M_1 und M_2 gilt dasselbe wie vorher, sie verhalten sich wie 2 : 1. Nur die Hälfte geht von M_1 nach M_2, die andere Hälfte geht ins Unendliche und diese hat Asymptoten.

Für die Asymptoten handelt es sich um parallele Strahlen der beiden Büschel, also um $\vartheta_1 = \vartheta_2$, so dafs für die unendlich fernen Punkte der Kraftlinien die Gleichung übergeht in

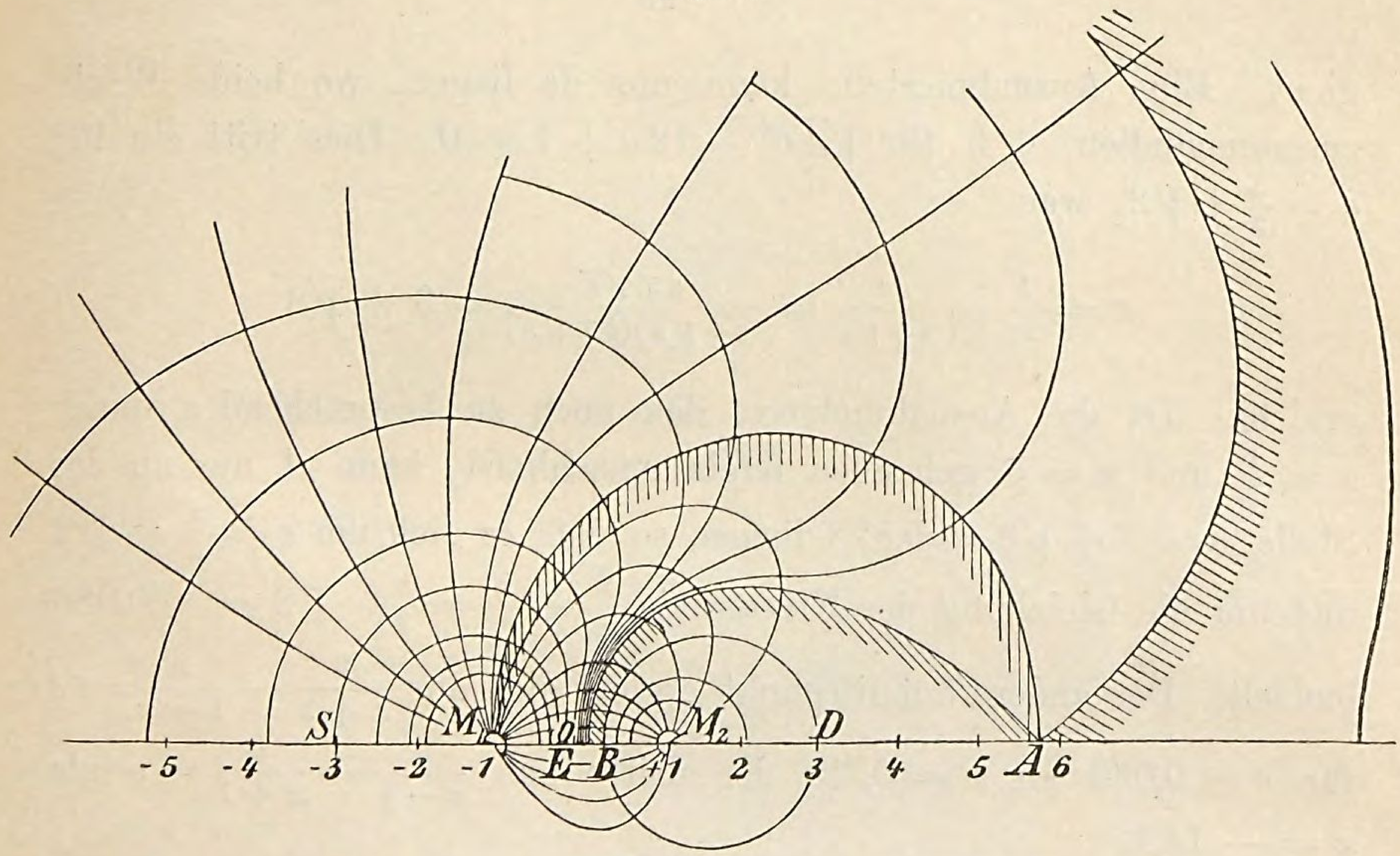
$$2 \cos \vartheta - \cos \vartheta = c$$

oder in

$$\cos \vartheta = c.$$

Diese Asymptoten gehen aus denselben Gründen, wie früher, durch den Schwerpunkt S, der aber aufserhalb $M_1 M_2$ liegt, weil in M_1 eine Masse oder Kraft 2, in M_2 eine entgegengesetzte Masse oder Kraft 1 zu denken ist. Dabei ist nach dem Hebelgesetze $SM_1 = \frac{1}{2} SM_2$.

Fig. 76.



Zu den Niveauflächen gehört eine unendlich grofse Kugel mit S als Mittelpunkt. Läfst man c die Werte einer arithmetischen Reihe $0, d, 2d, 3d, \ldots$ annehmen, so erhält man wie früher eine Einteilung dieser Kugel in flächengleiche Streifen, wie die potentiell gleichwertige Einteilung es erfordert.

Zwischen den nach M_2 und den nach dem Unendlichen gehenden Kraftlinien mufs, wie früher, eine liegen, die als Grenze beiden Gruppen zugleich angehört und sich dann spaltet. In der Zeichnung ist es die von M_1 nach A gehende Kurve, die bei M senkrecht aufsteigt, bei A senkrecht aufsetzt, sich dort spaltet und einen Arm nach ∞, den anderen nach M_2 schickt. In A trifft sie mit einer ausgezeichneten Niveaulinie zusammen, die ebenfalls die Grenzkurve zwischen zwei Gruppen von Niveaulinien ist. Die links davon gezeichneten Niveaulinien umschliefsen nur den Punkt M, die der andern Gruppe bestehen aus je zwei getrennten Ovalen, von denen das eine

den Punkt M_2, das andere die beiden Punkte M_1 und M_2 zugleich umschliefst. Die Grenzkurve besteht aus zwei zugespitzten Ovalen, die sich in A mit den Spitzen berühren, nur ist die eine Spitze als konvex, die andere als konkav aufzufassen.

Besonders wünschenswert ist die Bestimmung von A. Für $y = 0$ geht $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c$ über in $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = c$, was

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{4c^2 - 12c + 1}}{2c}$$

giebt. Eine Ausnahmestelle kann nur da liegen, wo beide Werte zusammenfallen, d. h. für $\sqrt{4c^2 - 12c + 1} = 0$. Dies tritt ein für $c = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$, was

$$x = \frac{1}{2c} = \frac{1}{3 \pm \sqrt{8}} = \frac{3 \mp \sqrt{8}}{(3 \pm \sqrt{8})(3 \mp \sqrt{8})} = 3 \pm \sqrt{8}$$

ergiebt. Da die Ausnahmekurve den noch zu besprechenden durch $x = \frac{1}{3}$ und $x = 3$ gehenden Kreis umschliefst, kann A nur an der Stelle $x = 3 + \sqrt{8} = 5{,}828$ liegen, so dafs es sich um $c = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ und um die Gleichung der Niveaulinie $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \sim 0{,}086$ handelt. Der andere Schnittpunkt ergiebt sich aus $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{1-x} = c$ für $c = 0{,}086$ als $x = 0{,}32$, der dritte aus $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = c$ als $x = -14{,}1$.

Dafs zu den Niveaulinien ein Kreis gehört, folgt aus $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0$ für $c = 0$, d. h. aus $\frac{r_1}{r_2} = 2$. Es ist der Kreis, dessen Durchmesser BD durch die Punkte bestimmt wird, welche die Strecke $M_1 M_2$ innerlich und äufserlich im Verhältnis $2:1$ teilen, so dafs $M_1 B = \frac{2}{3} M_1 M_2$ und $M_1 D = \frac{3}{2} M_1 M_2$ ist. M_1, B, M_2 und D sind harmonische Punkte.

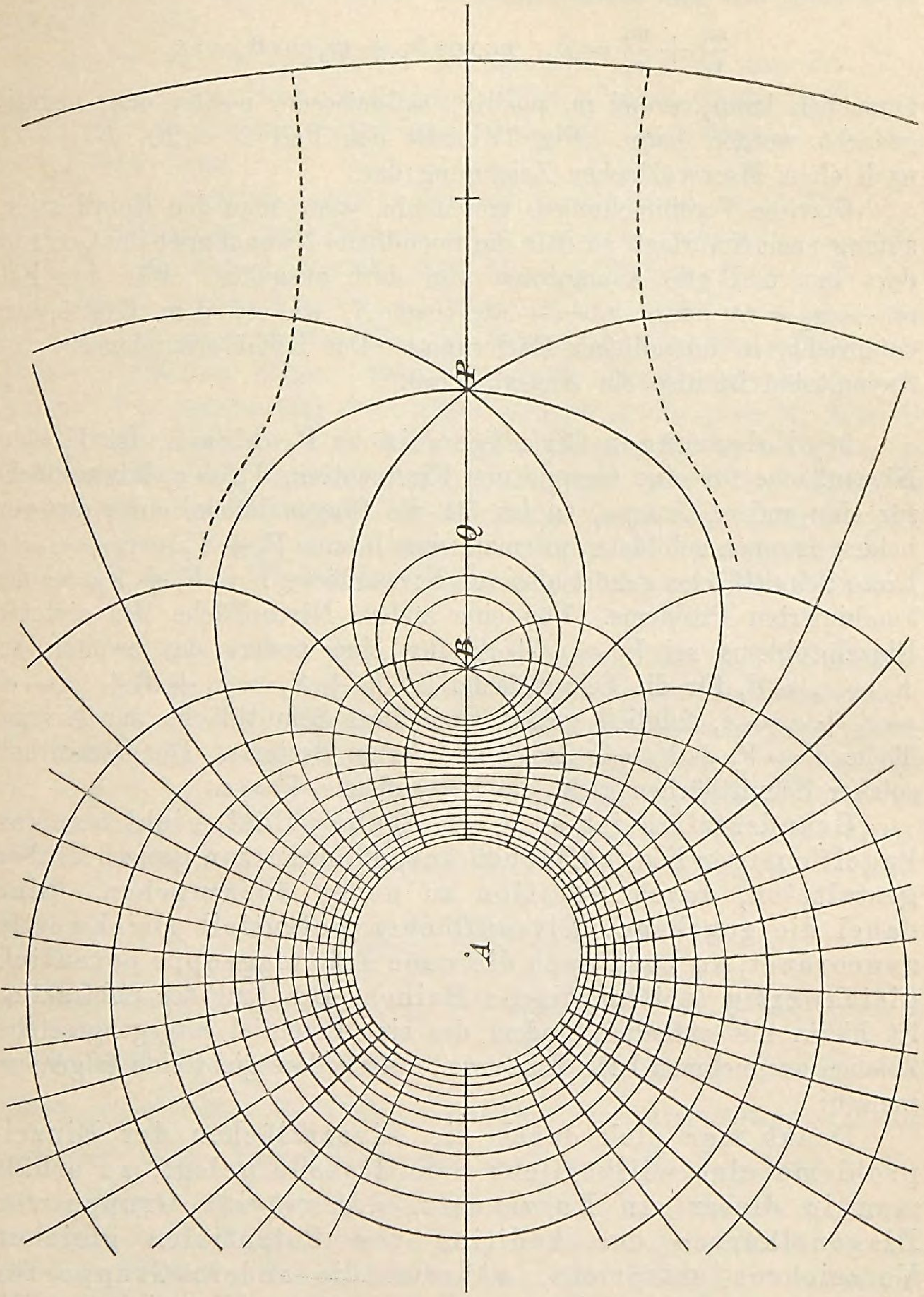
Da für die mit der X-Achse zusammenfallende Asymptote $\cos\vartheta = 1$ ($\vartheta = 0$) ist, so ist $2\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = 1$ die Ausnahmekurve unter den Kraftlinien.

Über die Asymptoten und die Neigungen der Kraftlinien in M_1 und M_2 lassen sich noch Betrachtungen einfacher Art anstellen, auf die hier verzichtet werden soll.

Ist das Verhältnis der Ladungen von M_1 und M_2 allgemeiner $m_1 : (-m_2)$ und ist m_1 absolut gröfser als m_2, so gehen m_2 der von M_1 ausstrahlenden m_1 Kraftröhren nach M_2,

der Rest $m_2 - m_1$ geht nach dem Unendlichen. Die zu den Niveauflächen gehörige unendlich grofse Kugel mit S als Centrum

Fig. 77.



wird durch die Kraftflächen wiederum in flächengleiche Streifen eingeteilt, genau so, als ob in S als Gesamtmasse $m_1 - m_2$ angebracht wäre.

Die Analogie zwischen den Zweipunktproblemen für gleichartige und ungleichartige Ladungen wird demnach doch eine derartige, daſs man beide mit den Gleichungen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c, \quad m_1 \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2 = c$$

abmachen kann, wobei m_1 positiv, m_2 entweder positiv oder negativ gedacht werden kann. Fig. 77 stellt den Fall $A = 20$, $B = -5$ nach einer Maxwellschen Zeichnung dar.

Gewisse Vereinfachungen treten ein, wenn man den Koordinatenanfang nach S verlegt, so daſs die unendliche Niveaukugel ihr Centrum dort hat und alle Asymptoten von dort ausgehen. Für den Fall $m_1 + m_2 = 0$ oder $m_1 = -m_2$ liegt S, wie es dem Kräftepaare entspricht, in unendlicher Entfernung. Das Nichtvorhandensein von Asymptoten ist also ein Ausnahmefall.

98) Folgerungen für allgemeinere Probleme. Ist $V_1 = c_1$ Niveaufläche für eine Gruppe von Kraftcentren, $V_2 = c_2$ Niveaufläche für eine andere Gruppe, so ist für die Diagonalfläche eines der von beiden Gruppen gebildeten prismatischen Räume $V_1 + V_2 = c_1 + c_2 = c$. Diese Schnittfläche gehört also zur Niveaufläche $V = V_1 + V_2 = c$ des kombinierten Problems. Für eine andere Niveaufläche des ersteren Einzelproblems sei $V_1 = c_1 + d$, für eine andere des zweiten sei $V_2 = c_2 - d$, für die Schnittfläche ist $V_1 + V_2 = (c_1 + d) + (c_2 - d) = c_1 + c_2 = c$, folglich gehört auch diese Schnittfläche zur Niveaufläche $V = V_1 + V_2 = c$ des kombinierten Systems. Die Gesamtheit solcher Schnittflächen giebt die Niveaufläche $V = c$.

Grundsätzlich ist so die Aufgabe gelöst, nicht nur von kugelförmigen Niveauflächen aus, sondern von ganz beliebig gestalteten, durch Addition zu neuen überzugehen. Sind dabei die gegebenen Niveauflächen potentiell gleichwertig angeordnet, so wird auch die neue Flächengruppe potentiell gleichwertig (arithmetische Reihe). Der Fall der Subtraktion ist hierin mit enthalten, indem das eine Potential entgegengesetztes Zeichen anzunehmen hat. Eine zweite Methode ergiebt sich folgendermaſsen:

Denkt man sich durch die Niveauflächen der Einzelprobleme eine willkürliche Schnittebene gelegt, so erhält man in dieser ein Kurvennetz, dessen eine Gruppe von Diagonalkurven der Addition von Potentialen gleichen Vorzeichens entspricht, während die andere Gruppe für Addition von Potentialen entgegengesetzten Vorzeichens gilt.

An den kugelförmigen Niveauflächen kann man sich diese Sätze klar machen, um sie dann auf ganz allgemein gestaltete zu über-

tragen. Orthogonal gehen durch die Schar der neuen Niveauflächen die Kraftlinien. Die Kraftröhren des kombinierten Problems können aus denen der Einzelprobleme ebenfalls durch Diagonalschnitte abgeleitet werden.

Damit ist ein Fundament geometrischer Art für die Potentialtheorie gefunden, welches gewissermafsen Infinitesimalgeometrie an Stelle der Infinitesimalrechnung setzt und den Vorzug der Anschaulichkeit hat.

Es sei bemerkt, dafs man auf diese Weise auch Probleme kombinieren kann, bei denen es sich um massenbelegte Linien oder Flächen oder Körper handelt, auch könnten Punkte, Linien, Flächen und Körper gemischt auftreten. Man hat nur darauf zu achten, dafs die arithmetischen Reihen für c in beiden Einzelproblemen jedesmal dieselbe Differenz haben. Allerdings mufs darauf geachtet werden, dafs bei der Annäherung der zweiten Gruppe an die erste die Massenverteilungen bleiben, wie sie sind. Bei elektrostatischen Problemen ist dies nicht der Fall, denn die Influenzwirkungen geben eine ganz neue Anordnung. Erst wenn man die der neuen Anordnung entsprechenden Niveauflächen kennt, kann man aus ihnen die des kombinierten Problems ableiten. Beispiele werden unten zur Darstellung kommen.

99) Allgemeines Mehrpunktproblem. Hat man die Massen m_1, m_2 und m_3 in beliebigen Raumpunkten, wobei sämtliche positiv, oder einige positiv und der Rest negativ sein können [wir wollen der Einfachheit halber stets die Summe der positiven als gröfser, als die absolut genommene Summe der negativen annehmen (was der Allgemeinheit nicht schadet), oder im Grenzfalle die algebraische Gesamtsumme gleich Null setzen], so ist die Gleichung der Niveauflächen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} = c\,.$$

Die Konstruktion geschieht so, dafs man aus $\frac{m_1}{r_1} = c_1$ und $\frac{m_2}{r_2} = c_2$ durch Addition im obigen Sinne zunächst die Flächen $\frac{m_1}{r_2} + \frac{m_2}{r_2} = k$ bildet, wobei man k die Werte der Glieder einer arithmetischen Reihe annehmen läfst. Darauf läfst man in $\frac{m_3}{r_3} = c_3$ die Konstante c_3 dieselben Werte oder die der Glieder einer Reihe derselben Differenz annehmen und findet nach vorigem Abschnitt geometrisch die gesuchten Flächen. Diese werden von den Kraftlinien senkrecht durchsetzt.

Ist die Summe der Massen verschieden von Null, dann giebt es im Endlichen einen Schwerpunkt S. Zu den Niveauflächen gehört

dann eine unendlich grofse Kugel mit S als Centrum. Sämtliche oder ein Teil der Kraftlinien gehen bis zu dieser Kugel, je nachdem alle Massen positiv, oder diese teils positiv, teils negativ sind. Die Asymptoten gehen von S aus. Teilt man diese Kugel irgendwie in gleiche Flächen ein, so geben die in ihren Rändern endenden Kraftlinien potentiell gleichwertige Kraftröhren. Dadurch wird in dem Falle lauter positiver Massen der Gesamtraum gleichwertig eingeteilt, im Falle gemischter Vorzeichen wenigstens ein Teil des Raumes.

Ist die Summe der Massen gleich Null, so liegt S in unendlich grofser Entfernung, zu den Niveauflächen gehört dann im allgemeinen keine unendlich grofse Kugel und ebensowenig sind Asymptoten vorhanden.

Die besprochene Einteilung der unendlich grofsen Kugel in gleiche Flächen kann durch Meridiane und Parallelkreise in bekannter Weise erfolgen, da man aber die Pole auf der Kugel beliebig wählen kann (nur müssen sie einander entgegengesetzt sein), so sieht man, dafs man unendliche Mannigfaltigkeit in der Einteilung des Raums erhalten kann. Am einfachsten wird es allerdings sein, sich gewissen Koordinatensystemen anzubequemen, wobei die Gleichungen die einfachste Gestalt annehmen.

100) Anordnung auf gerader Linie. Die einfachsten Fälle erhält man bei der Anordnung sämtlicher Massen auf gerader Linie, weil dann die Niveauflächen Drehungsflächen werden. Die Gleichungen des Problems sind dann für die Niveauflächen

$$1)\qquad \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots + \frac{m_n}{r_n} = c,$$

für die Kraftlinien in jeder Meridianebene

$$2)\qquad m_1 \cos\vartheta_1 + m_2 \cos\vartheta_2 + \cdots + m_n \cos\vartheta_n = c_1,$$

Meridianschnitte, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, besorgen das übrige, während sowohl c als auch c_1 arithmetischen Reihen zu folgen haben.

Handelt es sich z. B. um Punkte M_1, M_2, M_3 auf gerader Linie mit Ladungen -3, $+2$, $+1$ (so dafs die Summe Null ist, was die asymptotische Gruppe entfernt und das Skizzieren erleichtert), so bestehen die Gleichungen:

$$-\frac{3}{r_1} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} = c$$

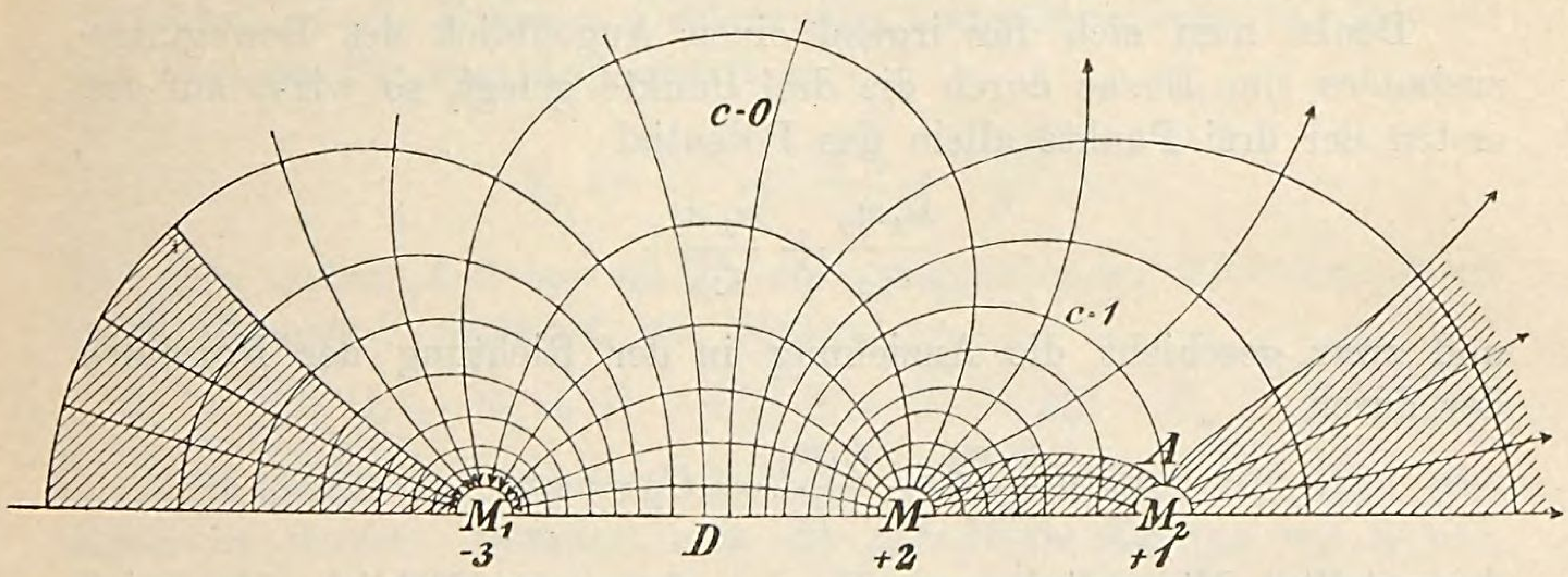
$$-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_3 = c.$$

In Fig. 78 ist das Feld in seiner Gestaltung skizziert. Man verfolge den Gang der Pfeile und der Niveaukurven. Die Schraffierung

zeigt an, daſs ein Teil der von M_2 ausgehenden Stromlinien nicht unmittelbar nach M_1 gelangen kann, sondern nach M_3 geht, daſs dagegen von M_3 aus auf sehr groſsem Wege der Übergang nach M_1 erfolgt. Mit Ausnahme der X-Achse und einer Niveaulinie DE zwischen M_1 und M_3 gelangt keine der Kurven in den unendlichen Bereich.

Entsprechendes geschieht bei beliebig vielen Punkten auf gerader Linie. Dreht man um die X-Achse und führt Meridianschnitte, so erhält man die Zelleneinteilung des elektrostatischen Feldes für jeden der einzelnen Fälle.

Fig. 78.



Die Hauptsache ist, daſs die Anzahl der Kraftlinien für die einzelnen Punkte proportional den elektrischen Massen ist, daſs, wenn die Summe der elektrischen Massen verschieden von Null ist, der Überschuſs der Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche geht, daſs dann Asymptoten vorhanden sind, die durch den Schwerpunkt S gehen, und daſs diese die unendliche Kugel um S in gleiche Zonen einteilen, so daſs die Cosinus ihrer Neigungswinkel eine arithmetische Reihe bilden, die von 0 bis ± 1 geht.

101) Anordnung in der Ebene. Liegen die sämtlichen Punkte in einer Ebene beliebig zerstreut, so gilt Gleichung 1 wie vorher ganz allgemein, Gleichung 2 aber nur für die Ebene, nicht für den Raum, da die Flächen nicht mehr Drehungsflächen sind. Sind sämtliche Massen positiv, so gelingt mit Hilfe der um den Schwerpunkt gelegten unendlichen Kugel die Einteilung ohne Schwierigkeiten. Hier läſst sich Einblick in ein wichtiges Problem der Mechanik nehmen.

102) Vom Problem der drei Körper und seiner Verallgemeinerung. Die vorhergehenden Betrachtungen geben einigen Einblick in das noch nicht vollständig gelöste Problem der drei Körper. Es wird angenommen, diese befänden sich allein im Welt-

raume und ihre gegenseitige Anziehung folge dem Newtonschen Gesetze. Dann finden folgende gegenseitigen Anziehungen statt:

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}, \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}^2}, \frac{m_3 m_1}{r_{3,1}^2}.$$

Diesen entspricht als Gesamtpotential

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}} + \frac{m_3 m_1}{r_{3,1}},$$

worin $r_{1,2}$, $r_{2,3}$, $r_{3,1}$ die möglichen Verbindungslinien sind. Bei n Punkten handelt es sich um Kombinationen zu je zweien.

Denkt man sich für irgend einen Augenblick des Bewegungszustandes eine Ebene durch die drei Punkte gelegt, so wirkt auf den ersten der drei Punkte allein das Potential

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}},$$

und zwar geschieht die Anziehung in der Richtung der Normalen der durch

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}} = U_1 = c_1$$

dargestellten Niveaulinie, wo $U_1 = c_1$ der augenblickliche Potentialwert ist, oder in der Tangente der durch

$$m_1 m_2 \cos \vartheta_{1,2} + m_1 m_3 \cos \vartheta_{1,3} = \gamma_1$$

dargestellten Kraftlinie, wo die ϑ die Neigungswinkel der beiden Verbindungslinien gegen die Gerade $r_{2,3}$ bezw. ihre Verlängerung bedeuten. Die auf jeden der Punkte augenblicklich wirkende Kraft ist also nach Gröfse und Richtung leicht zu bestimmen, sowohl geometrisch als auch arithmetisch (siehe oben).

Da die Wirkung und die Gegenwirkung für je zwei der Punkte übereinstimmen, ist die Summe der Kräfte in jedem Augenblick gleich Null. Denkt man sich also die Gesamtmasse $m_1 + m_2 + m_3$ im Schwerpunkte angebracht, so ist die auf sie einwirkende Kraft gleich Null. Folglich: Der Schwerpunkt ändert seinen augenblicklichen Bewegungszustand nicht, seine Bewegung ist konstant nach Richtung und Geschwindigkeit.

Kennt man also die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 der drei Punkte für einen Augenblick, so kennt man die Bewegung des Schwerpunktes für alle Zeit. Um sie zu bestimmen, hat man nur nötig, an der im Schwerpunkte gedachten Gesamtmasse die reduzierten Geschwindigkeiten

$$V_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad V_2 = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad V_3 = \frac{m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

anzubringen und sie zu vereinigen. Die „Bewegungsquantitäten" sind dann dieselben.

Da diese Verschiebung des Systems nebensächlich ist, kann man sich auf den Fall beschränken, wo die Summe der Geschwindigkeiten gleich Null ist. In den Schwerpunkt verlegt man dann zweckmäfsig den Anfangspunkt des Koordinatensystems, was einige Vereinfachungen bietet. Diese Eigenschaft, die sich auch auf den Fall von n Körpern ausdehnen läfst, nennt man das Schwerpunktsprinzip.

Eine zweite Eigenschaft des Bewegungszustandes ergiebt sich im Anschlufs an die früheren Darlegungen folgendermafsen: Die Energie des Systems für eine Anfangszeit sei

$$E_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2},$$

für eine andere Zeit sei sie E, die entsprechenden Potentialgröfsen seien U_0 und U, dann ist, wie oben,

$$E - E_0 = U - U_0, \; E - U = E_0 - U_0.$$

Die Differenz zwischen Energie und Potential ist also eine konstante Gröfse. Definiert man die potentielle Energie wie früher, so handelt es sich um einen immerwährenden Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie. Da nichts verloren geht, spricht man von der Erhaltung der Arbeit. Das Gesagte läfst sich auf n Punkte ausdehnen, nur ist stets die Bedingung zu stellen, dafs unelastische Stöfse nicht vorkommen.

In dem Gesetz der Erhaltung der Arbeit (Energie) liegt also eine zweite Eigenschaft der Bewegung der drei bezw. der n Körper.

[Eine dritte Eigenschaft soll nur beiläufig erläutert, nicht aber bewiesen werden: das Flächenprinzip. Man denke sich die Bewegungen auf eine der Koordinatenebenen projiziert. Verbindet man nun den Anfangs- und den Endpunkt jedes der drei Wege für eine beliebig gewählte Zeiteinheit, z. B. für die Sekunde, mit dem Nullpunkte des Koordinatensystems, so erhält man drei Sektoren mit den Flächeninhalten F_1, F_2 und F_3. Zu welcher Zeit man nun die Gröfse $F_1 + F_2 + F_3$ messen mag, jederzeit ist sie dieselbe. Also: Zu gleichen Zeiträumen gehören gleiche Summen der Flächenräume. (Die Vektoren zusammengenommen legen in gleichen Zeiten gleiche Summen von Sektoren zurück.)

Diese konstante Summe hat verschiedene Werte für verschieden gerichtete Projektionsebenen. Für eine derselben hat sie einen gröfsten Wert. Laplace hat bewiesen, dafs die Lage dieser letzteren Ebene

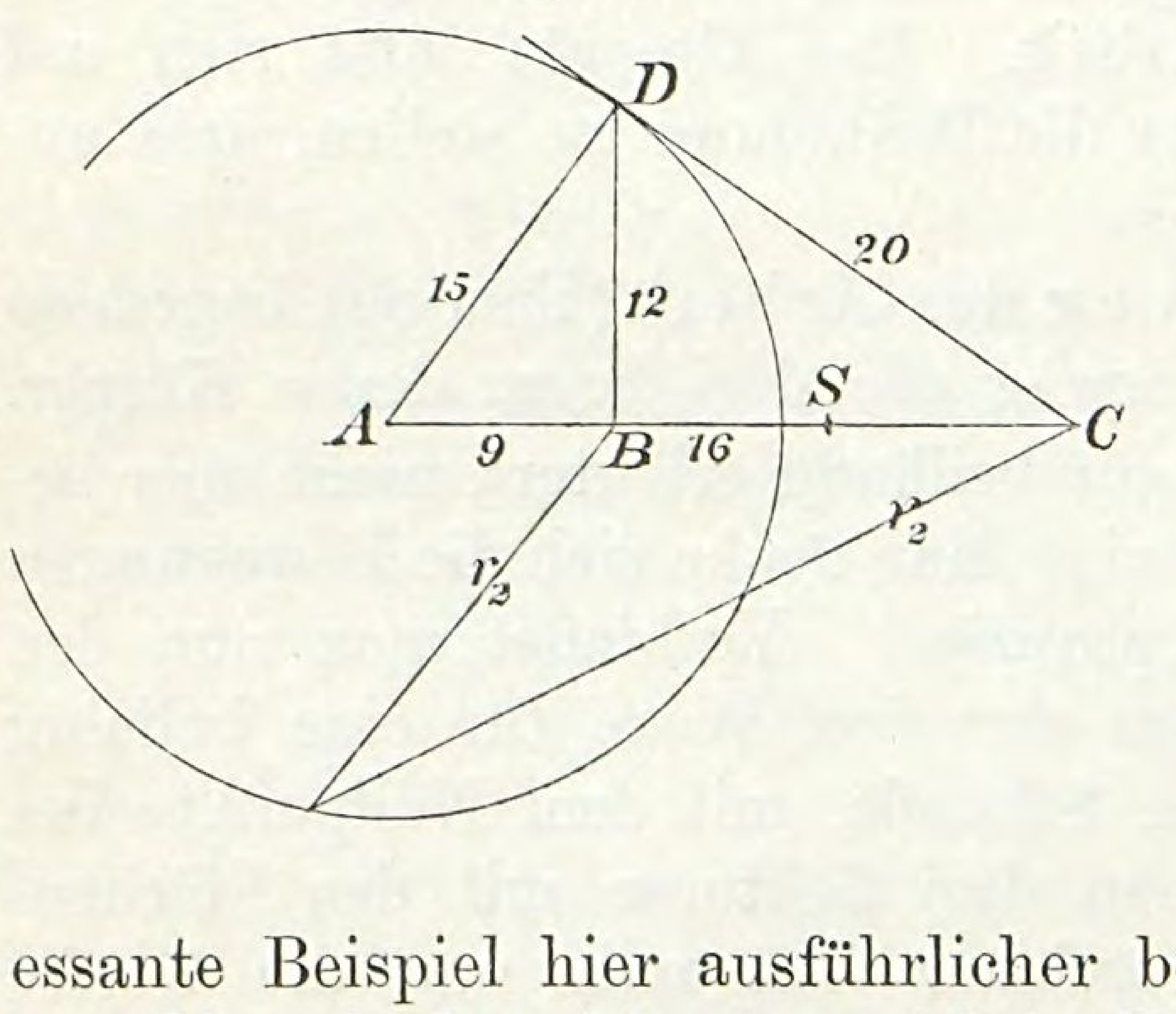
für alle Zeiten dieselbe ist, dafs also ihre Schnittwinkel mit den Koordinatenebenen konstant sind, vorausgesetzt, dafs keine Stöfse vorkommen. Er bezeichnete diese Ebene als die unveränderliche Ebene des Sonnensystems. Die Unveränderlichkeit der Lage folgt daraus, dafs der andern Lage nicht diese, sondern eine andere Summe von Sektoren zukommen würde.]

Obwohl man somit drei wichtige Eigenschaften des Bewegungszustandes dreier Körper und aufserdem für jede gegebene Lage die Gröfse und Richtung der augenblicklich wirkenden Kräfte kennt, ist man doch noch nicht zu einer geschlossenen Lösung des Problems gelangt. Für das System von Sonne, Mond und Erde hat man mit Hilfe der Störungstheorie befriedigende Ergebnisse gefunden, für deren Entwickelung aber elementare Hilfsmittel nicht ausreichen.*)

Die Verallgemeinerungen für n Körper lassen sich ohne weiteres hinschreiben. Das Schwerpunktsprinzip, das Prinzip der lebendigen Kraft und das Flächenprinzip mit der berühmten Laplaceschen Folgerung bleiben dabei bestehen. Auf diesem Wege wurde der von Newton angebahnten Himmelsmechanik durch Laplace ein bedeutungsvoller Fortschritt verschafft.

103) Beispiel mit Kreisen bezw. Kugeln. In Maxwells Lehrbuche der Elektrizität und des Magnetismus befinden sich einige nach den angegebenen Prinzipien exakt gezeichnete Figuren. Auf Tafel V z. B. ist der Fall $A = 15$, $B = -12$, $C = 20$ behandelt, wobei $AB = 9$, $BC = 16$ ist. Der Fall ist von besonderem Interesse. Da die in Figur 80 wiedergegebene Zeichnung bei Maxwell nur beschrieben wird, die betreffenden Berechnungen und Beweise aber dem Leser überlassen werden, sei das interessante Beispiel hier ausführlicher behandelt.

Fig. 79.



Man denke sich über AC in Fig. 79 einen Halbkreis geschlagen und in B auf AC das Lot BD errichtet. Dies giebt ein rechtwinkliges

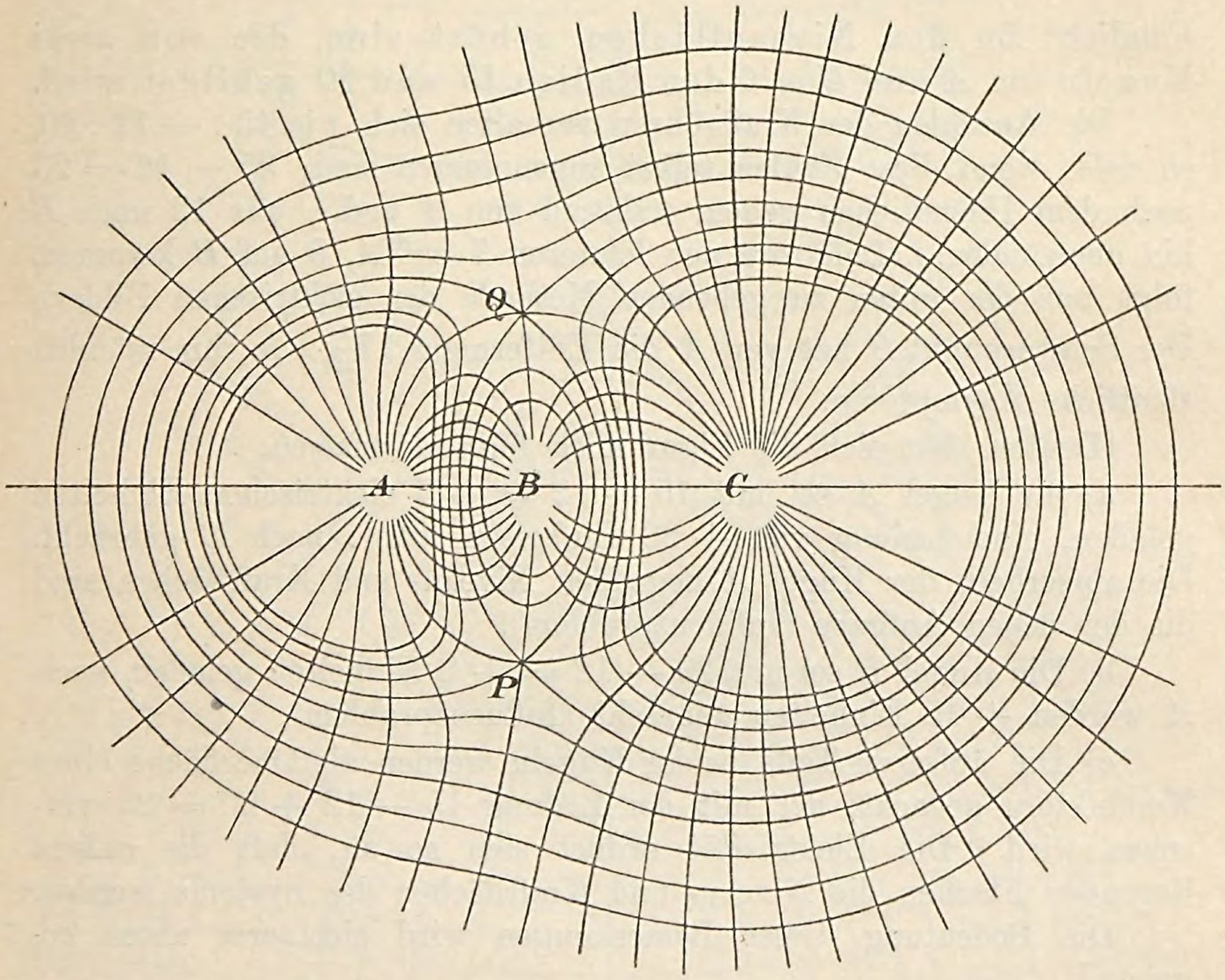
*) B. G. Airy hat allerdings in dem Werke: Gravitation; an elementary explanation of the principal perturbations in the solar system, London 1834, einen solchen Versuch gemacht. Im Programm 1894/95 des Realgymnasiums zu Borna ist ein Teil davon frei bearbeitet. Aufserdem werden dort Übersetzungen von Littrow und Hoffmann genannt.

Dreieck ACD mit $AD = 15$, $CD = 20$, $BD = 12$. Denkt man sich um A mit $AD = 15$ einen Kreis geschlagen, so ist

$$AB \cdot AC = 9 \cdot 25 = 15^2 = AD^2,$$

d. h. B ist der reciproke Punkt von C.

Fig. 80.



Der Potentialwert für jeden Punkt der Ebene ist $\frac{15}{r_1} - \frac{12}{r_2} + \frac{20}{r_3}$. Für die Punkte des um A geschlagenen Kreises handelt es sich um $1 - \frac{12}{r^2} + \frac{20}{r_3}$. Nun ist aber nach bekanntem Satze (Method. Lehrbuch II 62) für jeden Punkt dieses Kreises

$$BE : CE = 12 : 20 = 3 : 5, \quad \text{also} \quad r_3 = \tfrac{5}{3} r_2,$$

also ist für jeden Punkt des Kreises der Potentialwert

$$1 - \frac{12}{r_2} + 20 \cdot \frac{3}{5 r_2} = 1.$$

Die um A mit dem Radius 15 gelegte Kugel ist also der Ort für das konstante Potential 1*).

Für die um C mit Radius 12 gelegte Kugel handelt es sich um das Potential $\frac{15}{r_1} - \frac{12}{r_2} + 1$. Dabei ist überall $r_1 : r_2 = 15 : 12 = 5 : 4$, also das Potential

$$\frac{15}{r_1} - \frac{12 \cdot 5}{4 \cdot r_1} + 1 = 1.$$

Folglich: Zu den Niveauflächen gehört eine, die von zwei Kugeln um A und C mit den Radien 15 und 20 gebildet wird.

Die Anzahlen der Kraftröhren verhalten sich wie 15 : — 12 : 20, so dafs, wenn diese Zahlen selbst angenommen sind, 35 — 12 = 23 nach dem Unendlichen gehen, während von A und C aus 12 nach B hin ausmünden. (Dafs von den letzteren 7 auf A, 5 auf B kommen, folgt aus der unten zu gebenden Methode der elektrischen Bilder.) Der Schwerpunkt S hat von A die Entfernung $17\frac{1}{23}$. In ihm münden sämtliche Asymptoten.

[Deuten läfst sich die Figur noch folgendermafsen:

a) die Kugel A sei mit 15 — 12 = + 3 elektrischen Einheiten geladen, eine Ladung von + 20 Einheiten werde nach B gebracht. Die aufserhalb der Kugel A liegenden Niveau- und Kraftflächen sind die der neuen Aufgabe (Influenzproblem).

b) Die Kugel B sei mit 20 — 12 = + 8 Einheiten geladen, nach A werden + 15 Einheiten gebracht (Influenzproblem).

c) Die äufseren Teile beider Kugeln werden als Oberfläche eines Konduktors gedacht, der mit der Ladung 15 — 12 + 20 = 23 versehen wird. Die Elektrizität ordnet sich so an, dafs die aufsen liegenden Flächen die Niveau- und Kraftflächen des Systems werden.

Die Bedeutung dieser Bemerkungen wird sich erst unten ergeben.]

104) Geladener Konduktor im homogenen Felde. Denkt man sich bei dem symmetrischen Zweipunktsystem ungleichartiger Elektrizitäten die Punkte M_1 und M_2 unendlich fern voneinander, so erhält man in der Umgebung von M ein sogenanntes homogenes Feld, bei dem das Netz der Kraft- und Niveaulinien quadratisch wird. Legt man in die eine Parallelenschar die Kraftlinien des Einpunktproblems, in die andere dessen Niveaulinien, so geben die Diagonalkurven das in Fig. 81 dargestellte Netz, welches ebenfalls dem Maxwellschen Lehrbuch entnommen ist.

*) Bei Maxwell-Weinstein steht irrtümlich Null.

Es handelt sich dabei gewissermaßen um eine räumliche Parallelströmung, von der ein Teil durch A aufgesaugt wird, oder um eine entgegengesetzte Strömung, zu der ein Teil in A hinzutritt.

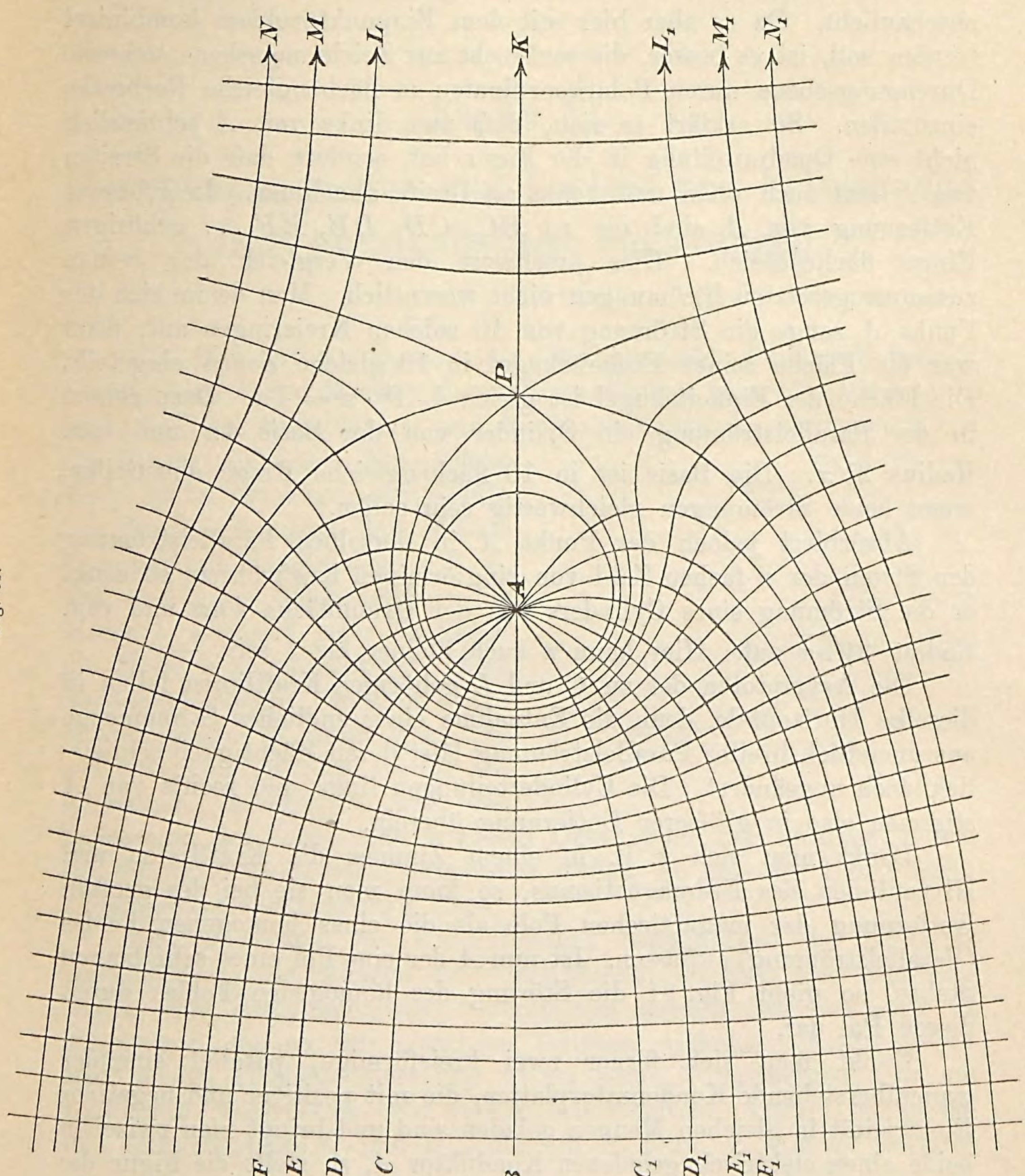


Fig. 81.

Man kann auch von der Störung reden, die innerhalb eines homogenen, positiven elektrischen Feldes durch eine negative Punktladung hervorgebracht wird.

Die beiden unendlich fernen Punkte M_1 und M_2 müssen selbstverständlich unendlich stark geladen sein, und zwar mit gleich grofsen Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten.

Das homogene Feld wird in der Regel durch ein Quadratnetz veranschaulicht. Da es aber hier mit dem Einpunktproblem kombiniert werden soll, ist es besser, die senkrecht zur Zeichnungsebene stehende Durchgangsebene durch Polarkoordinaten in flächengleiche Rechtecke einzuteilen. So erklärt es sich, dafs man links von A schliefslich nicht eine Quadratteilung in der Figur hat, sondern dafs die Streifen von B aus nach oben und unten an Breite abnehmen. In gröfserer Entfernung von A sind die zu BC, CD, DE, EF ... gehörigen Ringe flächengleich. Dies erschwert den Vergleich der beiden zusammengesetzten Strömungen nicht wesentlich. Man denke sich der Punkt A sauge die Strömung von 10 solchen Kreisringen auf, dann war die Fläche seiner Einheitskugel in 10 gleiche Zonen eingeteilt. Die Fläche der Einheitskugel ist gleich $4 \cdot 1^2 \cdot \pi = 4\pi$. Dazu gehört in der Parallelströmung ein Cylinder von der Basis 4π und vom Radius $2\sqrt{\pi}$. Die Basis ist in 10 flächengleiche Ringe einzuteilen, wenn beide Strömungen gleichwertig sein sollen.

Absorbiert jedoch der Punkt A in derselben Parallelströmung den Strom der n fachen Zahl von ringförmigen Kraftröhren, so saugt er die Strömung eines Cylinders von der Grundfläche $4n\pi$ und vom Radius $2\sqrt{n\pi}$ auf. Hier kann n auch kleiner als 1 sein. —

Die Asymptoten der zu C und L gehörigen Kraftlinien fallen in dieselbe Horizontale, denn die Entnahme einer endlichen Strommenge aus unendlich breiter Parallelströmung läfst deren Mächtigkeit schliefslich doch ungeändert. Die Cylinderteilungen links und rechts von A stimmen also in gröfserer Entfernung überein.

Denkt man sich z. B. in einem Zimmer die Kraftlinien und Niveaulinien des Erdmagnetismus, so kann man sie bei der grofsen Entfernung der magnetischen Pole als die eines homogenen Feldes (Parallelströmung) auffassen. Ist nun A der eine Pol eines sehr langen Stabes, so giebt Fig. 81 die Störung des homogenen Feldes durch diesen Pol dar.

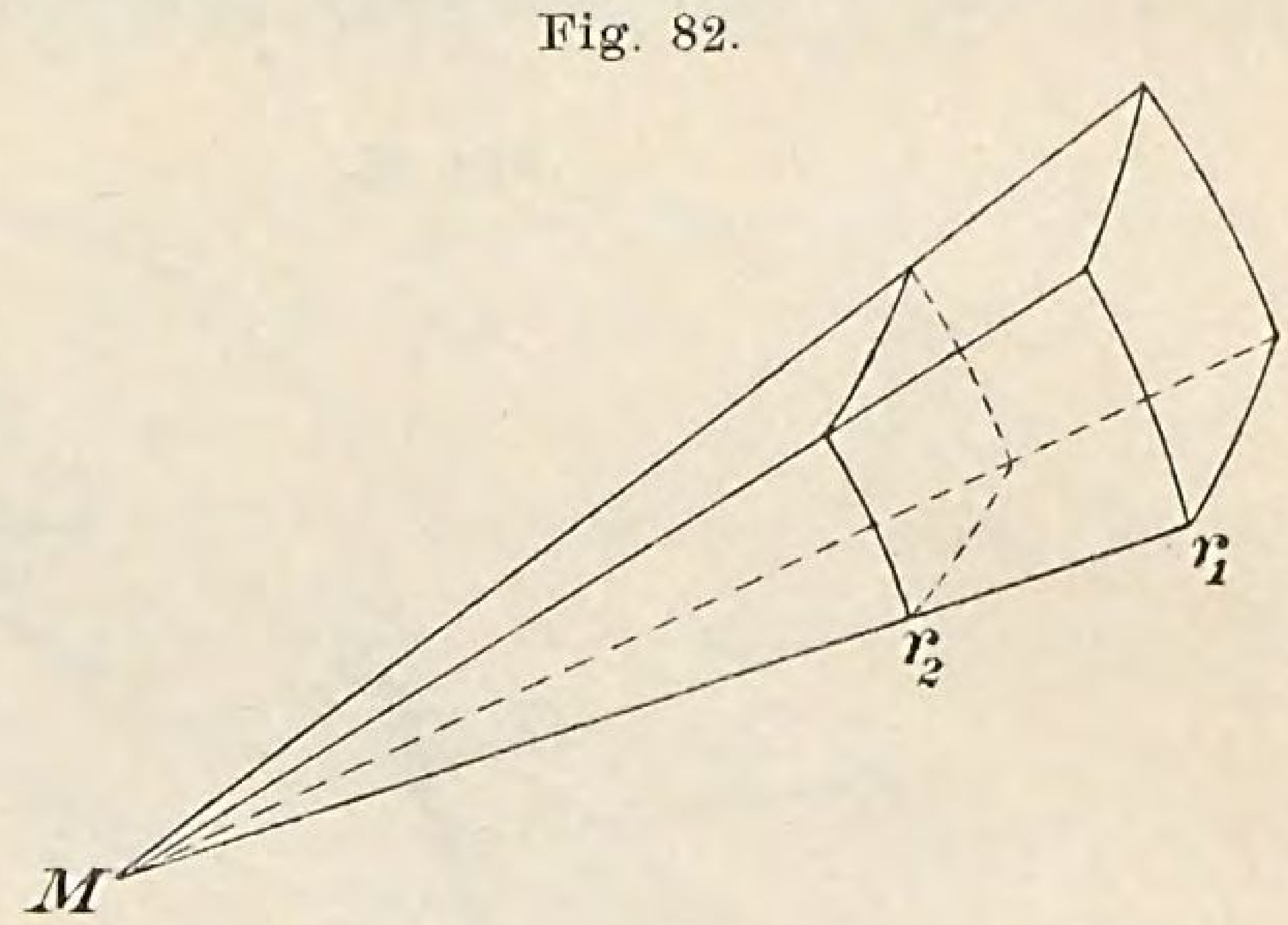
Denkt man sich ferner zwei kreisförmige, parallel einander gegenüberstehende Kondensatorplatten, die mit positiver und negativer Elektrizität in gleichen Mengen geladen sind und bringt man zwischen beide einen elektrisch geladenen Konduktor A, so stellt die Figur die Störung des nach Nr. 75 fast homogenen Feldes in der Nähe des Konduktors A dar. Das Beispiel ist von besonderer Wichtigkeit, weil bei zahlreichen Experimenten der Einflufs des Erdmagnetismus berücksichtigt werden mufs.

Kapitel VI.

Die Spannungssätze von Laplace und Poisson und ihre physikalischen Folgerungen.

105) Begriff der Spannung. In dem festen Punkte M befinde sich die anziehende Masse 1, deren Niveauflächen koncentrische Kugeln sind, während Kugelflächen und Meridianschnitte die Zelleneinteilung des Raums vollenden. Eine solche Zelle ist in der Figur dargestellt.

Fig. 82.



Man denke sich ihre Wände homogen mit Masse belegt, z. B. so, daſs auf jeder Flächeneinheit die Masse 1, also auf jeder Fläche F die Masse F angebracht ist. Diese Massenbelegungen werden vom Massenpunkte M angezogen. Es soll untersucht werden, ob die angezogenen Belegungen auf den Innenraum der Zelle einen gewissen Druck oder Zug ausüben, indem sie ihn verkleinern oder vergröſsern wollen, ob also der Raum unter einer gewissen Spannung steht.

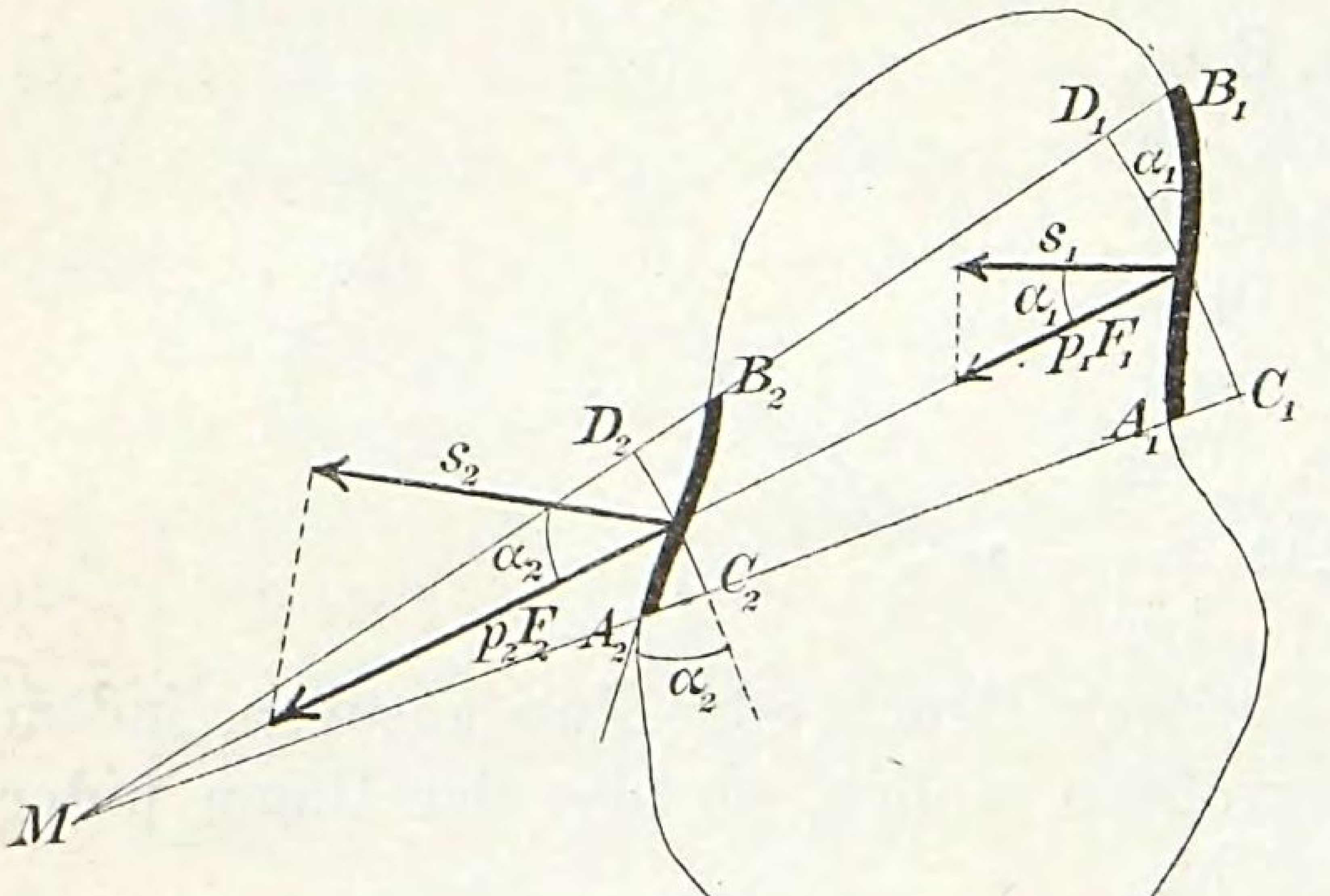
Bezeichnet man die koncentrischen Kugelflächen der Zelle als Grundflächen, die übrigen als Seitenflächen, so läſst sich folgendes sagen. Die Belegungen der Seitenflächen werden lediglich nach M hingezogen, die an den einzelnen Teilchen wirkenden Kräfte liegen also in den Flächen selbst und haben keine Komponenten, die den Innenraum vergröſsern oder verkleinern könnten. Anders ist es bei den Grundflächen F_1 und F_2, die um r_1 bezw. r_2 von M entfernt sind. Die eine übt auf den Innenraum einen Druck $\frac{F_1}{r_1^2}$ aus, der als eine positive Spannung bezeichnet werden soll, der zweite einen Zug $\frac{F_2}{r_2^2}$, der als negative Spannung gelten soll. Die eine Kraft

will den Zellenraum vergröſsern, die andere ihn verkleinern. Da aber $F_1 : F_2 = r_1^2 : r_2^2$ ist, so folgt $\frac{F_1}{r_1^2} - \frac{F_2}{r_2^2} = 0$. Druck und Zug heben sich gegenseitig auf, so daſs man sagen kann: Der Zellenraum steht unter der Spannung Null. Dasselbe würde auch der Fall sein, wenn die ähnlichen Grundflächen irgend eine andere Gestalt hätten, wenn z. B. ein Kegel an Stelle der Pyramide träte. Faraday und Maxwell gebrauchen statt des Wortes Spannung die Bezeichnung Kraftfluſs. Vergl. Nr. 53.

Bezeichnet man die auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte mit p_1 bezw. p_2, so hat man $p_1 F_1 = p_2 F_2$ oder $p_1 : p_2 = F_2 : F_1$. Die Anziehungskräfte sind also umgekehrt proportional den Grundflächen. Diese einfache Bemerkung giebt zu äuſserst interessanten Schlüssen Veranlassung.

106) In sich geschlossene Fläche unter Einwirkung äuſserer Massenpunkte. Der Punkt M von der Masse 1 wirke jetzt auf die homogene Massenbelegung einer beliebig gestalteten aber in sich geschlossenen Oberfläche ein. Unter welcher Spannung steht der Innenraum? (Der Raum wird als einfach zusammenhängend angenommen.)

Fig. 83.



Man denke sich von M aus einen Kegel MA_1B_1 von kleinem körperlichen Winkel gezeichnet, der die Fläche in A_1B_1 und A_2B_2 schneidet, was eine Zelle $A_1B_1B_2A_2$ mit den Grundflächen F_1 und F_2 geben möge. Macht man über die Belegungen der Grundflächen dieselben Annahmen, wie vorher, so sind die Anziehungsresultanten für die beiden Belegungen $p_1 F_1 = \frac{F_1}{r_1^2}$, $p_2 F_2 = \frac{F_2}{r_2^2}$. Jede zerlegt sich in eine Spannungskraft, die senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet ist und in eine in die Fläche (Tangentialebene) fallende Kraft, also in einen wirksamen und in einen in Bezug auf die Spannung des Innenraumes unwirksamen Teil. Sind α_1 und α_2 die entsprechenden Neigungswinkel, so handelt es sich um $s_1 = p_1 F_1 \cos \alpha_1$ und $s_2 = p_2 F_2 \cos \alpha_2$. Man denke sich jetzt durch den Angriffspunkt jeder dieser Resultanten

die zu M gehörige Niveaufläche gelegt, also z. B. $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$. Diese bilden mit den ursprünglichen Grundflächen (Tangentialebenen) ebenfalls die Winkel α_1 und α_2, so daſs die neuen Flächen von der Gröſse $F_1' = F_1 \cos \alpha_1$ und $F_2' = F_2 \cos \alpha_2$ sind. Daraus folgt

$$s_1 = p_1 F_1 \cos \alpha_1 = \frac{F_1}{r_1^2} \cos \alpha_1 = \frac{F_1'}{r_1^2}$$

und

$$s_2 = p_2 F_2 \cos \alpha_2 = \frac{F_2}{r_2^2} \cos \alpha_2 = \frac{F_2'}{r_2^2}.$$

Nun ist aber für die neuen Grundflächen, die einander ähnlich sind,

$$F_1' : F_2' = r_1^2 : r_2^2,$$

folglich ist, wenn man die entgegengesetzten Vorzeichen (Druck, Zug) berücksichtigt, die Summe der beiden Spannungen gleich Null. Also ist $p_1 F_1 \cos \alpha_1 = p_2 F_2 \cos \alpha_2$.

Wendet man das Verfahren auf sämtliche Teile der Oberfläche an, so findet dasselbe statt. Durch Summierung über die ganze Oberfläche folgt:

Befindet sich auſserhalb einer in sich geschlossenen Oberfläche, die homogen mit Masse belegt ist, ein anziehender Punkt, so ist die von ihm auf den Innenraum ausgeübte Gesamtspannung oder der Kraftfluſs des Raumes gleich Null.

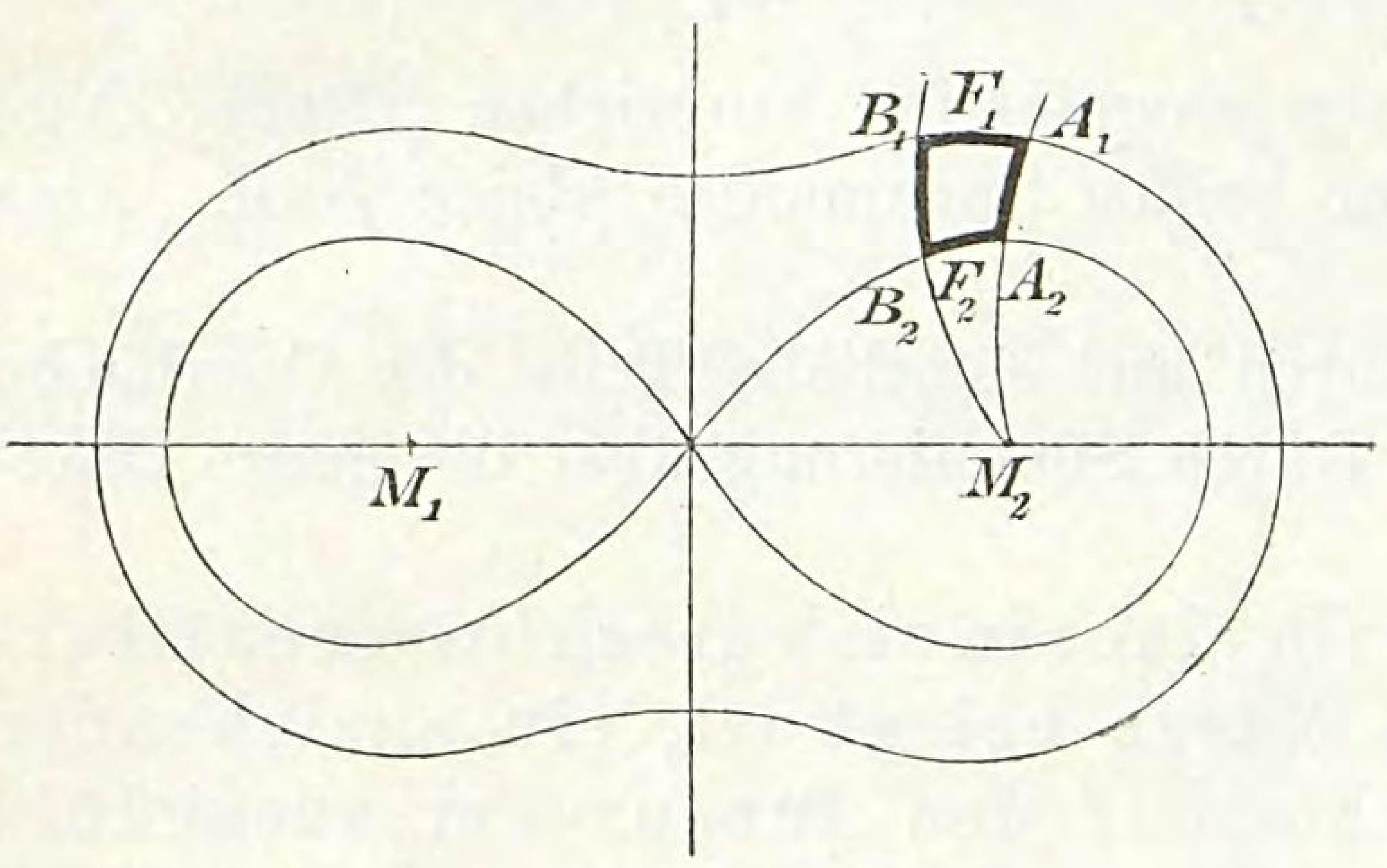
Dabei darf die Oberfläche auch so gestaltet sein, daſs die von M aus gelegten Hilfskegel sie zum Teil mehrfach schneiden.

Liegen mehrere anziehende Massenpunkte auſserhalb der Fläche, so treten zu jeder Spannung s neue hinzu, die zu je zweien ebenfalls die Summe Null geben. Das Gesamtresultat wird also wiederum gleich Null. Die Massenpunkte dürfen auch eine kontinuierliche Linie, eine Fläche, einen Körper von beliebiger Gestalt bilden. Liegt das anziehende Gebilde auſserhalb der geschlossenen, homogen belegten Fläche, so ist die Gesamtspannung bezw. der Kraftfluſs stets gleich Null.

107) Symmetrisches Zweipunktproblem. Am Beispiele des symmetrischen Zweipunktproblems soll die Bedeutung des Satzes aus einander gesetzt werden. In Fig. 84 sei $A_1 B_1 B_2 A_2$ eine der kleinen Raumzellen mit den Grundflächen F_1 und F_2 und entsprechenden Seitenflächen. Man denke sich die Wände der Zelle in obiger Weise homogen mit Masse belegt, die von den Massenpunkten M_1 und M_2, wo sich Masseneinheiten befinden, angezogen wird. Jedes Massenteilchen der Seitenwände wird so angezogen, daſs die Resultante der Anziehungskräfte in die Wand selbst fällt, d. h. in die Richtung der

Tangente einer Kraftlinie. Die Wirkung auf die Spannung des Innenraums ist also gleich Null. In Frage kommen nur noch die auf F_1 und F_2 einwirkenden Anziehungen. Auf F_1 wirken zwei anziehende Kräfte $q_1 F_1 = \frac{F_1}{r_1^2}$ und $q_1' F_1 = \frac{F_1}{\varrho_1^2}$, deren Resultante $p_1 F_1$ in die Richtung der entsprechenden Kraftlinie fällt. Auf F_2 wirken ebenso zwei Kräfte $q_2 F_2 = \frac{F_2}{r_2^2}$ und $q_2' F_2 = \frac{F_2}{\varrho_2^2}$, deren Resultante $p_2 F_2$ in dieselbe Kraftlinie fällt. Sind nun die Niveauflächen F_1 und F_2 nur sehr wenig voneinander entfernt, so darf man die Kräfte als in denselben Geraden liegend betrachten, so dafs man sie durch Addition vereinigen kann. Dies giebt die Spannung $p_1 F_1 - p_2 F_2$. Weil aber die beiden anziehenden Massen M_1 und M_2 aufserhalb liegen, ist die Spannung des Zellenraums nach Laplace gleich Null, folglich ist $p_1 F = p_2 F_2$. Ebenso ist der Kraftflufs der Zelle gleich Null.

Fig. 84.



Führt man demnach in der gezeichneten Kraftröhre an verschiedenen Stellen Normalschnitte $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$, so ist, wenn $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ die entsprechenden Einheitsresultanten sind, $p_1 F_1 = p_2 F_2 = p_3 F_3 = p_4 F_4, \ldots$, d. h. das Produkt aus der Einheitsresultante und dem Normalschnitt der Kraftröhre ist konstant.

Die auf die Einheit wirkende Kraft nimmt also in demselben Mafse ab, wie der Normalschnitt zunimmt, d. h. sämtliche Normalschnitte jeder Kraftröhre werden mit derselben Kraft angezogen. Ebenso ist der Kraftflufs für die ganze Röhre konstant.

108) Allgemeinere Folgerungen. Ganz dieselbe Betrachtung läfst sich aber für das unsymmetrische Zweipunktproblem anstellen, auch dann, wenn der eine Punkt anziehend, der andere abstofsend wirkt, sie gilt auch für das Mehrpunktproblem und für die Anziehung kontinuierlicher Massen. Also:

Bei jedem Problem der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze gilt für die Normalschnitte jeder Kraftlinie der Satz, dafs das Produkt aus der Einheitsresultante und dem Normalschnitt eine konstante Gröfse ist.

Um von der Tragweite dieses Satzes einen Begriff zu erhalten, kann man einige einfache Betrachtungen anstellen.

109) Unendliche Kugel als Niveaufläche. Für jeden endlichen anziehenden Massenkomplex nehmen die Niveauflächen nach aufsen hin mehr und mehr die Gestalt von Kugeln an, die ihren Mittelpunkt im Schwerpunkte der anziehenden Massen haben. Denkt man sich die unendlich grofse Kugel auf irgend welche Art, z. B. durch Meridiane und Parallelkreise bei beliebig liegendem Pol, in gleiche Flächen eingeteilt und für jeden Eckpunkt ihres Netzes die Kraftlinie konstruiert, so ist für alle Stellen sämtlicher Kraftröhren pF dieselbe Gröfse, jede Niveaufläche wird also so zerlegt, dafs auf ihr pF konstant ist. (Man vergleiche dies mit den Betrachtungen über die Asymptoten im 5. Kapitel.) Dies erleichtert die Einteilung des Raumes in potentiell gleichwertige Zellen bei zahlreichen Problemen.

110) Das Gesetz der Zelleninhalte. Von Niveaufläche zu Niveaufläche möge die Einheit der Masse bewegt werden. Folgen die Potentialwerte der Niveauflächen einer arithmetischen Reihe, handelt es sich also um konstante Potentialdifferenzen, so ist zu jener Bewegung von Fläche zu Fläche überall dieselbe Arbeit pw nötig. Für irgend welche Raumstellen sei in diesem Sinne $pw = p_n w_n$. Nach Nr. 107 war zugleich $pF = p_n F_n$. Durch Division folgt

$$w : w_n = F : F_n .$$

Bezeichnet man also die Flächen F als die Grundflächen der Zellen, die w als ihre Höhen, so folgt:

Bei potentiell gleichwertiger Zelleneinteilung des Raumes verhalten sich die Grundflächen der Zellen wie ihre Höhen.

Ebenso, wie für das Zweipunktproblem gilt dies für das n-Punktproblem und für die allgemeinsten Probleme.

Aus $\frac{w}{w_n} = \frac{F}{F_n}$ folgt $\frac{wF}{w_n F_n} = \frac{F}{F_n} \cdot \frac{F}{F_n} = \frac{F^2}{F_n^2} = \frac{w^2}{w_n^2} = \frac{p_n^2}{p^2}$.

Bezeichnet man also die Inhalte zweier Zellen mit J und J_n, so folgt:

$$\frac{J}{J_n} = \frac{F^2}{F_n^2} = \frac{w^2}{w_n^2} = \frac{p_n^2}{p^2},$$

d. h. die Inhalte der Zellen eines Problems verhalten sich wie die Quadrate der Grundflächen, wie die Quadrate der

Höhen und umgekehrt wie die Quadrate der Einheitsresultanten.

In Fig. 84 sind die Potentialflächen Drehungsflächen. Sind e und e_n die Abstände zweier Zellen von der Drehungsachse, α und α_n die am Einheitskreise gemessenen Bogen zwischen benachbarten Meridianschnitten, $s = AB$ und $s_n = A_nB_n$ die aus der Zeichnung zu entnehmenden Seitenlinien der Flächen F und F_n, so ist $F = s \cdot e\alpha$ und $F_n = s_n \cdot e_n\alpha$, also

$$\frac{F}{F_n} = \frac{se}{s_ne_n} = \frac{w}{w_n} = \frac{p_n}{p}.$$

Auch dieser besondere Satz ist leicht in Worte zu kleiden.

111) Cylindrische Probleme. Die wichtigste Folgerung ist die auf die zweidimensionalen Probleme führende.

M_1 und M_2 in Fig. 84 seien die Darstellungen zweier unbegrenzten Geraden, die in derselben Dichte homogen mit Masse belegt sind. In allen Normalschnitten der beiden Geraden findet dann dasselbe statt, man braucht also nur einen einzigen Normalschnitt auf die Niveau- und Kraftlinien zu untersuchen, d. h. das Problem ist ein zweidimensionales.

Die Normalschnitte folgen bei gleichwertiger Zellenteilung längs der Richtung der parallelen Geraden in demselben Abstande aufeinander. An Stelle von $e\alpha$ für den Fall von Drehungsflächen tritt also einfach $e = e_n$. (Legt man die Drehungsachse ins Unendliche, so kann man ebenfalls $e = e_n$ setzen.) Jetzt also wird $F : F_n = es : es_n$, oder $F : F_n = s : s_n$. Es war aber

$$F : F_n = w : w_n,$$

demnach folgt

$$s : s_n = w : w_n = p_n : p.$$

Folglich:

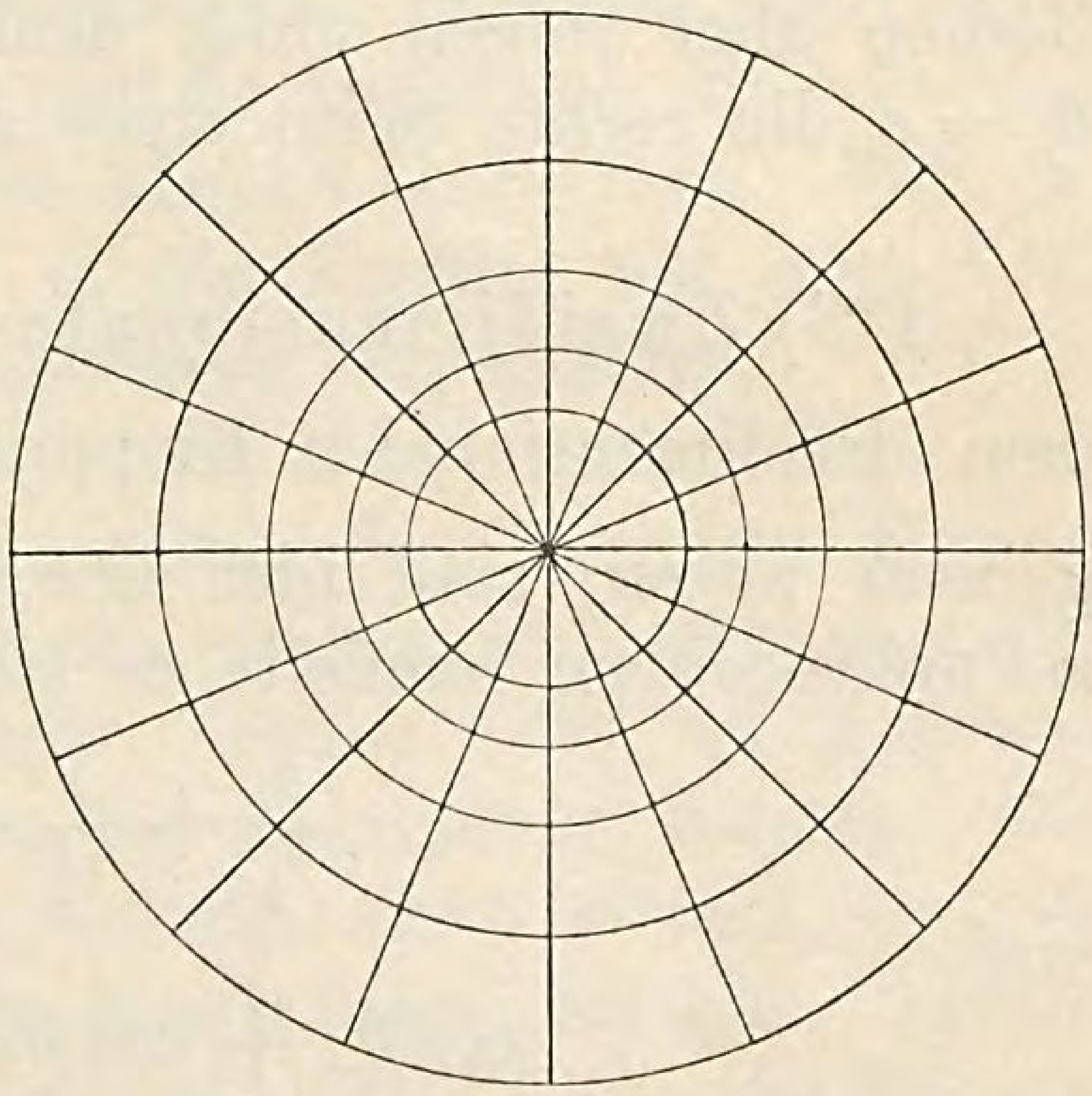
Bei allen Zellen eines zweidimensionalen Problems verhalten sich die Grundlinien der Zellen wie ihre Höhen, die sämtlichen Zellen sind also kleine ähnliche Rechtecke, z. B. kleine „Quadrate“. Die Kräfte sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Zellen.

In der Anziehungslehre handelt es sich um unbegrenzte Cylinder als Niveauflächen. Der Satz gilt allgemein von jeder Art von Cylinderproblemen. Die Helmholtzschen Flüssigkeitsströmungen führen jetzt auf stationäre Strömungen in der Ebene, mögen diese nun hydrodynamischer Art oder Wärme- oder Elektrizitätsströmungen sein. Von hier aus lassen sich die Helmholtz-Kirchhoffschen Probleme der freien Ausflufsstrahlen, gewisse elektromagnetische Probleme und die

dazu gehörigen Helmholtzschen Wirbelbewegungen behandeln, aufserdem Probleme der Biegungs- und Torsionsfestigkeit, der Kapillarität, der Kartographie u. s. w. So führt der unscheinbare Laplacesche Satz in die wichtigsten Gebiete der neueren Physik, in die Probleme des sogenannten logarithmischen Potentials, dessen Begriff sich aus dem Folgenden ergeben wird.

112) Das zweidimensionale Einpunktproblem und das logarithmische Potential. Es handelt sich um die quadratische Einteilung der Ebene durch das Strahlenbüschel und die koncentrische Kreisschar. Dabei wird

Fig. 85.



$$s : s_n = w : w_n = r : r_n = F : F_n,$$

wo die F die Zellenflächen des zugehörigen Cylinderproblems sind. Aus

$$F : F_n = p_n : p$$

folgt für die anziehende Kraft, mit der der homogene Cylinder die freie Masseneinheit anzieht,

$$p : p_n = r_n : r,$$

d. h.

Die Anziehungskraft der unbegrenzten homogenen Geraden ist umgekehrt proportional der Entfernung.

Wird die Masseneinheit auf dem Radius ins Unendliche gbracht, so ist also das Arbeitsdiagramm eine gleichseitige Hyperbel von der Form

$$y = k \cdot \frac{1}{r} \cdot$$

Die Entfernung bis ins Unendliche erfordert, wie das Diagramm zeigt, unendlich grofse Arbeit, was nicht wunder nimmt, da die auf der unbegrenzten Geraden homogen verteilte anziehende Masse bei endlicher Dichte selbst unendlich grofs ist. Das Potential ist also an jeder Stelle unendlich grofs, d. h. der Newtonsche Potentialbegriff wird unbrauchbar.

Nun läfst sich aber elementar zeigen, dafs die Fläche der gleichseitigen Hyperbel von 1 bis r

$$\overset{r}{\underset{1}{F}} = k \lg r$$

ist (vgl. Meth. Lehrbuch III, Seite 136). Es ist zweckmäfsig, jetzt

diesen Ausdruck als das Potential zu betrachten. Der Name logarithmisches Potential erklärt sich von selbst.

Unter Potential in einem Punkte versteht man also jetzt die Arbeit, die nötig ist, die Masseneinheit aus dem Abstande 1 von der Geraden in den Abstand r jenes Punktes von der Geraden zu versetzen.

Die potentielle Gleichwertigkeit der Zelleneinteilung erhält man dadurch, dafs man den Wert c von $\lg r$ einer arithmetischen Reihe folgen läfst. Da aus $e = \lg r$ folgt $r = e^c$, was einer geometrischen Reihe folgt, wenn c einer arithmetischen folgt, so ergiebt sich, wie selbstverständlich, dafs man lauter ähnliche Kreisringe erhält. Die Radien aber folgen unter demselben Winkel aufeinander, so dafs in $\vartheta = c$ die rechte Seite einer arithmetischen Reihe zu folgen hat.

113) Zweidimensionale Mehrpunktprobleme. Während bei dem dreidimensionalen Einpunktproblem $\frac{1}{r} = c$ und $\cos\vartheta = c$ mafsgebend waren, sind hier $\lg r = c$ und $\vartheta = c$ mafsgebend. Für das n-Punktproblem handelte es sich früher bei gleichen Massen um

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = c$$

und

$$\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 + \cdots + \cos\vartheta_n = c.$$

An Stelle dieser Gleichungen treten jetzt die folgenden:

1) $$\lg r_1 + \lg r_2 + \cdots + \lg r_n = c$$

2) $$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = c$$

Statt der ersteren läfst sich auch schreiben

$$\lg(r_1 r_2 \cdots r_n) = c$$

oder

1)* $$r_1 r_2 \ldots r_n = e^c.$$

Bei ungleichen „Massen“ erhält man

3) $$m_1 \lg r_1 + m_2 \lg r_2 + \cdots + m_n \lg r_n = c,$$

4) $$m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2 + \cdots + m_n\vartheta_n = c.$$

Für 3) läfst sich auch schreiben

$$\lg\left(r_1^{m_1} r_2^{m_2} \ldots r_n^{m_n}\right) = c$$

oder

$$r_1^{m_1} r_1^{m_2} \ldots r_n^{m_n} = e^c.$$

Die m können sämtlich positiv oder teilweise negativ sein.

Für die Kurvenscharen 1 und 3 hat Verfasser vor längeren Jahren (Bd. 83 des Crelleschen Journals) für den Fall der regelmäfsigen Anordnung der Punkte auf einem Kreise den Namen „reguläre Lemniskaten n^{ter} Ordnung“, für die Kurven 2 und 4 die Namen „reguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung“ vorgeschlagen. Für beliebige Anordnungen nannte er sie „irreguläre Lemniskaten bezw. Hyperbeln n^{ter} Ordnung“ (Progr. 1880 der Hagener Gewerbeschule). Diese Namen sind in zahlreichen Abhandlungen (z. B. von Biermann, Laurin, Forchheimer, Guébhard, Hildebrand) beibehalten worden. Für den Fall $n = 1$ handelt es sich um koncentrische Kreisschar und Strahlenbüschel, für $n = 2$ unter Voraussetzung positiver gleicher m um konfokale Lemniskaten (Cassinische Kurven) und ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, bei entgegengesetzten m um Kreisschar und Kreisbüschel. Sämtliche gestatten Einteilung der Ebenen in kleine Quadrate. Kap. X, XI, XII in des Verfassers Einführung in die Theorie der isog. Verwandtschaften besprechen diese Kurvenscharen eingehender.

114) Das Problem der unbegrenzten homogenen Ebene und das Planpotential. Die Kraftlinien stehen senkrecht auf der Ebene, die Niveauflächen sind parallele Ebenen, die bei gleichen Potentialdifferenzen in gleichen Abständen aufeinander folgen. Die naturgemäfse Einteilung des Raumes geschieht durch Würfel, so dafs es sich um quadratische Prismen als Kraftröhren handelt. [Nach Nr. 104 könnte man allerdings auch ringförmige Einteilung der Niveauflächen wählen, wie Maxwell sie bisweilen anwendet (vgl. Fig. 81). Dafs auch die Einteilung in gleichseitige Dreiecke, regelmäfsige Sechsecke, in Ringe ähnlicher Polygone erfolgen darf, darauf sei gleichfalls hingewiesen.] Die Strömung der inkompressiblen Flüssigkeit erfolgt in den Röhren mit konstanter Geschwindigkeit. Aus $v = v_1$ folgt nach Nr. 53 $p = p_1$, so dafs die Anziehung der Ebene in allen Entfernungen dieselbe ist. Das Arbeitsdiagramm, ein Rechteck, ändert seinen Inhalt in gleichen Abständen stets um dieselbe Gröfse. Bei Bewegung der angezogenen Masseneinheit auf einer der Kraftlinien wird also das Diagramm der Potentialwerte wie bei dem Ohmschen Gesetze durch eine schräge Gerade begrenzt. Das Newtonsche Potential würde für die Bewegung bis ins Unendliche überall einen unendlich grofsen Wert geben. Es ist also vorzuziehen, den von der Ebene aus gemessenen Rechtecksinhalt als das Potential zu betrachten, und für dieses neue Potential den Namen Planpotential einzuführen. Da nach Nr. 27 bezw. 74 die Anziehung der Ebene bei einer homogenen Belegung von Dichte $\delta = 1$ überall gleich 2π ist, so ist in der Entfernung x das Planpotential gleich $2\pi x$. Selbstverständlich kann dazu noch eine Gravitationskonstante k als Faktor treten. In

jedem System von Kraftlinien und Niveaulinien bezw. Niveauflächen läſst sich — von gewissen singulären Punkten abgesehen — jeder unendlich kleine Raum zwischen zwei benachbarten Niveauflächen als homogenes Feld betrachten, sobald er durch Kraftlinien begrenzt ist.

115) Die logarithmische Abbildung. Der direkte Übergang von der quadratischen Einteilung durch Strahlenbüschel und koncentrische Kreisschar zur quadratischen Einteilung durch Parallelenscharen kann mit Hilfe der logarithmischen Abbildung $Z = \lg z$ oder

$$X + Yi = \lg(x + yi),$$

wo i gleich $\sqrt{-1}$ ist und die bekannte geometrische Darstellung der komplexen Gröſsen nach Argand-Gauſs benutzt wird, geschehen. Es ist nämlich für die letzte Gleichung zu schreiben

$$X + Yi = R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = \lg[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \lg r + \lg e^{\varphi i}$$
$$= \lg r + \varphi i,$$

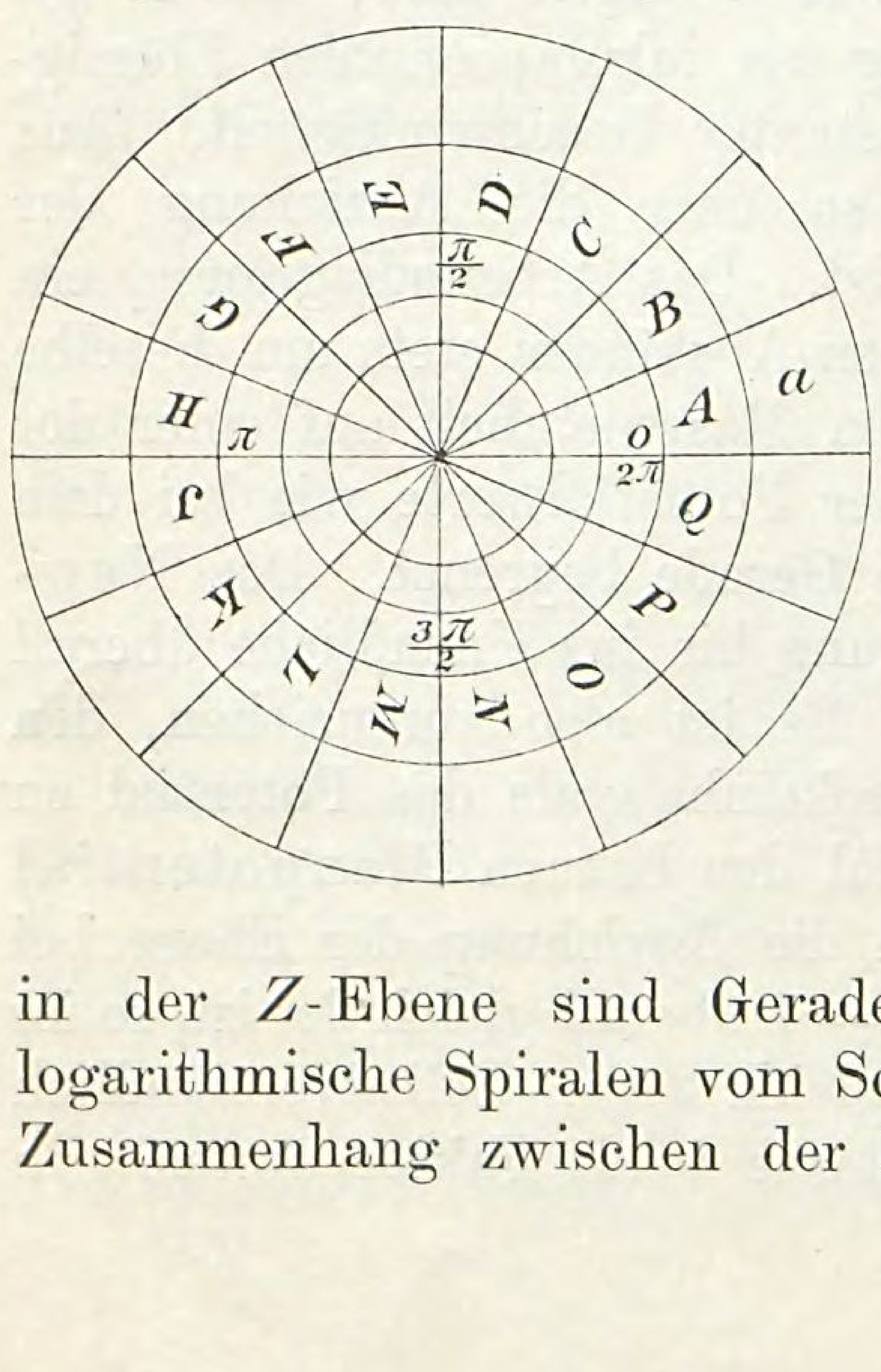
so daſs

$$X = \lg r = \lg\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$Y = \varphi = \operatorname{arctan}\frac{y}{x}$$

ist. Dem Kreise $\lg r = c$ in Fig. 86a oder $r = e^c$ entspricht also die vertikale Gerade $X = c$ in Fig. 86b, dem Strahle durch den Nullpunkt von Neigung $\vartheta = c$ entspricht die horizontale Gerade $Y = c$.

Fig. 86a.



Da statt $\vartheta = c$ auch geschrieben werden kann $\vartheta \pm 2n\pi = c$ erkennt man, daſs der Geraden $\vartheta = c$ unendlich viele horizontale Gerade $Y = c \pm 2n\pi$ entsprechen können. Die Abbildung der z-Ebene geschieht also auf unendlich viele horizontale Parallelstreifen von der Breite 2π, die sich von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ erstrecken. (Vieldeutigkeit des Logarithmus, Periodizität der Exponentialfunktion.)

Die Gerade $X = o$ entspricht dem Einheitskreise, die Geraden $Y = o$ und $Y = \pm 2n\pi$ entsprechen der X-Achse von o bis $+\infty$. Die Diagonalkurven in der Z-Ebene sind Gerade von 45^0 Neigung, in der z-Ebene logarithmische Spiralen vom Schnittwinkel 45^0. Man hat zugleich den Zusammenhang zwischen der Polarkarte von Hipparch-Ptolemaeus

und der Schiffahrtskarte von Mercator. Beliebigen Geraden von der Neigung γ auf dieser Karte entsprechen logarithmische Spiralen vom Schnittwinkel γ mit den Radien in der andern. Diese sind die Darstellungen der loxodromischen Schiffahrtslinien, die sich ergeben, wenn ein Schiff stets denselben Kurs beibehält. Zieht man also z. B. von einem Küstenpunkte Englands nach einem solchen Brasiliens auf der Mercatorkarte eine gerade Linie, so erhält man den zu wählenden Kurs als Neigung der Geraden. Von Tag zu Tag wird auf der Fahrt durch Chronometer und durch Beobachtung der Mittagshöhe (oder auf der Nordhalbkugel durch Beobachtung der Höhe des Polarsterns) Länge und Breite für das Schiff bestimmt und in die Mercatorkarte eingetragen. Der Meeresströmungen wegen und wegen der seitlichen Abweichungen durch Winddruck wird der gefundene Ort nicht genau in die gezeichnete Linie fallen, so dafs man erkennt, in welcher Weise durch geänderten Kurs der Fehler korrigiert werden kann. Darin beruht die Wichtigkeit der Mercatorkarte und der logarithmischen Abbildung für die Nautik. (Vergl. Kapitel XIII der „Isogonalen Verwandtschaften“, wo im Anschlufs an eine Abhandlung des Verfassers in Bd. 16 der Schlömilchschen Zeitschrift die Eigenschaften der Spiralen und Loxodromen in leichter Weise abgeleitet werden. Burmester hat in seiner Kinematik und in Bd. 20 derselben Zeitschrift diese Betrachtungen für kinematische Zwecke verwendet.)

Fig. 86b.

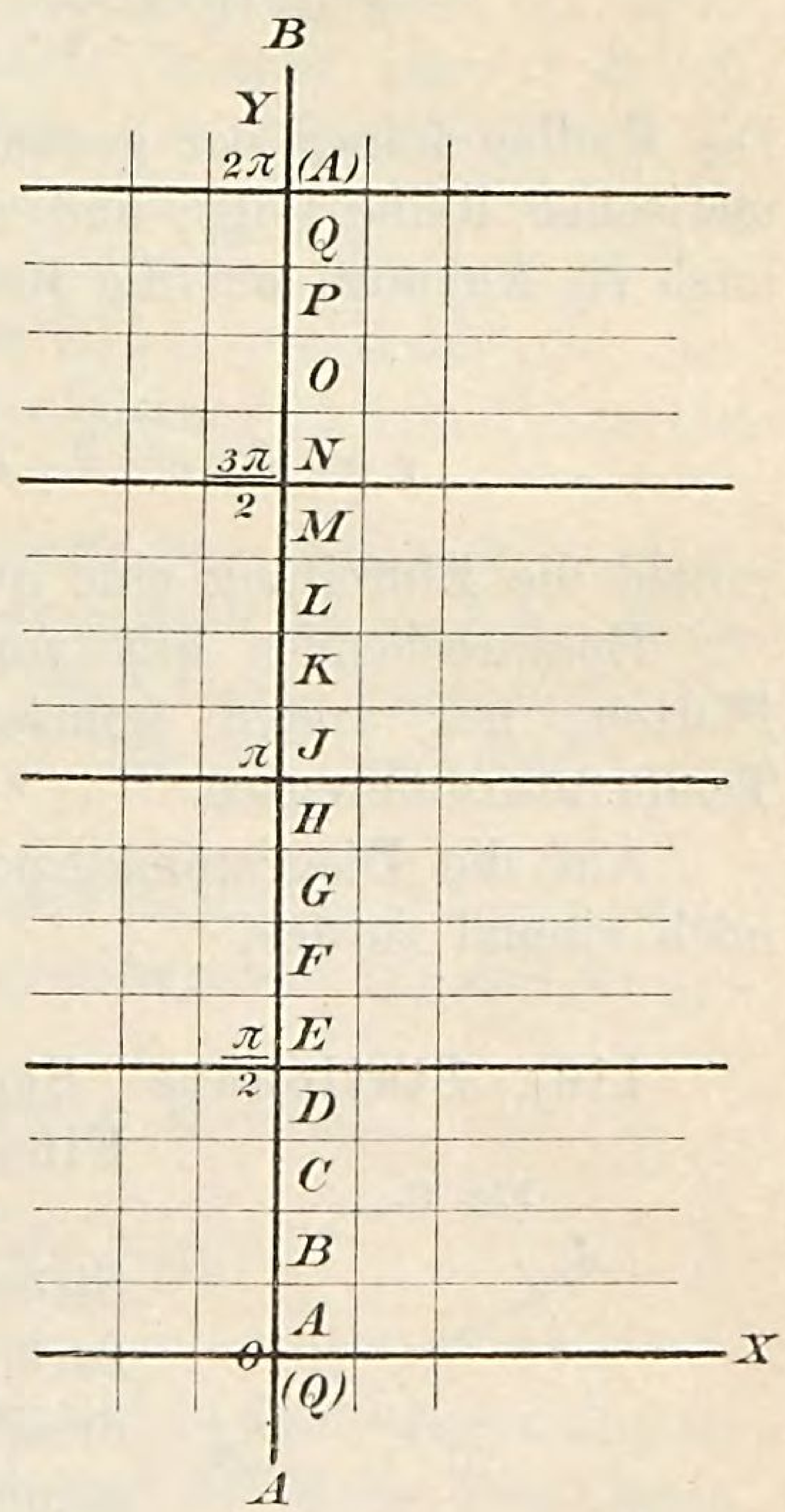


Fig. 86a und b giebt gewissermafsen den Zusammenhang des logarithmischen Potentials und des Planpotentials, sowohl im Newtonschen Sinne als auch im Helmholtzschen Sinne des Geschwindigkeitspotentials.

Strömt z. B. von der unbegrenzten Geraden AB (Fig. 86b) aus Wärme in der Richtung nach $x = +\infty$ ab und wird dabei die Gerade auf konstanter Temperatur gehalten, so sind die senkrechten Parallelen Isothermen, die horizontalen sind Stromlinien. Strömt dagegen in Fig. 86a vom Einheitskreise aus Wärme nach dem unendlichen Bereiche

ab, so sind die koncentrischen Kreise Isothermen, die Strahlen sind Stromlinien. In beiden Fällen entsprechen die benachbarten Niveaukurven konstanten Temperaturunterschieden.

In Fig. 86a folgen die Strahlen unter dem Winkel $\frac{\pi}{8}$ oder $\frac{2\pi}{16}$ aufeinander, die Neigungen bilden also die arithmetische Reihe

$$\vartheta = 0, \pm\frac{\pi}{8}, \pm\frac{2\pi}{8}, \pm\frac{3\pi}{8}, \pm\frac{4\pi}{8}, \dots$$

Die Radien folgen der geometrischen Reihe für e^c, wo c einer arithmetischen Reihe folgt, und zwar handelt es sich (vgl. Method. Lehrbuch II, Anhang) um die Reihe

$$r = e^0, e^{\pm\frac{\pi}{8}}, e^{\pm\frac{2\pi}{8}}, e^{\pm\frac{3\pi}{8}}, e^{\pm\frac{4\pi}{8}}, \dots,$$

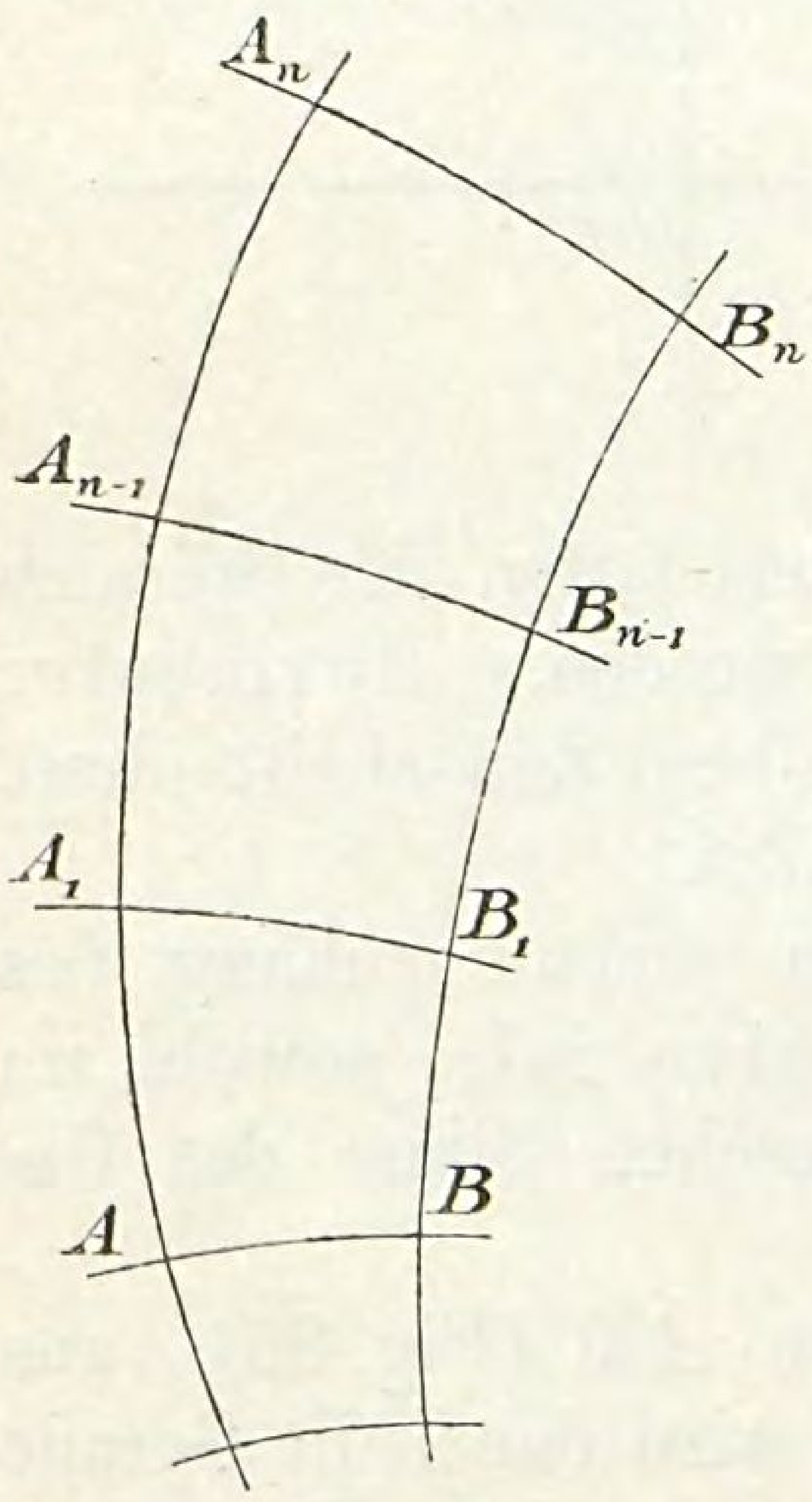
sobald die Einteilung eine quadratische ist.

Entsprechendes gilt von der elektrischen Strömung in ebenen Platten, nur treten konstante Potentialdifferenzen an Stelle der Temperaturdifferenzen.

Auf die Diagrammkörper dieser Potentiale kommen wir später noch einmal zurück.

116) Stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Fig. 87.



Wir kehren zu den in Nr. 53 besprochenen Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten zurück, und zwar soll es sich wieder um den dreidimensionalen Raum, jedoch um ganz allgemein gestaltete Kraftlinien handeln.

Fig. 87 stellt einen von Kraftlinien gebildeten sehr eng zu denkenden Kanal dar. Damit die früher besprochene Bewegung überhaupt möglich sei, sind gewisse Annahmen zu machen. Abzusehen ist von der inneren und äufseren Reibung der Flüssigkeit und den daraus erfolgenden Drehungen der Moleküle. Auch vom Einflusse der Beharrung ist abzusehen. Oben war dies alles nicht nötig, da die Flüssigkeit geradlinig strömte. Jetzt ist die Strömung eine krummlinige, also würde die Flüssigkeit infolge der Beharrung sich tangential von der Stromlinie entfernen. Dies ist wegzudenken oder durch Annahme wirklicher Kanalwände unmöglich zu machen.

Aufserdem ist AA_1 verschieden von BB_1, was zugleich einen Geschwindigkeitsunterschied bedeutet. Die Reibung zwischen benachbarten Stromlinien ist also gleichfalls wegzudenken, in jeder Stromlinie also vollziehen sich die Bewegungen unbeeinflufst durch die Vorgänge in den benachbarten.

Jeder kleine Rechteckskörper der Flüssigkeit, der wie $AB\,B_1A_1$ von Niveauflächen und Stromflächen (Stromlinien) begrenzt ist, bleibt während der ganzen Bewegung ein solcher, nimmt also z. B. die Gestalt $A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n$ an, wobei jedoch das Seitenverhältnis ein anderes geworden ist. Das einbeschriebene Hauptellipsoid bleibt ein solches, erhält jedoch ein anderes Achsenverhältnis. Zwischen den verschiedenen Gestaltungen, die ein Flüssigkeitskörper annimmt, besteht also eine Affinitätsbeziehung in den kleinsten Teilen.

Da die Strömung stationär sein soll, mufs, wie früher $Fv = F_nv_n$ oder $F : F_n = v_n : v$ sein, d. h. die Geschwindigkeit ist an jeder Stelle des Kanals umgekehrt proportional der Fläche des Normalschnitts. Oben war ganz allgemein $F : F_n = p_n : p$ (Nr. 107 und 108), also ist $v : v_n = p : p_n$, d. h.

Die Geschwindigkeiten jedes Strömungsproblems sind proportional den Kräften des entsprechenden Anziehungsproblems.

Beim symmetrischen Zweipunktproblem z. B. war

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2}{r_1^2 r_2^2}\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Abgesehen von einem konstanten Faktor folgt v^2 in den entsprechenden Kraftröhren demselben Ausdrucke. Zugleich war für kleine Weglängen

$$p = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{w},$$

also mufs auch hier

$$v = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{w} = kG$$

sein. Demnach ist $v : v_n = G : G_n$, d. h. die Geschwindigkeit proportional dem Potentialgefälle. Der Ausdruck $vF = kF\frac{V_2 - V_1}{w}$ bedeutet die konstante Stromstärke innerhalb des Kanals.

Die Darlegungen der Abschnitte 53 bis 55 über elektrische und Wärmeströmungen könnten also an dieser Stelle wörtlich wiederholt und auf die allgemeinen Formen der Kraftröhren übertragen werden.

Die Punkte, aus denen die Wärme oder Elektrizität ausströmt, sollen als Quellpunkte bezeichnet werden. Diese Punkte können von verschiedener Ergiebigkeit sein, auch von negativer. Dies entspricht der Koncentration verschiedener Mengen von Elektrizität oder ponderabler Masse, von denen die ersteren entgegengesetzte Vorzeichen haben können. Strömen z. B. aus M_1 und M_2 verschiedene Wärmemengen μ_1 und μ_2 in den Raum, was dadurch erreicht werden kann, daſs sie auf entsprechend verschiedenen Temperaturen gehalten werden, so sind die Stromlinien von der Form $\mu_1 \cos \vartheta_1 + \mu_2 \cos \vartheta_2 = c$, die Isothermen von der Form

$$T = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = c.$$

Ist k die Leitungskonstante, so ist $kF\frac{T_2 - T_1}{w} = kFG$ die sekundlich passierende Wärmemenge. Der Ausdruck Wärmemenge ist nur als Veranschaulichung zu betrachten. Sollen sämtliche Kraftröhren potentiell gleichwertig sein, so muſs durch sämtliche Querschnitte aller Röhren dieselbe Menge flieſsen. Sind Asymptoten vorhanden, so gehört eine unendliche, um den Schwerpunkt S gelegte Kugel zum Problem. Auf dieser müssen dann sämtliche Kraftröhren gleiche Flächen ausschneiden. Dies entspricht dem gleichen körperlichen Winkel bei dem Einpunktproblem.

So entspricht jedem Anziehungsproblem ein Problem, bei dem es sich um stationäre Strömung einer Flüssigkeit, oder der Elektrizität oder der Wärme handelt.

Ist die Strömung zweidimensional, so bleiben nach Nr. 111 kleine quadratische Felder stets quadratische Felder, ein einbeschriebener Kreis also bleibt ein einbeschriebener Kreis, d. h. es findet nicht nur Affinität, sondern Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen statt. Hierbei handelt es sich z. B. um Elektrizitäts- oder Wärmeströmungen in dünnen Platten, auf die wir noch näher eingehen werden.

Selbstverständlich kann man von dem Laplaceschen Satze folgende Umkehrung aussprechen: Steht eine in sich geschlossene, homogen mit Masse belegte Fläche unter einer Spannung, die von Null verschieden ist, so können nicht sämtliche anziehende Massenpunkte auſserhalb der Fläche liegen.

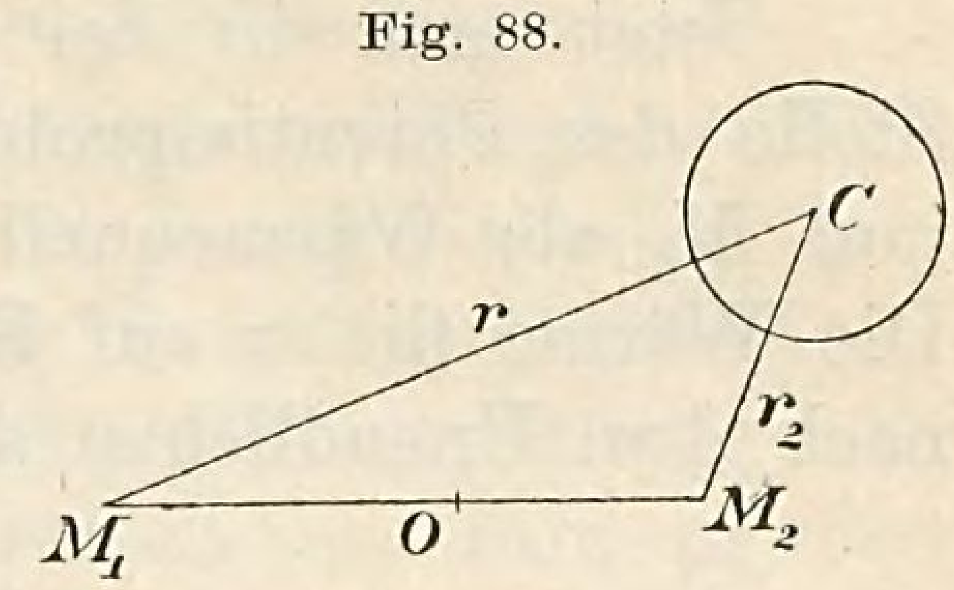
117) Der Kugelsatz von Gauſs.

Wiederum diene das symmetrische Zweipunktsystem mit positiven Massen M_1 und M_2 von der Gröſse 1 als einleitendes Beispiel. Um irgend einen Punkt C sei eine Kugel gelegt, die M_1 und M_2 ausschlieſst. Jede Einheit ihrer Oberfläche sei mit der Masse 1 belegt.

Die Summe der Potentialwerte für die Kugeloberfläche soll gebildet werden.

Alle Rechnung wird dadurch erspart, daſs man sich umgekehrt die homogene Kugelfläche als anziehend wirkend auf M_1 und M_2 denkt, nur sind diese beiden Punkte starr verbunden zu denken, damit ihre gegenseitige Einwirkung aufgehoben wird. Nach dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ist dann das Resultat dasselbe. Nach Nr. 25 hat man sich die Belegung $4\varrho^2\pi$ im Mittelpunkte C vereinigt zu denken. Nach dem Satze von der Arbeit sind beide Potentiale algebraisch zu addieren, es handelt sich also um

Fig. 88.



$$\frac{4\varrho^2\pi}{r_1} + \frac{4\varrho^2\pi}{r_2} = 4\varrho^2\pi\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = P.$$

Folglich ist auch die Summe der Potentialwerte von M_1 und M_2 für alle Punkte der Kugeloberfläche

$$P_k = 4\varrho^2\pi\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Nun ist aber das Potential der Punkte M_1 und M_2 für den Punkt C von der Gröſse

$$P = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

demnach ist zugleich

$$P = \frac{P_k}{4\varrho^2\pi}.$$

Letzteres ist aber nichts anderes als der Mittelwert der Potentialwerte von M_1 und M_2 in den Punkten der Kugeloberfläche, der Potentialwert von M_1 und M_2 für den Punkt C ist also gleich dem Mittelwerte der Potentialwerte für sämtliche Punkte der Kugeloberfläche.

Ganz dieselbe Betrachtung kann man für drei, ganz allgemein für n feste Massenpunkte von beliebiger Masse anstellen, nur müssen diese sämtlich auſserhalb der homogen mit Dichte 1 belegten Kugeloberfläche liegen. Diese Massenpunkte können auch kontinuierliche Körper, Flächen und Linien bilden. Daher gilt ganz allgemein der von Gauſs aufgestellte Satz:

Wird durch irgend welche Massen, die auſserhalb einer Kugelfläche liegen, auf die homogene Massenbelegung der letzteren eine dem Newtonschen Gesetze folgende Anziehung ausgeübt, so ist der mittlere Potentialwert für die Punkte

der Kugeloberfläche gleich dem Potentialwerte für den Mittelpunkt der Kugel.

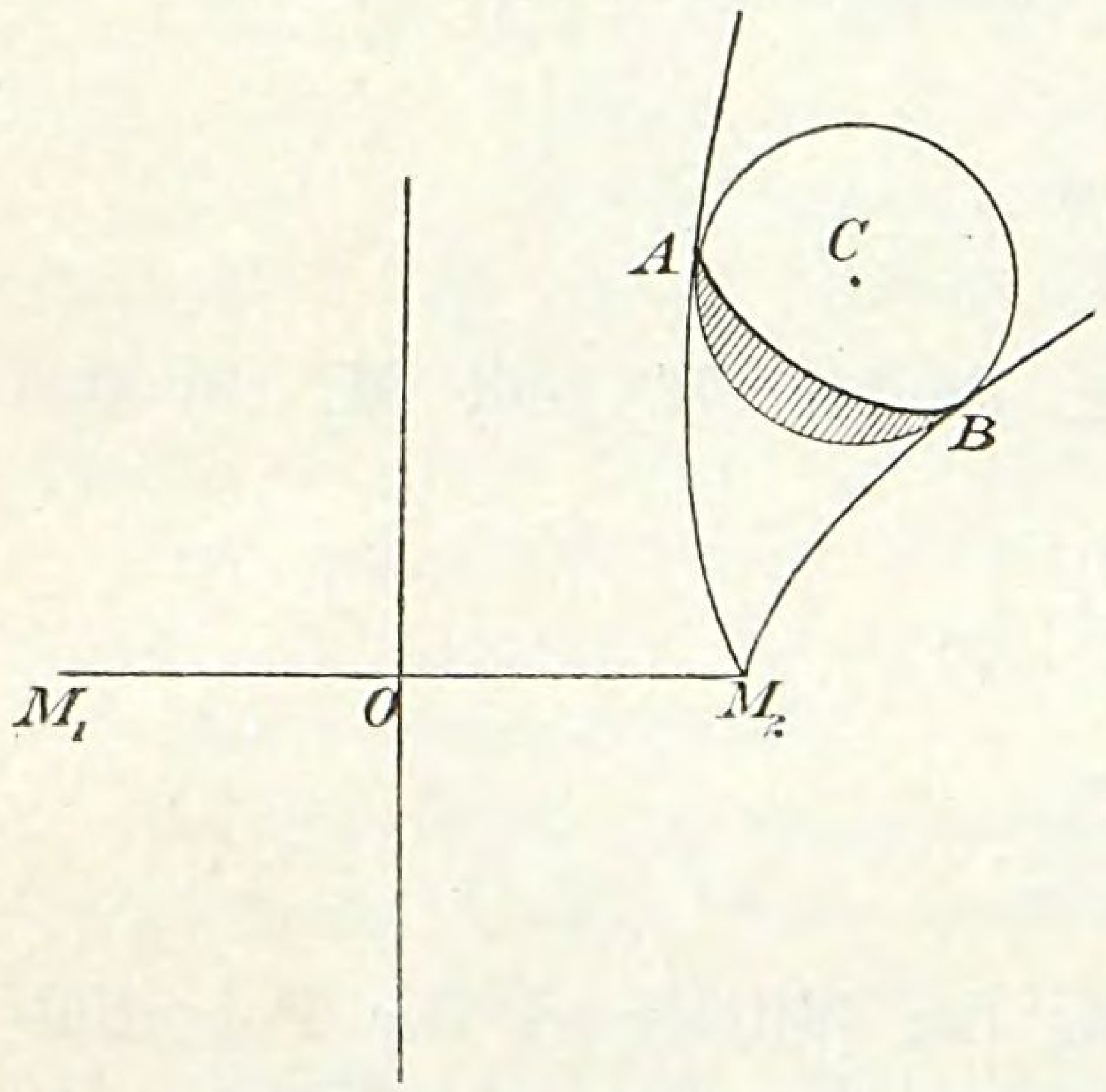
118) Physikalische Deutungen des Gaufsschen Kugelsatzes.

Setzt man in der vorigen Betrachtung das Wärmeproblem an Stelle des Potentialproblems, so sind für das gewählte Beispiel M_1 und M_2 als Wärmequellen von konstanter Temperatur zu betrachten. Die Wärme fliefst auf Kurven von der Gleichung $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ nach dem Unendlichen ab, die Isothermenflächen sind von der Gestalt

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c.$$

Diese Flächen schneiden die um C gelegte Kugelfläche. Da an Stelle der Potentialwerte in den einzelnen Punkten Temperaturen treten, so folgt, dafs die Temperatur im Mittelpunkte C der Kugel gleich der mittleren Temperatur ihrer Oberflächenpunkte ist.

Fig. 89.



Das Einströmen der Wärme geschieht in dem schraffierten Teile der Kugelfläche, der von einer sphärischen Kurve AB begrenzt ist, das Ausströmen im Reste der Fläche. Da die Wärmeströmung als stationär angenommen ist, fliefst ebensoviel Wärme ein, wie aus (der Kraftflufs ist für die Kugel gleich Null).

Durch die geschlossene Linie AB wird die in Frage kommende Kraftröhre, welche die Kugelfläche berührt, abgegrenzt. Längs dieser Linie tritt keine Wärme in die Kugel ein, auch nicht aus ihr heraus. Die in jeder kleinen Kraftröhre fliefsenden Wärmemengen sind uns bekannt.

Dieselbe Betrachtung gilt für elektrische Strömungen entsprechender Art.

119) Das entsprechende Fouriersche Wärmeproblem.

Man denke sich jetzt die Kugel aus ihrer Umgebung herausgelöst, halte aber jeden Punkt ihrer Oberfläche konstant auf derselben Temperatur, die ihm vorher zukam, so wird sich in dem homogenen Innenraum dieselbe stationäre Strömung einstellen, wie vorher. Ist

dieser Zustand hergestellt, so hat man dieselben Stromlinien und dieselben Isothermenflächen wie vorher. In dem schraffierten Teile der Oberfläche mufs man Wärme in demselben Mafse wie vorher zuführen, im andern Teile abführen, um die Temperaturen konstant zu erhalten. Die Summe der zuzuführenden Gesamtwärme ist Null.

Man hat also folgende besondere Aufgabe gelöst:

Die Punkte der Oberfläche einer homogenen Kugel sollen durch Zu- und Abflufs auf konstanten Temperaturen gehalten werden, und zwar so, dafs diese den Temperaturen entsprechen, die den Oberflächenpunkten zukommen würden, wenn aus zwei aufserhalb liegenden gleichen und konstanten Wärmequellen M_1 und M_2 Wärme nach dem unendlichen Bereiche abströmt. Für den sich einstellenden stationären Zustand soll folgendes bestimmt werden: a) Die Gestalt der Stromlinien, b) die Gestalt der Isothermenflächen, c) die Temperatur jedes Punktes im Innern, d) die Menge der auf jeder Einheit der Oberfläche zu- oder abströmenden Wärme, e) die Oberfläche soll in ein Netz von Kraftfeldern potentieller Gleichwertigkeit eingeteilt werden, so dafs in sämtlichen Kraftröhren dieselbe Wärmemenge fliefst.

Zu c) ist zu bemerken, dafs der Mittelpunkt C die mittlere Temperatur der Oberfläche erhält, zu d) dafs die Summe der zuzuführenden Wärme gleich Null sein mufs.

Dieselbe Aufgabe ist für jedes der elementaren Behandlung zugängliche Mehrpunktproblem gelöst, sobald nur sämtliche Quellpunkte aufserhalb der Kugelfläche liegen. Bei drei auf gerader Linie liegenden Punkten z. B., die auf konstanten Temperaturen t_1, t_2, t_3 gehalten werden, handelt es sich um die Stromlinien $t_1 \cos \vartheta_1 + t_2 \cos \vartheta_2 + t_3 \cos \vartheta_3 = c$ und um die Niveauflächen

$$\frac{t_1}{r_1} + \frac{t_2}{r_2} + \frac{t_3}{r_3} = c.$$

Hat der Kugelmittelpunkt von M_1, M_2, M_3 die Entfernungen e_1, e_2, e_3, so ist die Temperatur in ihm von der Höhe

$$\frac{t_1}{e_1} + \frac{t_2}{e_2} + \frac{t_3}{e_3},$$

und dies ist die Mitteltemperatur für die Oberfläche.

So erhält man eine ganze Reihe lösbarer Fälle der allgemeineren Fourierschen Kugelaufgabe, welche lautet:

Auf einer Kugelfläche sei jedem Punkte eine bestimmte Temperatur vorgeschrieben. Der stationäre Wärmezustand des Kugelinnern soll bestimmt werden.

Entsprechende Aufgaben für elektrische Strömungen innerhalb der Kugel aufzustellen, sei dem Leser überlassen. Auch dabei mufs die Summe der zugeführten Elektrizitäten gleich Null sein.

[Von der Lösung der allgemeinen Kugelaufgabe, die mit Hilfe der sogenannten Kugelfunktionen zu erfolgen hat, kann hier selbstverständlich nicht die Rede sein. Es handelt sich nur darum, einen vorläufigen Begriff von jenem interessanten und schwierigen Gebiete der höheren Mathematik und der mathematischen Physik zu geben, bei dem man selbstverständlich auch andere Flächen, z. B. Cylinderflächen, Kegelflächen, Hyperboloid-, Paraboloid-, Ellipsoidflächen u. s. w. benutzen kann. Die Lösung solcher Aufgaben beansprucht wieder die Kenntnis besonderer Funktionen, der Cylinderfunktionen u. s. w. Die für die Oberfläche vorgeschriebenen Werte bezeichnet man als die Randbedingungen des Problems. Statt die Strömung im Innenraume der Kugel zu betrachten, kann man auch die im Aufsenraume stattfindende betrachten, wobei die Punkte wiederum auf konstanten Temperaturen gehalten werden, aber M und M_1 einerseits, der unendliche Bereich andererseits als Zu- oder Abströmungsgebiete zu betrachten sind. So giebt der Laplacesche Satz Einblick in Gebiete der modernen Physik und Mathematik, auf denen Fourier, Green, Gaufs, Riemann, Dirichlet, Jacobi, Neumann und andere erfolgreich gearbeitet haben.]

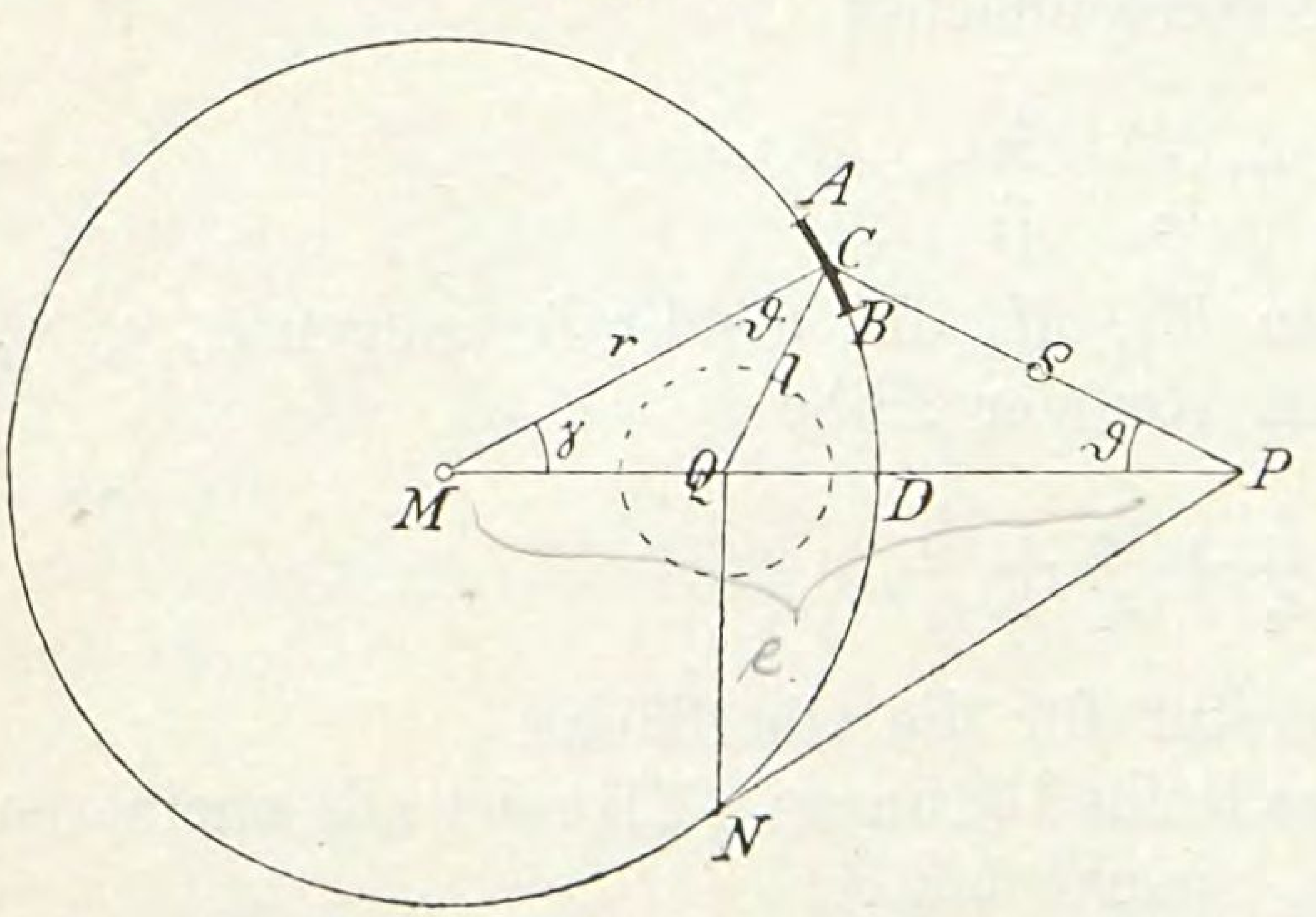
120) Zweidimensionale Probleme entsprechender Art.

In Nr. 25 war gezeigt, dafs $\varrho = \frac{le}{r}$ ist (Fig. 90). Die Anziehung des Bogens $AB = s$ auf P ist bei dem zweidimensionalen Probleme durch $\frac{s}{\varrho}$ oder $\frac{sr}{le}$ gegeben, die in die Linie MP fallende Komponente also durch $\frac{sr}{le}\cos\vartheta$. Die Summe sämtlicher Bogenteilchen giebt

$$\frac{r}{e}\sum\frac{s\cos\vartheta}{l},$$

wobei, ähnlich wie früher, $\frac{s\cos\vartheta}{l}$ als Projektion jedes Bogens $s = AB$ auf den um den reciproken Punkt Q geschlagenen Einheitskreis betrachtet werden kann, so dafs

Fig. 90.



$$\sum \frac{s \cos \vartheta}{l} = 2\pi,$$

die Gesamtwirkung also gleich

$$\frac{r}{e} 2\pi = \frac{m}{e}$$

ist, wo m die Belegung des Umfangs ist. Folglich:

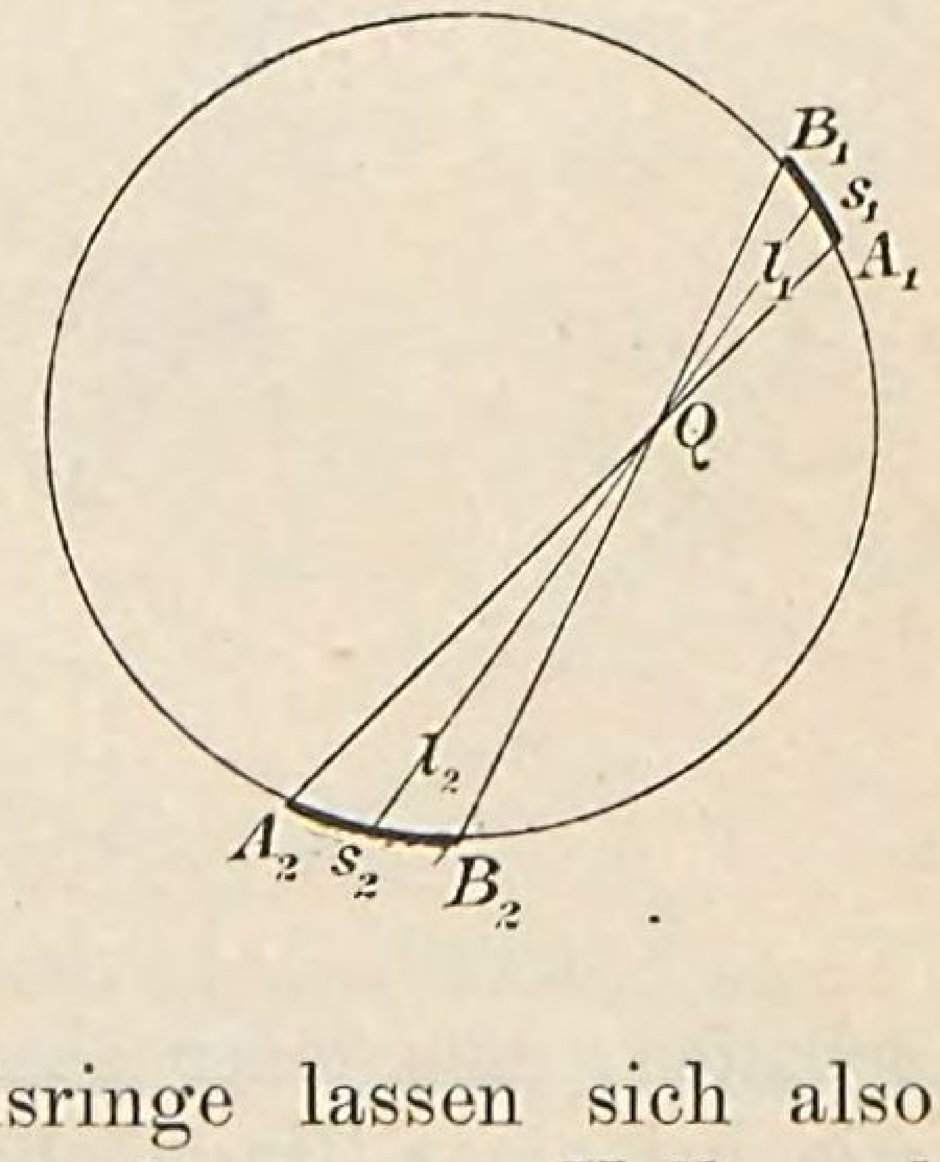
Die Anziehung des homogenen Kreisumfangs auf einen äufseren Punkt nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials ist so grofs, als ob die Gesamtbelegung im Centrum M vereinigt wäre.

Von hier aus führen wörtlich dieselben Schlüsse zu einem Satze über den Kreis, der dem Kugelsatze ganz analog ist. Werden z. B. die Punkte eines Kreises auf konstanten Temperaturen gehalten, so ist für den stationären Zustand der dünnen Kreisplatte das System der Strom- und Niveaulinien bestimmbar, ebenso die Temperatur jedes Punktes. Die des Mittelpunktes ist das arithmetische Mittel der Randtemperaturen.

Beispiele darüber sollen später gegeben werden.

121) **Bemerkung.** Befindet sich der angezogene Punkt in Q, so entspricht jedem kleinen Bogen s_1 ein gegenüberliegender s_2. Die kleinen Dreiecke $A_1 B_1 Q$ und $A_2 B_2 Q$ sind nach dem bekannten Sehnensatze ähnlich. Demnach gilt für die Mittellinien l_1 und l_2, dafs $\frac{s_1}{l_1} = \frac{s_2}{l_2}$ ist. Ziehen sich also die Massen nach dem Gesetze des logarithmischen Potentials an, so ist der Punkt Q unter dem Einflusse von l_1 und l_2 in Ruhe.

Fig. 91.



Aus

$$\frac{s_1}{\varrho_1} \cos \vartheta = \frac{s_1 r}{l_1 e} \cos \vartheta$$

und

$$\frac{s_2}{\varrho_2} \cos \vartheta = \frac{s_2 r}{l_2 e} \cos \vartheta$$

folgt für die Anziehung von P auf einem Bogen $A_1 B_1$ und seinem Gegenbogen $A_2 B_2$ in Bezug auf den reciproken Punkt Q, dafs beide Anziehungen gleich stark sind. (Vgl. Nr. 25.)

Über homogene Kreisscheiben und Kreisringe lassen sich also ganz analoge Schlüsse ziehen, wie früher über homogene Voll- und Hohlkugeln.

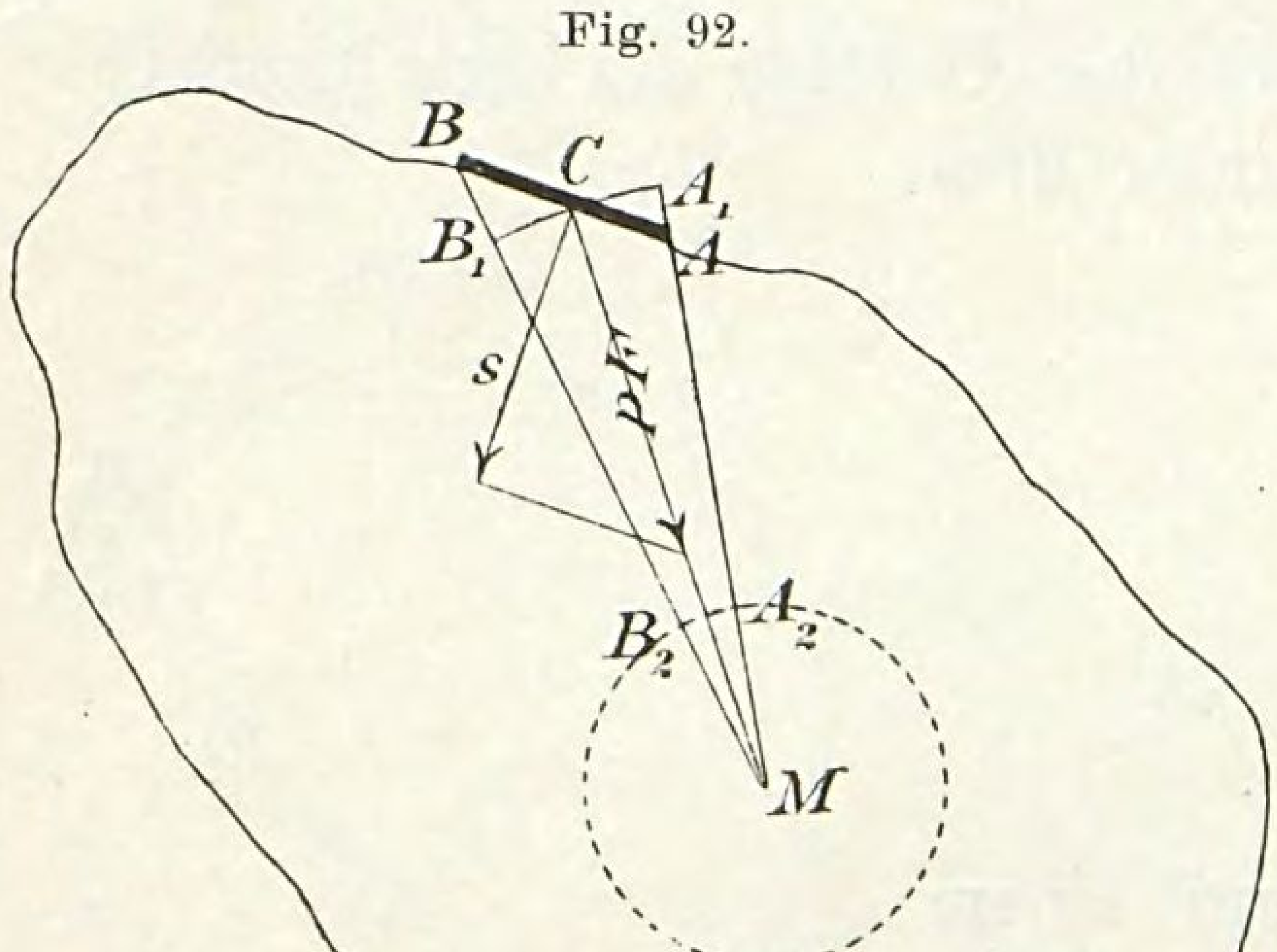
Die zweidimensionalen Probleme gelten auch für das Newtonsche Potential, sobald man annimmt, es handle sich nur um den Normalschnitt unbegrenzter Cylinder und von Systemen unbegrenzter paralleler Geraden.

122) Der Spannungssatz von Poisson.

Im Mittelpunkte einer Kugel befinde sich die Masse 1. Ihre Oberfläche habe eine Massenbelegung von der Dichte 1. Jedes Flächenteilchen F wird von der Kraft $\frac{F}{r^2}$ nach innen gezogen. (Die Gravitationskonstante k ist gleich 1 gesetzt.) Ist z. B. $r = 1$, so ist seine Anziehung gleich F. Im allgemeinen ist die Massenbelegung gleich $4r^2\pi$. Angenommen, die Einzelkräfte ließen sich algebraisch summieren, was nicht der Fall ist, so würde die Anziehung gleich $\frac{4r^2\pi}{r^2} = 4\pi$ sein. Man hat sich trotz der Unzulässigkeit dieser Addition zu der Ausdrucksweise geeinigt, der Innenraum stände unter der Spannung 4π. Faraday drückt sich so aus, daß er sagt, der Kraftfluß des Problems sei gleich 4π. Ist dagegen im Mittelpunkte die Masse m vereinigt, so handelt es sich um die Spannung bezw. den Kraftfluß $4\pi m$.

Lag der anziehende Punkt außerhalb der Kugel, so war in jeder Zelle der Kraftfluß gleich Null, jene Addition machte also keine Bedenken. Das Bedenken schwindet auch hier, wenn man den Vergleich mit der inkompressiblen Flüssigkeit heranzieht. Durch jeden Normalschnitt der einzelnen Kraftröhre strömt sekundlich (abgesehen von der Konstante k) die Flüssigkeitsmenge $Fv = \frac{F}{r^2}$, durch die ganze Oberfläche also die Menge $\frac{4r^2\pi}{r^2} = 4\pi$. Dadurch ist dem hier etwas fremdartig klingenden Spannungsbegriffe wenigstens eine annehmbare physikalische Bedeutung gegeben. Seine Brauchbarkeit wird sich in den folgenden Beispielen ergeben.

Fig. 92.



Ist die Fläche in sich geschlossen, der Innenraum einfach zusammenhängend (d. h. so beschaffen, daß jeder ebene Schnitt den Zusammenhang aufhebt, nicht, wie bei einer Ringfläche, ihn bestehen läßt), so ist die von der Einheit in M auf jede Fläche AB ausgeübte Kraft $pF = \frac{F}{r^2}$. Sie zerlegt

sich wie früher in einen unwirksamen Teil und in einen wirksamen Spannungsteil

$$s = pF \cos \alpha = \frac{F}{r^2} \cos \alpha,$$

was sich wiederum deuten läfst als Projektion von AB auf die um M geschlagene Einheitskugel, für die wirklich

$$A_2 B_2 = \frac{AB \cdot \cos \alpha}{r^2}$$

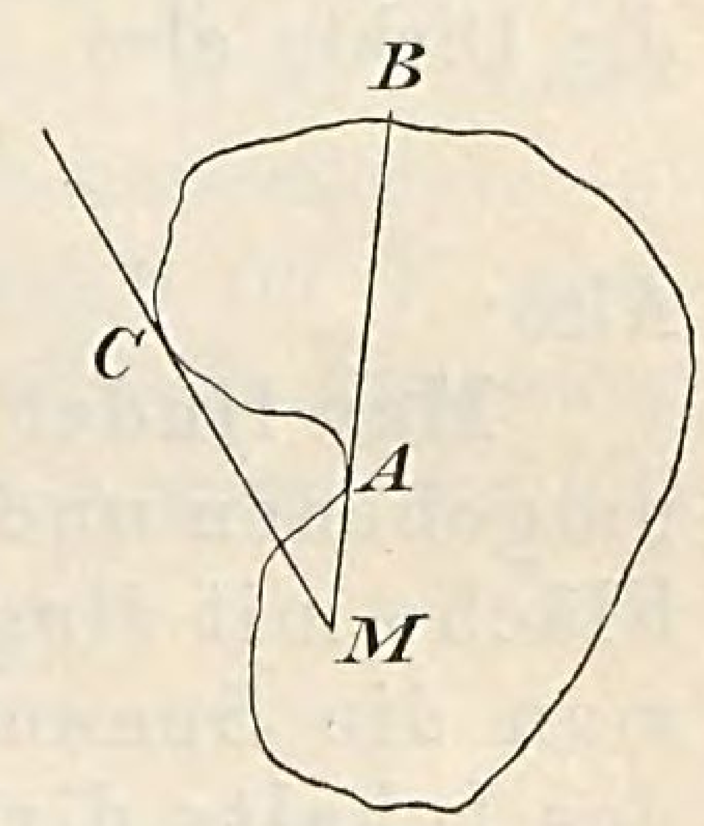
ist, sobald CM und die Normale in C den Winkel α einschliefsen. Demnach ist

$$\sum pF \cos \alpha = \sum (A_2 B_2) = 4\pi,$$

d. h. dies ist die Spannung, unter welcher der Innenraum steht.

Finden Ausbuchtungen statt, die durch eine von M ausgehende Tangentialebene MAB begrenzt werden, so verhält sich M gegen den Teil ABC wie ein äufserer Punkt. Der Beitrag der Ausbuchtung für die Spannung ist demnach gleich Null. Der Satz bleibt also bestehen. Untersuchungen über mehrfach zusammenhängende Räume, wie sie von Neumann und Helmholtz angestellt sind, sollen hier unterbleiben.

Fig. 93.



Befinden sich mehrere anziehende Massenpunkte $m_1, m_2, m_3 \ldots$ im Innern, so sind die betreffenden Spannungsnormalen überall zu addieren, es handelt sich also um die Gesamtspannung

$$4\pi(m_1 + m_2 + \cdots + m_n).$$

Für elektrische und magnetische Untersuchungen können die m teils positiv, teils negativ sein. Die Punkte können auch kontinuierliche Körper bilden. So ergiebt sich folgender nach Poisson genannter, aber auch von Gaufs behandelter Satz:

Befinden sich im Innern einer in sich geschlossenen Fläche, die homogen in der Dichte 1 mit Masse belegt ist, Massen oder Massengebilde $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$, so steht der Raum unter der Spannung

$$4\pi(m_1 + m_2 + \cdots + m_n).$$

Ebenso grofs ist nach Faradays Anschauung der Kraftflufs.

Wenn im folgenden von der Spannung, unter der ein von geschlossener Fläche umgrenzter Raum steht, gesprochen wird, so ist dabei immer eine fingierte Massenbelegung von der Dichte 1 auf der Fläche angenommen. Der Kürze halber soll dies nicht mehr besonders

hervorgehoben werden. Man erkennt aus obigem, dafs der Spannungsbegriff ebenso, wie das Potential, seine Kraft in der Möglichkeit der algebraischen Addition hat.

123) Zusammenhang zwischen Dichte und Spannung. Man denke sich einen massiven Körper, dessen Dichtigkeit zwar an verschiedenen Stellen verschieden ist, aber überall nur stetig veränderlich und nirgends unendlich grofs, so dafs in der nächsten Umgebung jeder Stelle von einer mittleren Dichte gesprochen werden kann. Irgendwo im Innern des Körpers denke man sich eine kleine, im obigen Sinne in sich geschlossene Fläche. Unter welcher Spannung steht dieselbe? Nach dem Laplaceschen Satze giebt die äufsere Masse die Spannung Null. Nach dem Poissonschen steht sie unter der Spannung $4\pi m$, wenn m die eingeschlossene Masse ist. Bedeutet nun J den geometrischen Inhalt des Raumes, δ die mittlere Dichte der Massenanfüllung im Innern der Fläche (bei unendlich kleinen Dimensionen der Dichte δ selbst), so ist $m = J\delta$, also die Spannung

$$s = 4\pi J\delta,$$

die Dichte also

$$\delta = \frac{s}{4\pi J}.$$

Also:

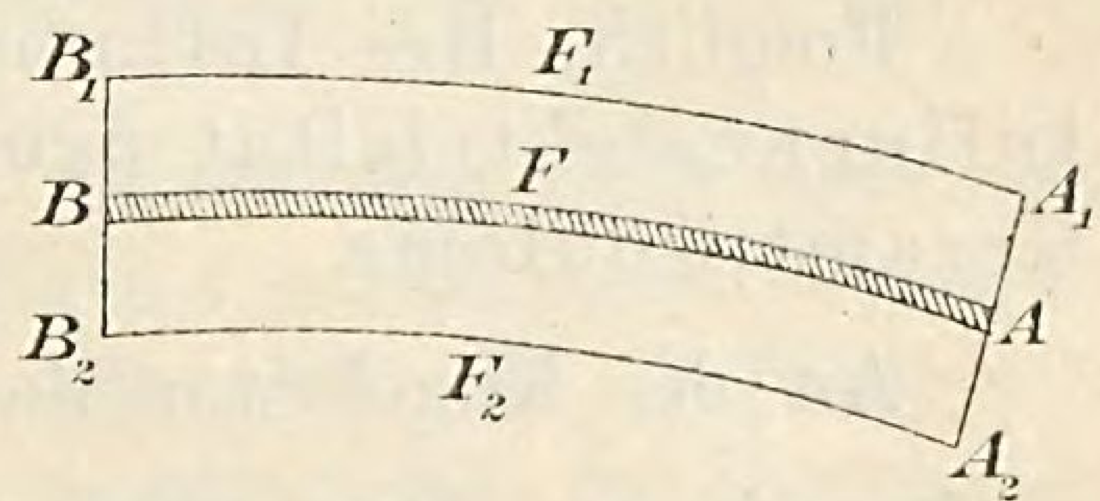
Man findet die Dichte innerhalb einer kleinen von Masse umgebenen und Masse umschliefsenden in sich geschlossenen Fläche mit fingierter Flächenbelegung von Dichte 1, indem man die Spannung, unter der sie steht, durch das 4πfache des Inhalts dividiert.

Dieser Satz ist namentlich für die Lehre vom Magnetismus und für die Elektrostatik von Bedeutung. Besonders bei den Influenzproblemen findet er Anwendung. Bei Influenzproblemen handelt es sich jedoch um Flächenbelegungen. Befindet sich im Innern der in sich geschlossenen Fläche, die z. B. die Gestalt einer Raumzelle haben kann, ein kleines Flächenstück F mit der Belegung m, deren mittlere Dichte δ ist, so ist zunächst $m = \delta F$, so dafs jetzt die Spannung des Raums nur $s = 4\pi F\delta$ und die Dichte $\delta = \frac{s}{4\pi F}$ ist.

124) Anwendung auf Belegungen von Niveauflächen. Auf der Oberfläche eines Konduktors sammle sich Elektrizität in dünner Schicht an, sei es in Folge von Ladung, oder von Influenz, oder infolge des Zusammenwirkens von Ladung und Influenz. Es herrsche Gleichgewicht der wirkenden Kräfte, so dafs die Elektrizität in Ruhe ist. AB sei ein kleiner Teil der Oberfläche des Konduktors, die

selbst zu den Niveauflächen gehört, denn die wirkenden Kräfte müssen senkrecht gegen sie gerichtet sein, da sonst die elektrischen Teilchen sich nicht in Ruhe befinden könnten. $A_1B_1B_2A_2$ sei eine Raumzelle des Problems, A_1A_2 also eine von Kraftlinien gebildete Grenzfläche, ebenso B_1B_2, dagegen seien A_1B_1 und A_2B_2 benachbarte Niveauflächen. Die auf der Fortsetzung der Konduktoroberfläche befindlichen elektrischen Belegungen, ebenso die etwa influenzierend wirkenden sonstigen elektrischen Massen befinden sich aufserhalb der Zellen, geben also zur Spannung den Beitrag Null. Ist m die Masse der Belegung AB, so steht der Zellenraum nach Poisson unter der Spannung $4\pi m$. Man lasse nun A_1B_1 und A_2B_2 sehr nahe aneinander rücken, so dafs die Dimensionen von A_1A_2 und B_1B_2 gegen die von AB, A_1B_1 und A_2B_2 vernachlässigt werden können. Die Gesamtwirkung der sämtlichen vorhandenen Elektrizitäten, der äufseren und inneren, auf jede Seitenfläche der Zelle giebt, da A_1A_2 und B_1B_2 Kraftlinien sind, keine nach innen oder aufsen gehenden Resultanten, diese fallen vielmehr in die Kraftlinien selbst. Also kommen nur die senkrecht gegen F_1 und F_2 gerichteten Einheitsresultanten p_1 und p_2 des Gesamtproblems zur Sprache. Diese mögen für F_1 nach innen, für F_2 nach aufsen gerichtet sein. Die verbleibende Spannung $p_1F_1 - p_2F_2$ mufs nach Poisson gleich $4\pi m$ sein, d. h. gleich $4\pi F\delta$, was die Gleichung

Fig. 94.



$$p_1F_1 - p_2F_2 = 4\pi F\delta$$

giebt. Da aber A_1B_1 und A_2B_2 unendlich nahe aneinander gerückt sind, kann man $F_1 = F_2 = F$ setzen, so dafs die Gleichung übergeht in

$$p_1 - p_2 = 4\pi\delta.$$

Daraus ergiebt sich als Dichte der Belegung

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{4\pi}.$$

Die Dichte der Flächenbelegung ist also der Quotient aus der Differenz der Einheitsresultanten des Problems auf beiden Seiten der Belegung und der Zahl 4π. Nach Nr. 27 kann $p_1 - p_2$ z. B. beim Passieren einer Fläche endliche Werte annehmen, ebenso in den nachstehenden Fällen.

Liegt nun die Fläche F_2 in der leitenden Masse des Konduktors, so ist die auf sie pro Einheit der Belegung wirkende Resultante p_2 des Problems gleich Null, denn sonst würden dort noch scheidende

Kräfte wirken, während Ruhe vorausgesetzt ist. In diesem Falle also wird

$$\delta = \frac{p_1}{4\pi}.$$

Jetzt also gilt der Satz:

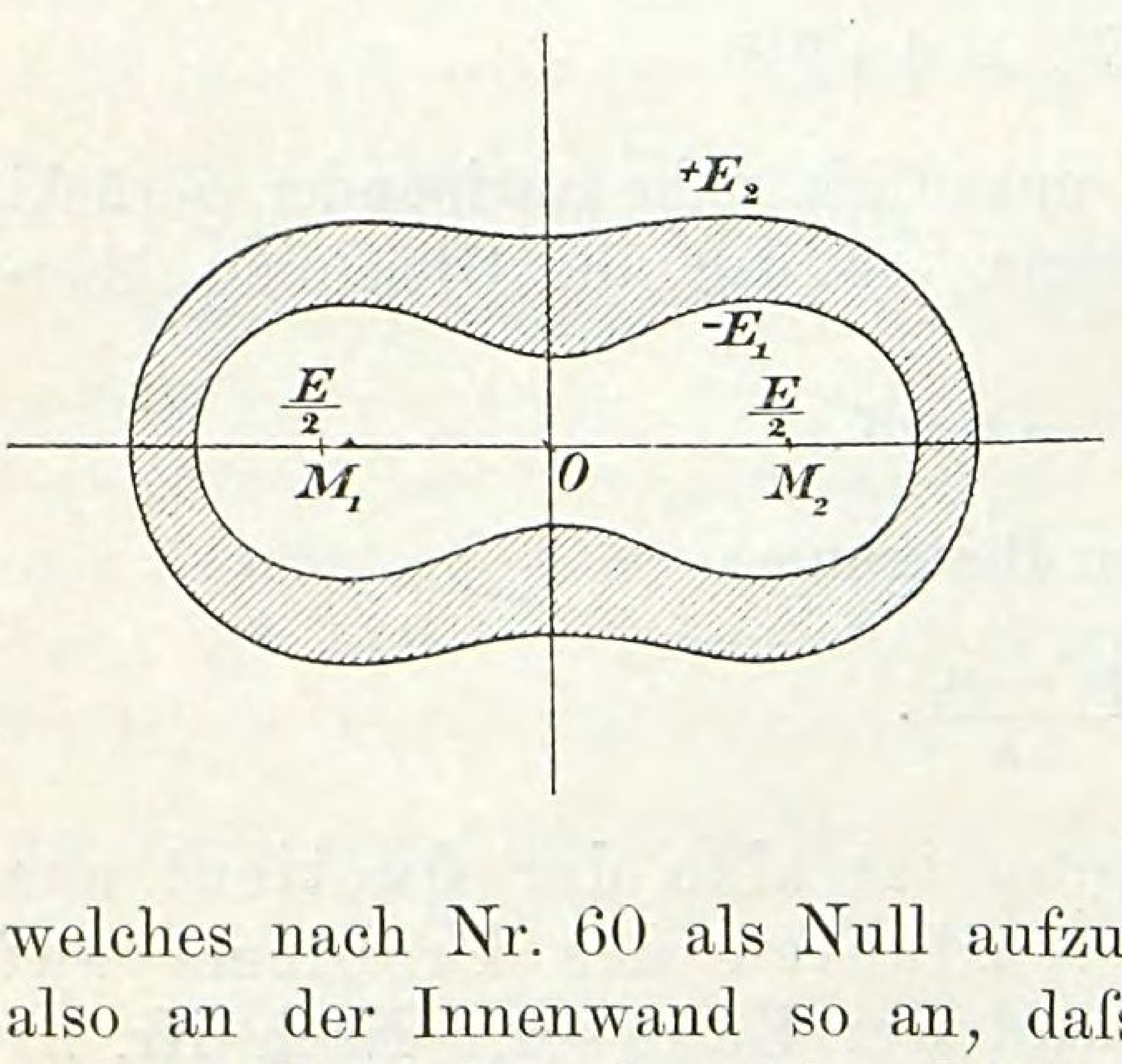
Bei Influenzproblemen ist die Dichtigkeit der elektrischen Belegung des Konduktors an jeder Stelle gleich dem Quotienten aus der dort auf die Einheit wirkenden Resultante des Gesamtproblems und der Gröfse 4π.

Folglich: Bei Influenzproblemen ist die Dichtigkeit der Influenzelektrizität proportional der Einheitsresultante des Gesamtproblems.

An der Kugel war die Richtigkeit des Gesetzes $\delta = \frac{p_1}{4\pi}$ bereits nachgewiesen. Das symmetrische Zweipunktproblem wird die Sache noch klarer erläutern.

125) Influenz auf den Niveauflächen des symmetrischen Zweipunktproblems. Ein metallischer Hohlkörper werde von zwei Niveauflächen des symmetrischen Zweipunktproblems begrenzt, also von zwei durch $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$ charakterisierten Flächen. Man denke sich in den Punkten M_1 und M_2 die elektrische Masse $+E$ zu gleichen Teilen angebracht. Durch elektrische Scheidung sammelt sich an der Innenwand Influenzelektrizität $-E_1$, an der Aufsenwand $+E_2$ an. Wird der Leiter mit der Erde verbunden, so entflieht die letztere nach der Erde. Ist Gleichgewicht eingetreten, so herrscht innerhalb der Metallmasse die elektrische Scheidungskraft Null, d. h. das Potential ist konstant und zwar gleich dem der Erde, welches nach Nr. 60 als Null aufzufassen ist. Die $-E_1$ ordnet sich also an der Innenwand so an, dafs die gesamte Wirkung von $+E$ und $-E_1$ nach aufsen hin gleich Null ist.

Fig. 95.



Daraus folgt zunächst, dafs die Mengen $+E$ und $-E_1$ gleich grofs sind. Wären nämlich die Mengen verschieden, so würde bei gröfserer Entfernung von einem gegenseitigen Aufheben der Wirkungen nicht die Rede sein, da für gröfsere Entfernungen die Wirkung doch

so ist, als ob $+E$ und $-E_1$ im Schwerpunkt S, d. h. in O angebracht wären. Es ist also, abgesehen vom Vorzeichen, $E = E_1 = E_2$.

Zweitens folgt daraus, dafs, wenn die Elektrizität $-E_1$ in derselben Anordnung festgehalten würde, die sie jetzt hat, z. B. in Form einer ponderablen Masse von derselben Dichtigkeitsverteilung, und wenn sie allein wirkte, ihre Wirkung nach aufsen genau so sein müfste, als ob sie zu gleichen Teilen in M_1 und M_2 angebracht wäre, denn sonst würde das gegenseitige Aufheben der Wirkungen unmöglich sein. Dieses Resultat ist von besonderer Wichtigkeit für die Newtonschen Anziehungsprobleme.

Drittens ist folgendes zu bemerken: da Gleichgewicht herrscht, mufs jedes elektrische Teilchen der Innenfläche von sämtlichen Teilchen der Oberflächenelektrizität und den in M_1 und M_2 befindlichen Ladungen so abgestofsen bezw. angezogen werden, dafs die Resultante senkrecht gegen die Innenwand gerichtet ist, da sonst Ruhe nicht eintreten würde. Nun ist aber die von M_1 und M_2 herrührende Teilresultante, da es sich um die Niveaufläche des Zweipunktproblems handelt, senkrecht gegen die Innenwand gerichtet, folglich mufs die Resultante der Wirkungen, die von den Oberflächenteilchen der Elektrizität E_1 herrühren, ebenfalls senkrecht gegen die Innenwand gerichtet sein.

Die auf jedes Teilchen wirkende Gesamtresultante ist am stärksten für die an der Innenwand selbst liegenden Teilchen, sie nimmt aber nach aufsen hin schnell bis zur Null ab, denn an der äufsersten Schicht der Innenbelegung heben die Gesamtwirkungen einander auf.

Würde man die Ladungen M_1 und M_2 entfernen, so würde die Oberflächenelektrizität keine seitlichen Verschiebungen erleiden, sondern überall in der Normalen der Niveaufläche nach aufsen eilen. Wäre also die Schale unendlich dünn (jedoch von zwei Niveauflächen der besprochenen Art begrenzt), so würde sich die Elektrizität statt an der Innenwand, an der Aufsenwand ansammeln und im übrigen an jeder Stelle dieselbe mittlere Dichte behalten haben, wie vorher, denn seitliche Verschiebungen konnten nicht stattfinden.

Dieser Zustand würde auch bestehen bleiben, wenn man jetzt den ganzen Hohlraum kontinuierlich mit leitender Masse anfüllen könnte. Folglich ist die Wirkung der an der Aufsenwand im Gleichgewicht befindlichen Elektrizität auf die Punkte des Innenraums gleich Null, das Potential also dort überall konstant. In der That würden Scheidungskräfte auftreten, wenn es anders wäre.

Daraus folgt, dafs die vorliegende Anordnung der Elektrizität ein stabiles Gleichgewicht giebt. Also:

Wird ein Konduktor, dessen Oberfläche eine Niveau-

fläche des symmetrischen Zweipunktproblems ist, mit Elektrizität geladen, so ordnet sie sich ganz von selbst so an, daſs im Gleichgewichtszustande die Wirkung nach auſsen genau so ist, als ob die Ladung zu gleichen Teilen in M_1 und M_2 angebracht wäre. Die Wirkung auf innere Punkte dagegen ist gleich Null.

Weil die Wirkung der so angeordneten Oberflächenelektrizität nach innen gleich Null ist, war dies auch bei dem Anfangsproblem, wo $+E$ in M_1 und M_2 und $-E_1$ auf der inneren Fläche angesammelt war, der Fall. Jedes Teilchen an der eigentlichen Innenwand wird also nur von M_1 und M_2 angezogen, denn die Wirkung der Oberflächenteilchen nach innen ist Null. Die Resultante, die an den innersten Teilchen wirkt, ist also für die Einheit gleich der Resultante der anziehenden Elektrizitäten in M_1 und M_2, also gleich der Resultante der in den Radien r_1 und r_2 wirkenden Kräfte $\frac{1}{2}\frac{E}{r_1^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{E}{r_2^2}$. An den äuſsersten Teilchen der Schicht hingegen ist die Gesamtresultante gleich Null.

Hier ist die Verteilung als eine schichtenweis erfolgte, d. h. als eine räumliche, betrachtet. Sieht man davon ab, d. h. faſst man sie als eine absolute Flächenbelegung (von unendlich geringer Höhe) auf, so ist nach Nr. 124 die Dichte der Belegung $\delta = \frac{p_1 - p_2}{4\pi}$, oder, da im Innenraume die Resultante p_2 des Gesamtproblems gleich Null ist, $\delta = \frac{p_1}{4\pi}$. Folglich:

Die Influenzelektrizität $-E_1$ sammelt sich an der Innenwand so an, daſs ihre Dichtigkeit an jeder Stelle proportional der von M_1 und M_2 ausgeübten Anziehungskraft ist. Es ist also $\delta : \delta_1 = p : p_1$, d. h. $\frac{\delta}{p}$ ist eine konstante Gröſse c_1.

Hat man nun für das vorliegende Problem den Raum in potentiell gleichwertige Kraftröhren eingeteilt, und teilen diese die untersuchte Niveaufläche in zahlreiche Felder von variabler Gröſse ein, so sind die Flächen F umgekehrt proportional den Kräften, d. h. es ist $pF = c_2$, wo c_2 eine konstante Gröſse ist.

Aus $\frac{\delta}{p} = c_1$ und $pF = c_2$ folgt durch Multiplikation $\delta F = c_1 c_2 = c$, wo c eine neue Konstante ist. Hier bedeutet aber δF die auf jedem Felde aufgespeicherte Elektrizitätsmenge, und diese ist für alle Felder dieselbe Menge c. Folglich:

Die Influenzelektrizität ordnet sich auf den potentiell gleichwertigen Feldern so an, daſs auf jedem Felde dieselbe Menge liegt.

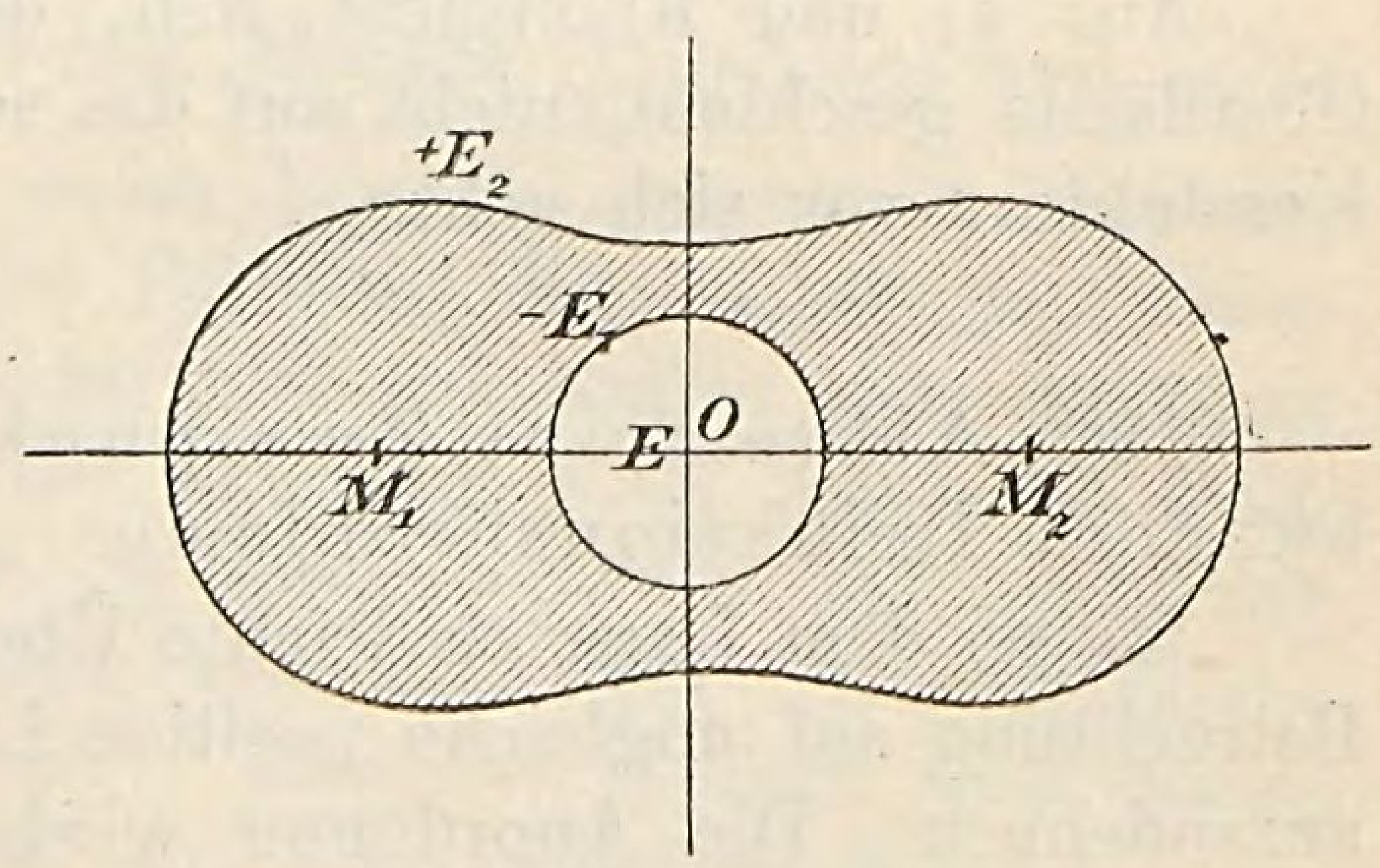
Für ponderable Massen gilt also folgender Schlufs:

Belegt man eine Niveaufläche des symmetrischen Zweipunktsystems so mit ponderabler Masse, dafs auf allen potentiell gleichwertigen Feldern des Problems gleich viel liegt, so wirkt — sehr grofse Zahl der Felder vorausgesetzt — die Belegung nach innen mit der Stärke Null, nach aufsen dagegen ebenso, als ob die Masse zu gleichen Teilen in den Punkten M_1 und M_2 angebracht wäre.

Dagegen würde die homogene Belegung einer solchen Niveaufläche nach aufsen und innen ganz anders wirken. (Nur bei der Kugelfläche ist die homogene Belegung in der Wirkung identisch mit der Mittelpunktsladung. Sie ist also ungeeignet zur Erläuterung der betreffenden Erscheinungen und Sätze.)

Angenommen nun, man hätte M_1 und M_2 ebenso wie vorher geladen, den Konduktor aber nicht abgeleitet, so würde die Influenzerscheinung sich folgendermafsen entwickeln: Die in M_1 und M_2 gleichmäfsig verteilte Elektrizität $+E$ ruft auf der Innenfläche eine gleich grofse Menge von Influenzelektrizität $-E_1$ durch Scheidung hervor, eine ebenso grofse Menge $+E_2$ sammelt sich auf der Aufsenfläche an. Die Scheidung dauert so lange an, bis die Wirkungen der Ladungen in M_1 und M_2 einerseits und der Elektrizität $-E_1$ andererseits nach aufsen einander aufheben. Dies geschieht nur bei der früheren Anordnung. Demnach ordnet sich die Elektrizität $+E_2$ auf der Aufsenfläche so an, als ob die beiden andern gar nicht da wären, d. h. ebenfalls nach dem vorigen Gesetze. Die Wirkung nach aufsen ist so, als ob nur die Ladungen E oder nur die Belegung $+E_2$ vorhanden wäre. In der Masse des Konduktors ist die Wirkung gleich Null. Im Hohlraum wirken nur die Ladungen $+E$ in der gebräuchlichen Weise, die jede der beiden andern dort die Wirkung Null giebt.

Fig. 96.



126) Modifizierte Beispiele. Die Verhältnisse ändern sich, wenn die äufsere Fläche einer andern Schar von Niveauflächen angehört, als die innere.

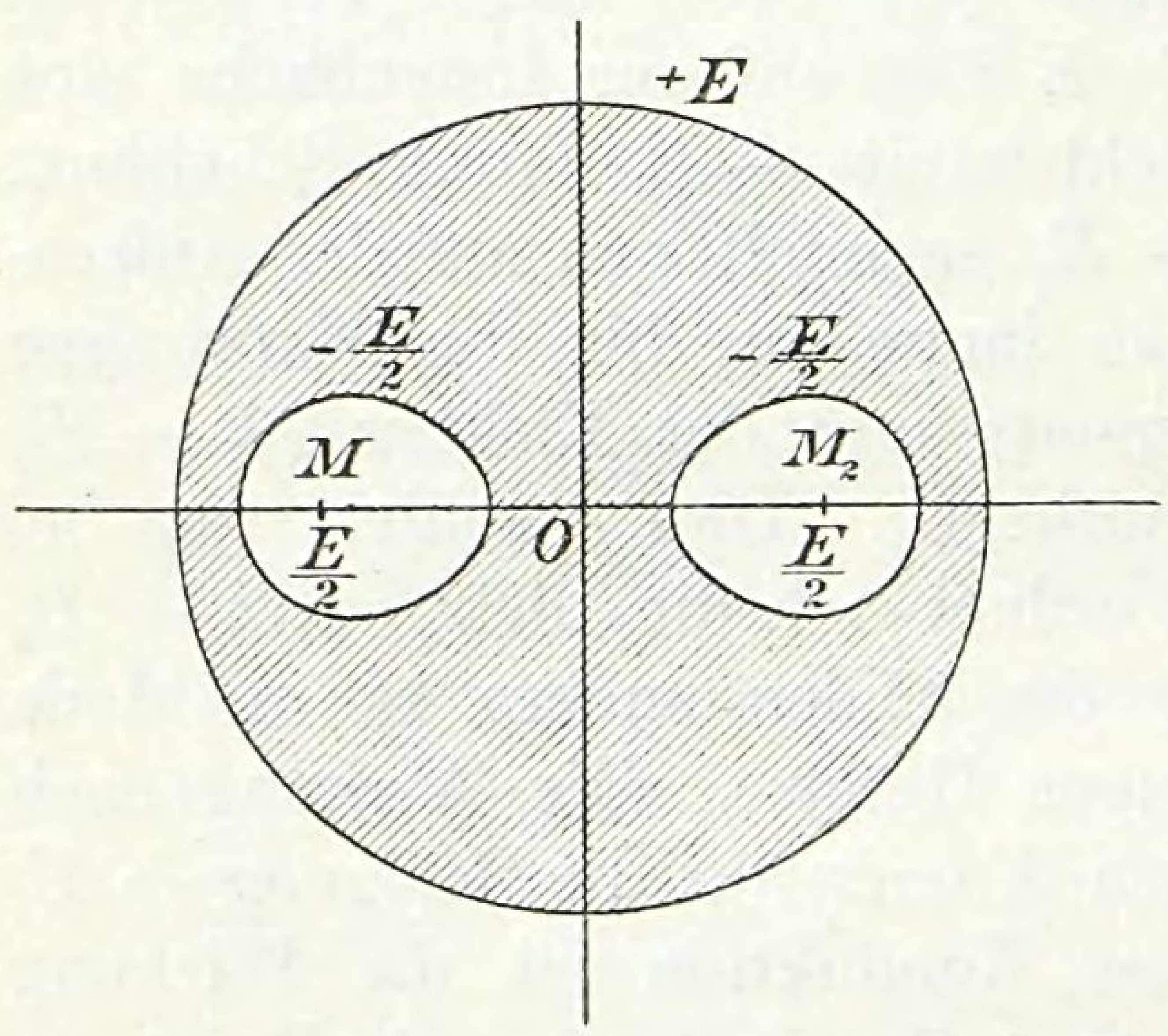
Beispiel a) Die Innenfläche des Konduktors sei eine Kugelfläche, die Aufsenfläche gehöre dem symmetrischen Zweipunktproblem an. Im gemeinschaftlichen Mittelpunkte O befinde sich die Ladung $+E$.

Auflösung. Die Ladung $+E$ ruft auf der Kugelfläche die gleich grofse Menge $-E_1$ hervor, die sich gleichmäfsig verteilt, so dafs die Wirkung beider nach aufsen gleich Null wird. Die gleich grofse Menge $+E_2$ sammelt sich auf der Aufsenfläche an und verteilt sich so, als ob die beiden andern nicht da wären, d. h. nach dem oben besprochenen Gesetze des Zweipunktproblems.

Die Wirkung nach aufsen wird so, als ob Ladungen $+\frac{E}{2}$ in M_1 und M_2 vorhanden wären. In der Masse des Konduktors ist die Wirkung gleich Null. Im Hohlraum wirkt nur die Ladung von O.

b) Die Ladungen $\frac{E}{2}$ befinden sich in M_1 und M_2, der Konduktor wird innen von einer der Niveauflächen des Zweipunktproblems begrenzt (oder von zwei getrennten Ovalen), die Aufsenfläche sei eine Kugel mit O als Centrum.

Fig. 97.



Auflösung. Auf der Innenfläche geschieht die Ansammlung von $-E_1$ nach dem Gesetz des Zweipunktproblems, die Wirkung von $+E$ und $-E_1$ nach aufsen ist Null. Auf der Kugel sammelt sich $+E_2$ homogen verteilt an, als ob die beiden andern nicht da wären. Die Wirkung nach aufsen ist so, als ob $+E$ in O allein vorhanden wäre. Die Wirkung in der Masse des Konduktors ist Null. Die Wirkung im Hohlraum ist die des Zweipunktproblems für M_1 und M_2.

Aus a) und b) ergiebt sich, dafs man von dem, was auf der Oberfläche geschieht, nicht auf das schliefsen darf, was im Innern des Konduktors vor sich geht.

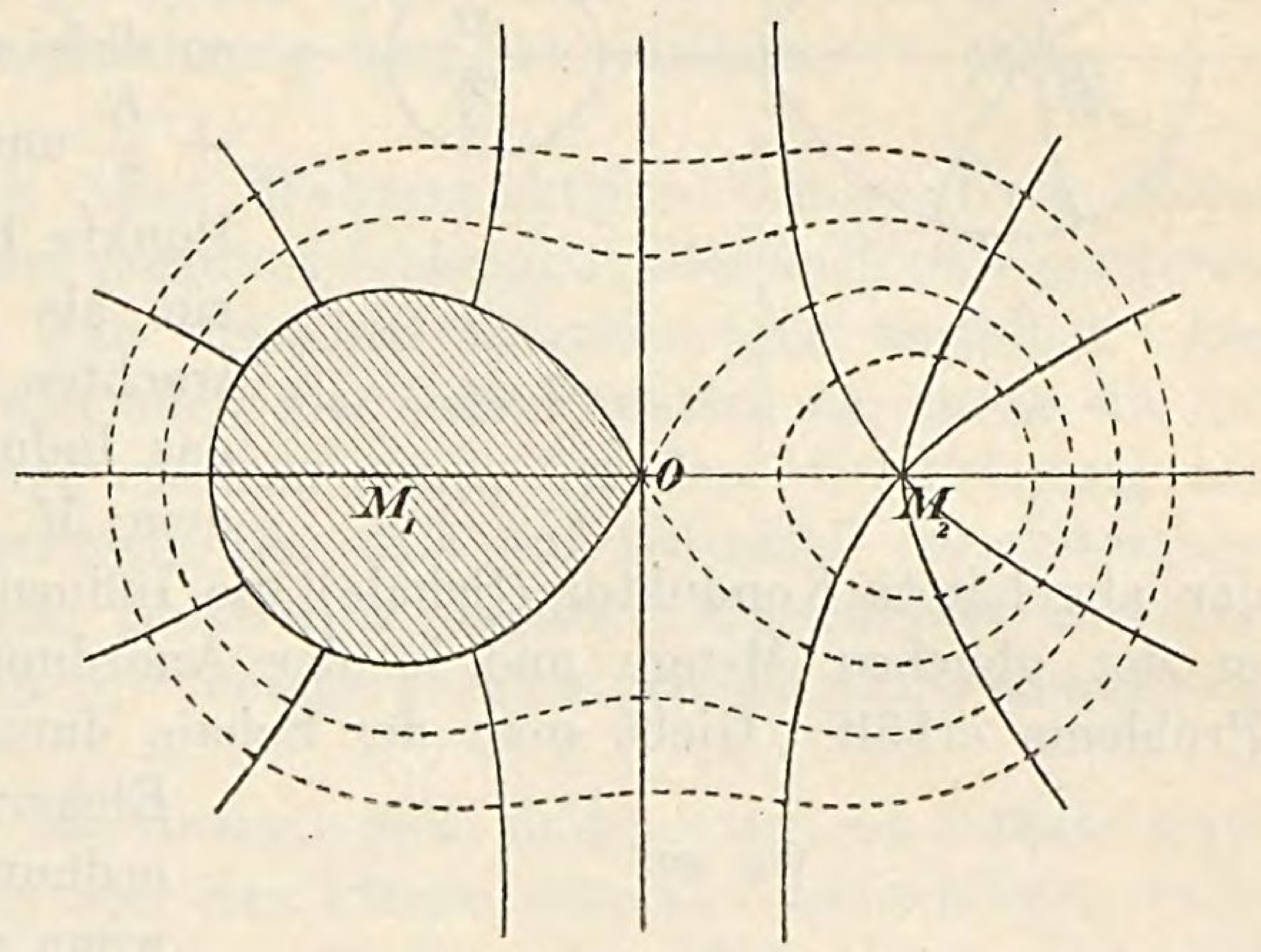
127) Allgemeine Zweipunktprobleme und damit verbundene Induktionsprobleme.

Es sei dem Leser als leichte Übung überlassen, die entsprechende Betrachtung auf ungleiche positive Ladungen der Punkte M_1 und M_2 auszudehnen. Die Anordnung wird stets so, dafs man die Ladung beider Punkte durch die entsprechende Belegung jedes Ovals, welches beide umschliefst, ersetzen kann, sobald es sich um die Wirkung nach aufsen handelt. An Stelle eines solchen Ovals können aber auch zwei zusammengehörige der getrennten Ovale eintreten, die bei gleichen

Ladungen symmetrisch sind. Endlich kann jeder einzelne der Punkte durch ein ihn umschliefsendes Oval ersetzt werden.

In Fig. 98 ist dies beispielsweise so dargestellt, dafs die Ladung in M_1 durch eine ebenso grofse Ladung auf der einen Hälfte der durch O gehenden Kurve ersetzt ist. Ohne die Mitwirkung von M_2 würde die Verteilung der Ladung auf der Konduktorfläche eine ganz andere werden. Bringt man aber nach M_2 dieselbe Ladung $+E$, so bilden sich beide Arten von Induktionselektrizität, an jeder Stelle heben die entgegengesetzten Elektrizitäten in gleichen Quantitäten einander auf, gleichartige aber summieren sich, und so entsteht eine Anordnung, die genau der des ursprünglichen Zweipunktproblems entspricht. Man kann den einen Konduktor auch massiv machen, ohne dafs sich etwas ändert. Scheidende Kräfte treten eben im Innern nicht mehr auf. Die Wirkung der Ladung der Oberfläche und des Punktes M_2 zusammengenommen auf das Innere der Metallmasse ist gleich Null.

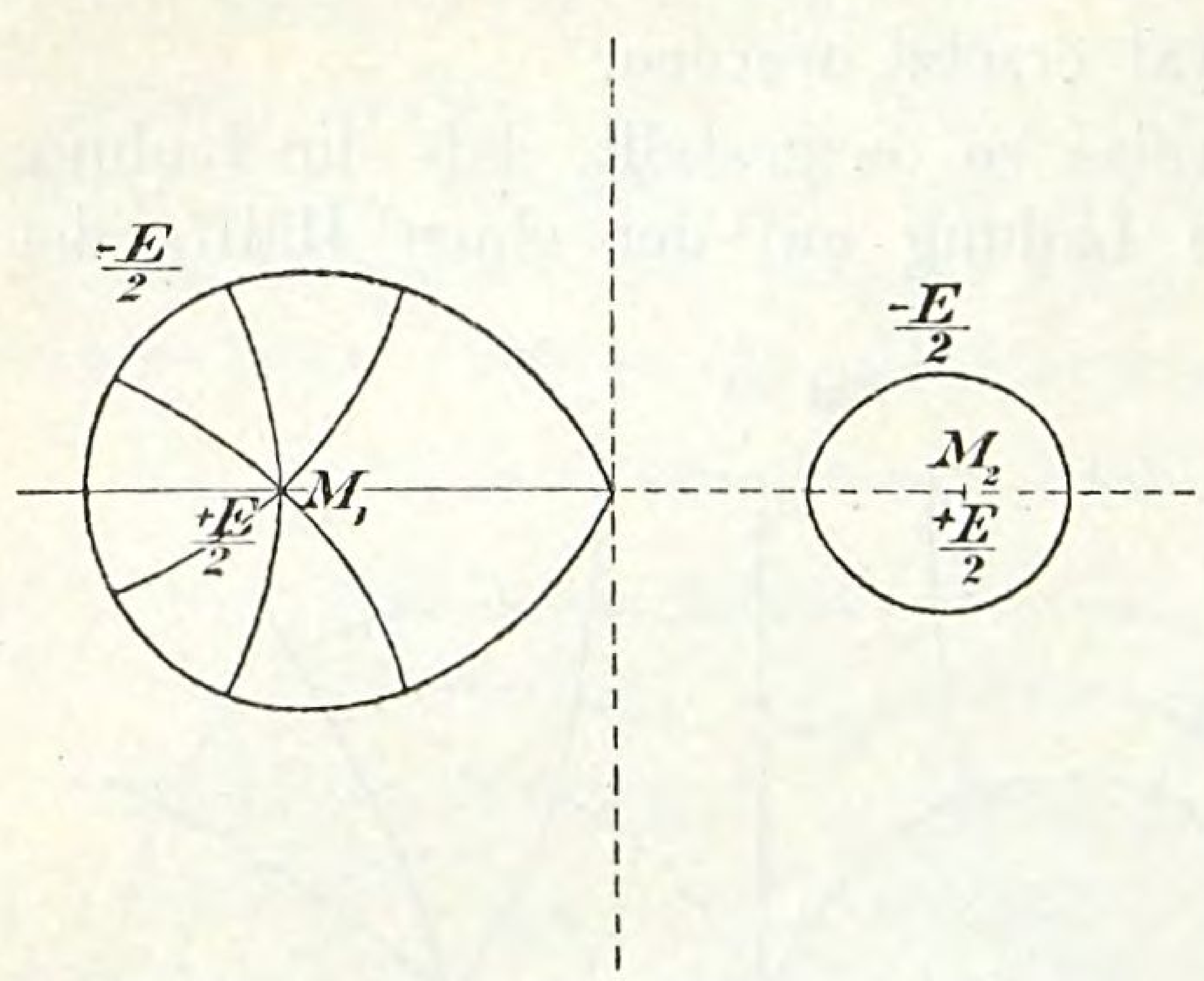
Fig. 98.



Statt die Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche abströmen zu lassen, kann man folgendes machen. Man denke sich die Punkte M_1 und M_2 mit gleichen elektrischen Mengen $\frac{E}{2}$ geladen und beide von einer Schale umgeben, die beide Punkte umschliefst und die Gestalt einer der Niveauflächen des Problems hat. Ladet man diese mit $-E$, so ordnet sich die Elektrizität von selbst dem Problem entsprechend an. Die Wirkung der Belegung nach innen ist Null, die Kraftlinien und Niveauflächen im Innern werden nur noch von M_1 und M_2 hervorgebracht, bleiben also die alten. Die Wirkung nach aufsen ist Null. (Vgl. Nr. 125.) Dasselbe erreicht man durch Induktionswirkung von M_1 und M_2 auf die abgeleitete Schale.

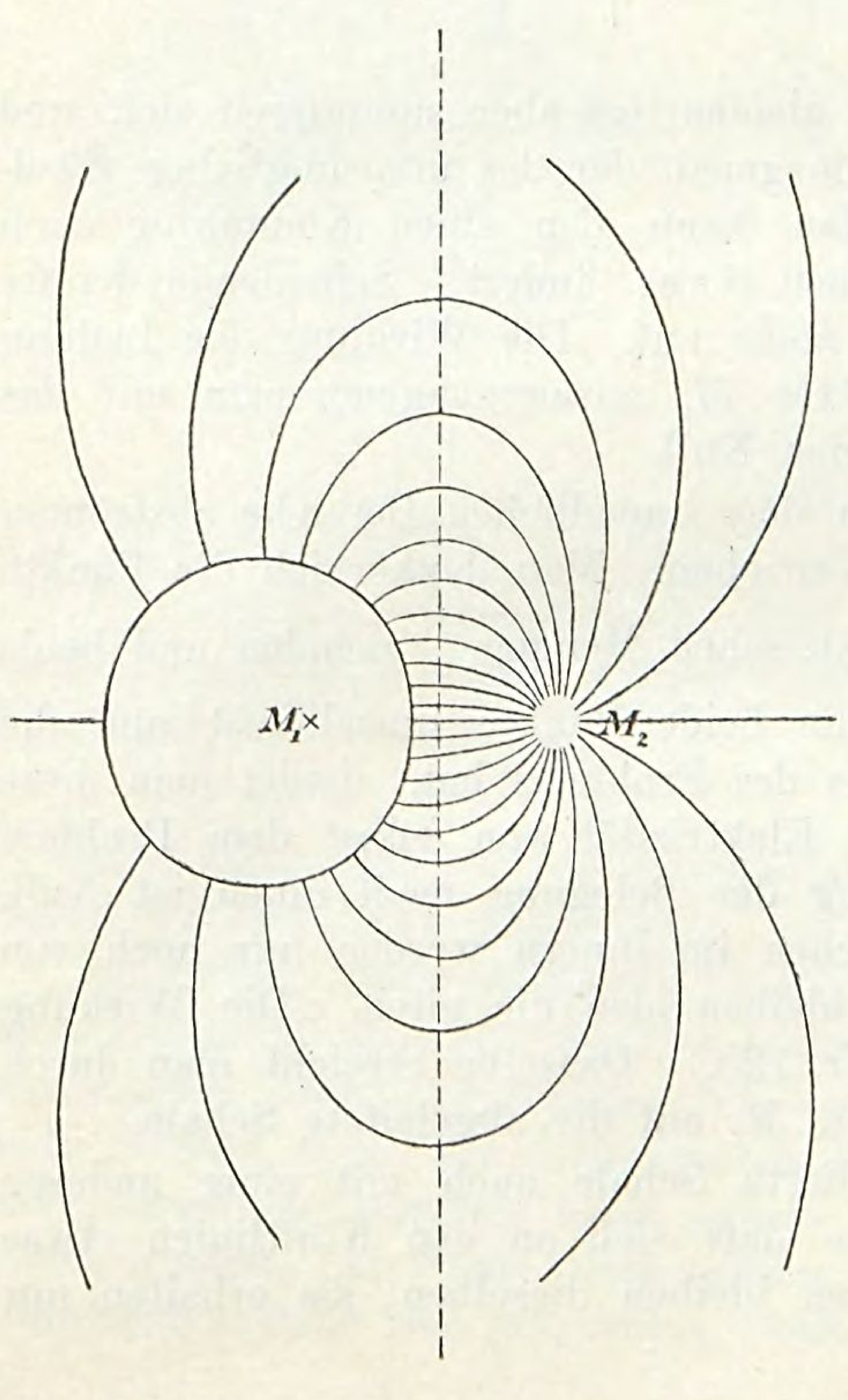
Man kann aber die isolierte Schale auch mit einer anderen Elektrizitätsmenge laden, ohne dafs sich an den Kraftlinien etwas ändert. Auch die Niveauflächen bleiben dieselben, sie erhalten nur andere Potentialwerte.

Fig. 99.



Dasselbe erreicht man mit getrennten Ovalen, die jene Punkte umschliefsen. Sie brauchen nicht gleich zu sein. Läfst man nun das um M_2 gelegte unendlich klein werden, so dafs sich dort die Ladungen $+\frac{E}{2}$ und $-\frac{E}{2}$ in demselben Punkte befinden, so kann man sie als nicht vorhanden betrachten. Dann stellt die Figur das Induktionsproblem dar, bei dem M_1 eine Ladung hat und der abgeleitete Konduktor (Schale) die Influenzelektrizität erster Art in der gleichen Menge und in der Anordnung des ursprünglichen Problems erhält. Giebt man der Schale durch Ladung eine andere Elektrizität, so bleibt die Anordnung nur dann dieselbe, wenn die gleiche Differenz im Punkte M_2 angebracht wird und influenzierend mitwirkt.

Fig. 100.



Diese Bemerkungen gestatten auch, den Fall entgegengesetzter Ladungen der Punkte M_1 und M_2 zu betrachten, bei dem Fig. 70 zur Geltung kommt.

Der Punkt M_1 mit Ladung $+E$ kann durch das ihn umschliefsende Oval mit der Ladung $+E$ ersetzt werden, ohne dafs sich an den Kraftlinien etwas ändert. Das Oval kann auch in die Symmetrieebene übergehen, es kann auch ein solches werden, welches M_2 umschliefst. Ob man die Ladung $+E$ giebt, oder den abgeleiteten Konduktor durch Influenz von M_2 aus ladet, ist gleichgültig.

Im Falle ungleicher Ladungen von M_1 und M_2 hat das Problem nicht die gezeichnete Symmetrieebene, wohl aber gehört nach Nr. 97 eine Kugel dazu. Das Problem der Influenz eines Punktes M_2 auf Ebene oder Kugel kann also an dieser Stelle ohne weiteres gelöst werden. Da dies jedoch von anderen Gesichtspunkten aus gelegentlich der elektrischen Bilder geschehen soll, deren Theorie hier schon vorbereitet ist, kann die Ausführung hier unterbleiben.

128) Bemerkung über Mehrpunktprobleme. Über Mehrpunktprobleme mit lauter positiven Ladungen (oder auch teils positiven, teils negativen) kann man dieselben Betrachtungen anstellen. Das Wichtigste ist, dafs man auch hier jede Punktladung durch ein nur sie umschliefsendes Oval ersetzen kann, bei dem die Belegung mit derselben Masse so geregelt ist, dafs auf potentiell gleichwertigen Feldern gleiche Mengen Elektrizität lagern. Umschliefst ein Oval mehrere der Punkte, so gilt entsprechendes. Auch Influenzprobleme lassen sich behandeln.

Grundsätzlich gilt das Gesagte auch dann, wenn die Punkte einen kontinuierlichen Körper, oder eine Fläche, oder eine Linie bilden, wobei die Dichtigkeit in den einzelnen Punkten konstant oder veränderlich sein kann. Kennt man also die Niveauflächen und Kraftlinien eines Anziehungsproblems, so kann man das Problem benutzen, aus ihm auf obigem Wege gewisse andere Probleme zu lösen. Auf cylindrische und zweidimensionale Probleme kommen wir noch ausführlicher zurück. Die Betrachtungen des 5. Kapitels bieten dem Leser zahlreiche Übungsbeispiele. Der Kürze halber sei das Gesamtresultat nur für positive Ladungen angegeben.

Ladet man einen Leiter, dessen Gestalt durch die Niveaufläche eines bekannten Anziehungsproblems bestimmt ist, mit Elektrizität, so ordnet sich diese so an, dafs die Dichtigkeit der Flächenbelegung proportional den Einheitsresultanten des Anziehungsproblems für jede Stelle der Oberfläche ist, dafs also auf den potentiell gleichwertigen Feldern gleich viel elektrische Masse liegt. Die Wirkung der so angeordneten Elektrizität nach Innen ist gleich Null. Die Wirkung nach aufsen entspricht der der Kernladungen.

Wird der Leiter durch zwei Niveauflächen des Problems begrenzt und giebt man den Kernpunkten ihre Ladung, so ordnen sich die beiden Influenzelektrizitäten auf den Oberflächen nach dem obigen Gesetze an.

Ladet man zwei dünne Schalen, die nach Gestalt und Lage mit zwei Niveauflächen des Anziehungsproblems zusammenfallen, mit gleichartigen oder ungleichartigen Elek-

trizitäten, so ordnet sich jede der beiden so an, als ob die andere gar nicht vorhanden wäre.

Denkt man sich um die geladene Kernmasse eines Anziehungsproblems eine in sich geschlossene dünne Schale, die nicht zu den Niveauflächen des Systems gehört und leitet man sie nach der Erde ab, so ordnet sich die Influenzelektrizität erster Art so an, dafs die gesamte Wirkung nach aufsen gleich Null ist, denn in der Masse des Leiters herrscht das konstante Potential der Erde (Null). Denkt man sich auf der Schale eine ponderable Massenbelegung, deren Dichtigkeit der der Elektrizität entspricht, so wirkt diese Belegung nach aufsen ebenso, wie die Kernmassen.

So erkennt man die Richtigkeit des folgenden wichtigen Satzes von Green:

Auf jeder beliebigen in sich geschlossenen Fläche, die eine gegebene kontinuierliche oder diskontinuierliche Massenverteilung umschliefst, läfst sich ponderable Masse so verteilen, dafs die Wirkung nach aufsen dieselbe ist, wie die der inneren Massen.

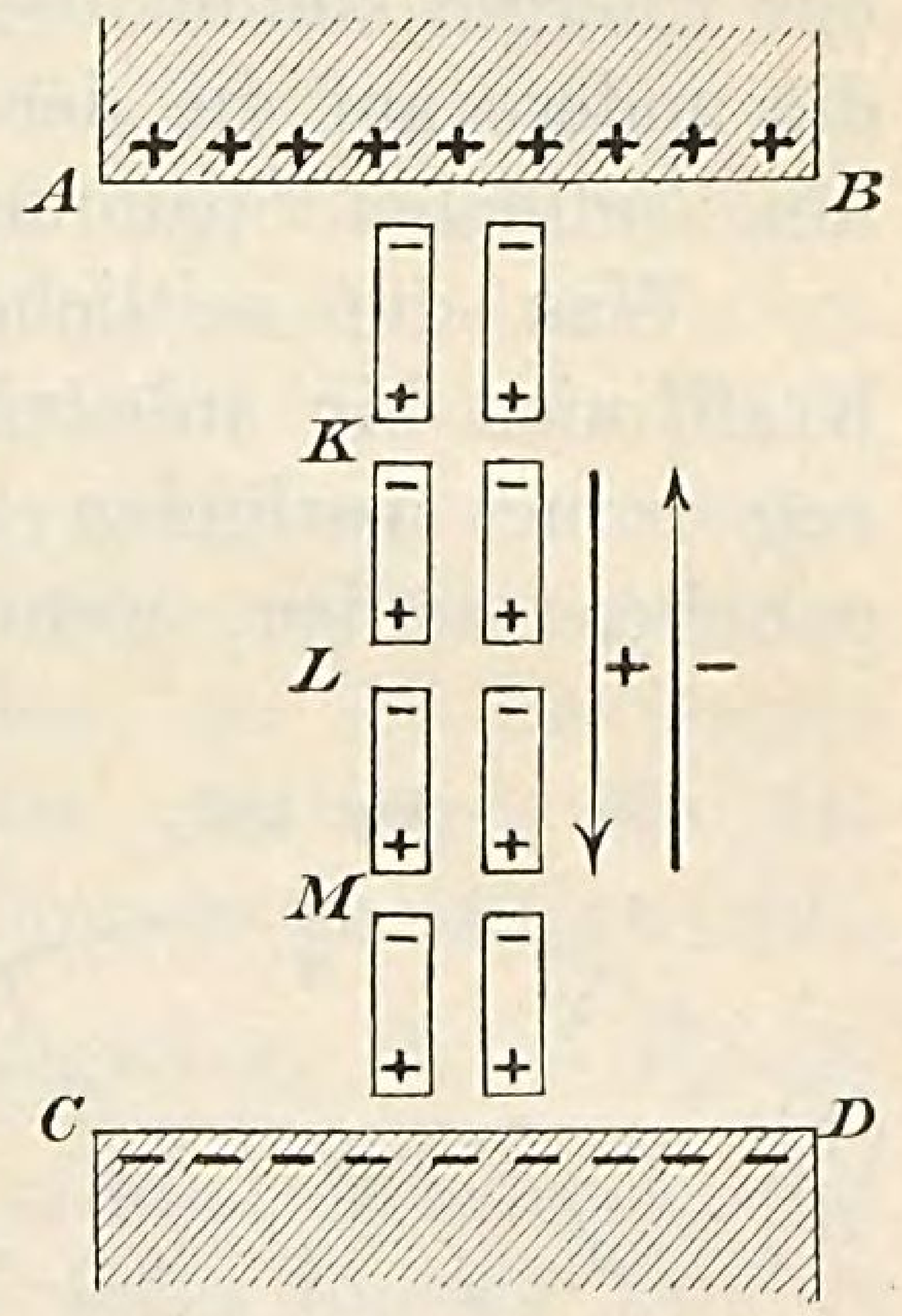
So läfst sich z. B. auf der Kugelfläche Masse so verteilen, dafs sie nach aufsen ebenso wirkt, wie beliebig viele Massen m_1, m_2, m_3, ... in ihrem Innern. Ferner läfst sich auf jeder geschlossenen Niveaufläche eines beliebigen Punktproblems Masse so verteilen, dafs sie nach aufsen wirkt, wie ein beliebiger Punkt im Innern. Für unendliche Entfernung sind die anziehenden Kräfte der einzelnen Teilchen parallel, die Resultante aber ist nach jenem Punkte hin gerichtet. Dieser Punkt ist wegen des Parallelismus der Kräfte der Schwerpunkt der Belegung. Man nennt eine solche Belegung eine centrobarische. Beispiele sollen in einem besonderen Kapitel gegeben werden.

Für den Greenschen Satz ist hier nur eine Art von Anschauungsbeweis gegeben. Der Existenzbeweis für die durch jene Belegung repräsentierte Funktion ist analytisch nur schwierig zu führen. Man kann also die obigen Betrachtungen als eine vorbereitende Einführung in wichtige Fragen der Funktionentheorie betrachten. Die folgenden Kapitel werden noch weiteren Einblick in die Folgerungen der Sätze von Laplace und Poisson geben.

129) Bemerkungen zur Theorie der Kraftlinien und der elektrischen Verschiebung. In Nr. 59 war gezeigt, in welcher Weise eine Ladung $+E$ des Leiters AB nach Faradays Ansicht die Polarisierung der längs der Kraftlinien angeordneten Moleküle hervorbringt. Dieselbe erfolgt schrittweise mit endlicher Geschwindigkeit. Sie setzt sich nach dem unendlichen Bereiche hin fort, wenn

die Kraftlinie nicht auf einen anderen Leiter trifft. Geschieht aber letzteres, so tritt auf dem zweiten Leiter Scheidung der Elektrizitäten ein. Enden sämtliche Kraftröhren in diesem, so ist die Influenzelektrizität erster Art auf ihm von derselben Menge, wie die Ladung, nur entgegengesetzt. Endet nur der n^{te} Teil der Kraftröhren in ihm, so ist sie von der Menge $-\frac{1}{n}E$. Am Anfang und Schlufs jeder Kraftröhre liegt auf beiden Leitern dieselbe Menge entgegengesetzter Elektrizitäten. Auf den Molekülen des Dielektrikums befinden sich entsprechende Quantitäten, und zwar sind diese auf jedem Teilchen nach den Endflächen hin zusammengedrängt. Es hat sich also in jedem Teilchen eine Verschiebung der positiven Elektrizitäten im Sinne des einen Pfeils, eine solche der negativen in der des andern Pfeils vollzogen. Fernwirkungen finden nicht statt, denn die entgegengesetzten Elektrizitäten zweier Nachbarmoleküle liegen so nahe beisammen, dafs ihre Wirkungen auf gröfsere Entferungen hin sich gegenseitig aufheben (neutralisieren) würden. Die an den Schlufsstellen der Kraftlinie im Dielektrikum liegenden scheinbar freien Elektrizitäten sind, wie bei einem Kondensator, durch die des benachbarten Leiters gebunden.

Fig. 101.

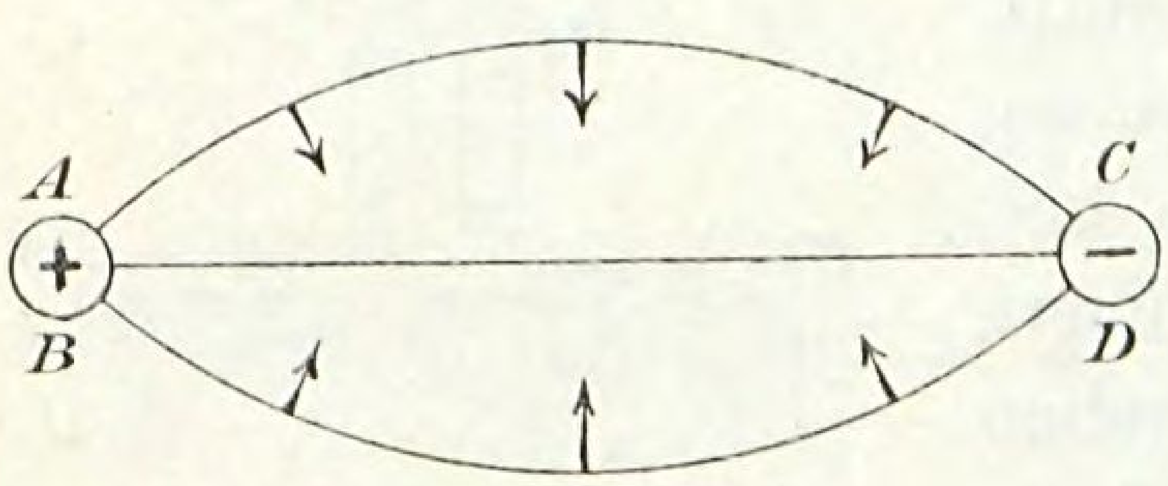


Dagegen findet zwischen den unmittelbar beieinander liegenden entgegengesetzten Elektrizitäten Anziehung, zwischen den gleichartigen Abstofsung statt. Die Anziehungen wirken longitudinal und sind bestrebt, die Kraftlinie zu verkürzen. Dieses Bestreben ruft eine gegenseitige Annäherung der beiden Leiter hervor, wenn diese beweglich sind. Wird diese Annäherung gehemmt, so erleidet die Kraftlinie eine longitudinale Zugspannung. Soll Gleichgewicht herrschen, so sind gleich grofse Gegenkräfte nötig. Diese Gegenkräfte kann man sich aus einem Bestreben des Dielektrikums erklären, die verschobenen Teilchen in die alte Lage zurückzuzwingen. Ist dies der Fall, so war bei der Verschiebung dieser Widerstand zu überwinden, d. h. eine Verschiebungsarbeit zu leisten. Diese Arbeit kann nur dadurch herbeigeführt sein, dafs man dem einen Leiter, z. B. AB durch die Ladung eine potentielle Energie verliehen hat, der Kugel z. B. die Energie $\frac{E^2}{2r}$, dem allgemein gestalteten Konduktor die Energie $\frac{V}{2}E$. (Ist nämlich V das Potential der Ladung am

Schlufs, so ist sein Mittelwert, da der Anfangswert o war, gleich $\frac{V}{2}$ zu setzen. Dies ist der mittlere Arbeitswert dafür, die Einheit aus unendlicher Entfernung auf den Konduktor zu schaffen. Für die Ladung E ist also die Arbeit $\frac{V}{2}E$ nötig. Sie ist gleich dem Selbstpotential der Belegung. Für die Kugelfläche erhält man $\frac{E}{2r}E = \frac{E^2}{2r}$.) Ist die Energie erschöpft, so hört das Verschieben auf. Von der Energie kommt die eine Hälfte auf die Verschiebung der positiven, die andere auf die der negativen Elektrizität. Die Angelegenheit der longitudinalen Spannungen wäre dadurch erledigt.

Was die seitlichen Abstofsungskräfte nach den benachbarten Kraftlinien hin anbetrifft, die sich z. B. cylindrisch um jede derselben angeordnet vorfinden, so müssen auch diese durch Gegenkräfte aufgehoben werden, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Es fragt sich, worin diese Gegenkräfte ihren Ursprung haben. In Fig. 102 seien die Leiter zwei Kugeln. Drei der Kraftlinien sind angedeutet. Angenommen, die äufseren würden verkürzt, so würden sie nach innen rücken, wie es die Pfeile andeuten. Aus dem der Polarisation entspringenden Verkürzungsbestreben folgt also ein Teil des Drucks der äufseren Kraftröhren gegen die inneren. Dazu kommt noch die abstofsende Wirkung der nach aufsen folgenden Kraftlinien. Da bald Gleichgewicht eintritt, müssen die so entstandenen äufseren Kräfte den inneren Abstofsungskräften das Gleichgewicht halten. Ist das Mittel ein isotropes, so werden die Abstände der + von den benachbarten + ebenso grofs sein, wie die der + von den benachbarten —, es steht also zu vermuten, dafs die abstofsenden seitlichen Kräfte ebenso grofs sind, wie die anziehenden longitudinalen. Ein strenger Elementarbeweis für diese Behauptung Faradays ist mir nicht bekannt. Hier kann er entbehrt werden.

Fig. 102.



Wird der Gleichgewichtszustand irgendwie, z. B. durch Annäherung eines geladenen Konduktors, gestört, so nehmen die Kraftlinien andere Gestalt an. Entfernt man die störende Ladung wieder, so stellen die besprochenen Anziehungs- und Abstofsungskräfte den ursprünglichen Zustand wieder her. Die Kraftlinien verhalten sich wie elastische Fäden, für die sich eine besondere Kinematik ausbauen läfst.

Faraday nannte den Zustand des polarisierten Dielektrikums einen Zwangszustand, weil dieser aufhört, sobald die Ladung des

Leiters AB entfernt oder durch eine gleich grofse entgegengesetzte Ladung neutralisiert wird. Die longitudinalen Gegenspannungen ziehen dann die Elektrizitäten in die alte Lage zurück. Die den Elektrizitäten durch die Verschiebung verliehene potentielle Energie wird jetzt frei und setzt sich z. B. in Wärme um.

Maxwell verglich die elektrische Verschiebung mit einer wirklichen elektrischen Strömung für eine geringe Strecke. Um in das Verständnis seiner Anschauungen einzudringen, verzichte man für den Augenblick auf die molekulare Einteilung der Kraftröhre und fasse das Dielektrikum als kontinuierlich auf. Ihm ist also das Dielektrikum eine Art von Leiter, in dem sich eine Strömung vollziehen kann, jedoch erreicht die Verschiebung bei dem wachsenden Widerstande bald ihre Grenze, dann nämlich, sobald die dem Leiter mit der Ladung gegebene potentielle Energie aufgezehrt ist. Da durch die longitudinalen Spannungen die anziehenden und abstofsenden Kräfte der Ladung genau ersetzt werden sollen, so ist die Gröfse der Spannung und damit die des Widerstandes und auch die der abstofsenden Kräfte bekannt, nämlich für die Einheit der Elektrizität gleich $\frac{V_1 - V_2}{w}$, wo w ein kleiner Verschiebungsweg, $V_1 - V_2$ die Potentialdifferenz an seinen Endpunkten ist. Dieser Ausdruck gilt aber nur für die Luft als Dielektrikum. Für jedes andere handelt es sich um

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{V_1 - V_2}{w}.$$

Die für die Einheit zu leistende Verschiebungsarbeit aber ist

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{V_1 - V_2}{w} \cdot w = \frac{V_1 - V_2}{D}.$$

Nach Analogie der elektrischen Strömung geht nun, wie Maxwell annimmt, durch jeden Querschnitt der Kraftröhre eine elektrische Einheit, sobald eine solche durch einen der Querschnitte geht. Die benachbarte Einheit erfordert z. B. die Arbeit $\frac{V_2 - V_3}{D}$. Beide Einheiten zusammen erfordern also die Arbeit

$$\frac{V_1 - V_2}{D} + \frac{V_2 - V_3}{D} = \frac{V_1 - V_3}{D},$$

d. h. soviel, als ob die eine Einheit um beide Wege verschoben wäre. Ist demnach das Potential des Leiters AB an der Berührungsstelle gleich V_A, das des Leiters CD an der Berührungsstelle gleich V_B, so ist die Arbeit für die Verschiebung je einer Einheit durch jede Niveaufläche im ganzen gleich $\frac{V_A - V_B}{D}$, d. h. ebenso grofs,

als ob die erste der betrachteten Einheiten den ganzen Weg passiert hätte.

Erstreckt sich aber das Dielektrikum bis ins Unendliche, so ist dort V_B gleich Null. Geht also jetzt ebenfalls bei der Verschiebung durch jeden Querschnitt die elektrische Menge 1, so ist die Verschiebungsarbeit gleich $\frac{V_A}{D}\cdot$ Die Verschiebungen sind dabei von verschiedener Gröfse. Sie sind umgekehrt proportional den Abständen von Niveaufläche zu Niveaufläche, gehorchen also dem Gesetze $pw = p_1 w_1$, oder $p : p_1 = w_1 : w$, ebenso dem Gesetze $pF = p_1 F_1$, denn durch jeden Querschnitt soll gleich viel fliefsen. Die Arbeit für die positive elektrische Einheit ist von der berechneten Gröfse, ebenso grofs ist sie für die negative, beide zusammen erfordern die Arbeit $2\frac{V_A}{D}\cdot$ Die hydrodynamischen Analogien bleiben erhalten.

Handelt es sich z. B. um eine geladene Kugel im unbegrenzten Dielektrum, so ist die Arbeit für beide Einheitsverschiebungen gleich $\frac{2}{D}\frac{E}{r}\cdot$ Fliefst aber in der Kraftröhre, die an der Kugel den Querschnitt 1 hat, nach jeder Richtung die Menge $\frac{\varepsilon_1}{2}$, so ist die Arbeit für beides gleich $\frac{2}{D}\frac{E}{r}\frac{\varepsilon_1}{2}\cdot$ Durch die ganze Kugelfläche fliefst dann das $4r^2\pi$fache von ε, die Arbeit ist also gleich

$$\frac{2}{D}\frac{E}{r}4r^2\pi\frac{\varepsilon}{2} = \frac{4r^2\pi E\varepsilon}{Dr}.$$

Diese mufs gleich der potentiellen Energie der Ladung sein, d. h. gleich $\frac{VE}{2D}$ oder $\frac{E^2}{2Dr}$ sein, d. h. es mufs sein $8r^2\pi\varepsilon = E$, d. h. die im Dielektrikum nach beiden Richtungen verschobene Elektrizitätsmenge ist ebenso grofs, wie die Ladung E.

Dasselbe gilt von der Ladung beliebig gestalteter Konduktoren.

So war Maxwell berechtigt, die Gröfse der elektrischen Verschiebung gleich der der Ladung E zu setzen. So lag es zugleich nahe, nur von einer elektrischen Verschiebung E durch jede Niveaufläche zu sprechen, statt von einer Ladung E des Leiters. Das Hervorbringen einer elektrischen Verschiebung E im Dielektrikum ersetzt den Begriff der Ladung, erst der neue Zustand des Dielektrikums influenziert beide Leiter bis zur Ladung $\pm E$. Dadurch kam vollständige Symmetrie der Auffassung bezüglich der beiden Leiter zustande, die Hauptaktion aber wurde ganz in das Dielektrikum verlegt.

Was Faraday in unbestimmter Weise als Kraftflufs bezeichnet hatte, wurde so durch Maxwell als elektrische Verschiebung

mit mathematischer Schärfe formuliert, die Theorie der Fernwirkung aber dabei ganz entbehrlich gemacht. An Stelle des früher behandelten Begriffs der Spannung innerhalb einer Zelle, deren Wände für jede Flächeneinheit mit der Masse 1 belegt waren, trat so die elektrische Verschiebung. War die Spannung nach Laplace gleich Null, so ist hier die Änderung des Zelleninhalts durch den Kraftzufluſs und -abfluſs Faradays, durch den Elektrizitätsaus- und -eintritt Maxwells, gleich Null. War die Spannung nach Poisson $4\pi E$, so ist hier die Vermehrung des elektrischen Inhalts der Zelle gleich $4\pi E$.

Die longitudinalen und lateralen Gegenspannungen im Dielektrikum sind, wie schon in Nr. 59 angedeutet wurde, ganz analog den elastischen Gegenspannungen innerhalb eines auf Zug beanspruchten Stabes. Dort nimmt an jeder Stelle die Gröſse der Gegenspannung zu mit der Verschiebung λ, die ihrerseits proportional der Beanspruchung S ist, d. h. man hat $\lambda : \lambda_1 = S : S_1$. Dem entspricht hier die Zunahme der elektrischen Verschiebung mit der Ladung E. Die Verschiebungsarbeit ist in beiden Fällen proportional dem Quadrate von S bezw. E. Ist die Stablänge gleich 1, so ergiebt sich der Elastizitätsmodul $\mathfrak{E}$ aus der Proportion $\lambda : 1 = S : \mathfrak{E}$, d. h. er ist

$$\mathfrak{E} = \frac{S}{\lambda} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Verlängerung}}.$$

Ebenso bezeichnet Maxwell den Ausdruck

$$\mathfrak{E} = \frac{V_1 - V_2}{E} = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{elektrische Verschiebung}}$$

als den elektrischen Elastizitätskoeffizienten des Dielektrikums. Die Proportionen der Elastizitätslehre gelten nur innerhalb der sogenannten Elastizitätsgrenze. Wird der sogenannte Tragmodul überschritten, so wird das innere Gefüge des Materials durch bleibende Deformationen verdorben, bei weiterer Beanspruchung erlahmt die Widerstandsfähigkeit und die Überlastung führt zum Bruch. Ähnliches geschieht hier beim Übertreiben der Ladung E des Leiters bezw. beim Übertreiben der elektrischen Verschiebung. Wird eine gewisse Grenze überschritten, so erlahmt der Widerstand des Dielektrikums und es erfolgt ein gewaltsames Überströmen der Elektrizitäten in Form eines elektrischen Funkens.

Mit jeder Verlängerung eines Stabes ist eine seitliche Kontraktion desselben verbunden, die der Verlängerung proportional ist. Der Elastizitätsmodul gegen Druck ist derselbe, wie gegen Zug. [Die Tragmoduln können, wie beim Schmiedeisen, für Druck und Zug dieselben, oder, wie beim Guſseisen, für Zug und Druck verschieden sein.] Die Vereinigung von lateraler Kontraktion und longitudinaler

Ausdehnung entspricht den beiden Arten von Gegenspannungen im Dielektrikum.

Ebenso wenig wie es unüberwindliche Festigkeit und vollkommene Elastizität giebt, ebenso wenig giebt es ein vollkommen isolierendes Dielektrikum. Im Laufe der Zeit tritt bei jeder Ladung eine allmähliche Entladung ein, bei jeder elektrischen Verschiebung also ein allmähliches Zurückziehen der Teilchen in die alte Lage, wobei sich die frei werdende potentielle Energie in Wärme umsetzen kann. Der Spannungszustand also erlahmt allmählich und die Gegenspannungen siegen über die Beanspruchung. Die ältere Auffassung erklärt dies durch ein allmähliches Eindringen der Influenz in das Dielektrikum, wodurch eine schrittweise Neutralisierung eingeleitet wird. Andere Analogien werden in den physikalischen Lehrbüchern besprochen.

Zur Würdigung der Maxwellschen Auffassung ist folgendes zu sagen. Zunächst handelt es sich nur um eine neue Ausdrucksweise, um eine andere Sprache für die Deutung der Erscheinungen. Maxwell selbst hat zugegeben, das eigentliche Wesen des Spannungszustandes habe er nicht ergründet, dieser zweite Schritt sei ihm nicht gelungen. Er hat aber im Anschlufs an Faraday den Vorgang in das Dielektrikum verlegt, während die ältere Theorie nur von Fernwirkungen sprach, die vom Leiter ausgingen und manches unerklärt liefsen. Insbesondere kannte die ältere Theorie nichts von einem Zwangszustande des im luftleeren Raume befindlichen Äthers, bei dem es sich ebenfalls um Energieaufspeicherung durch elektrische Verschiebung handelt. Maxwell hat gerade dem Zwangszustande des Äthers besondere Arbeiten gewidmet. Bedeutungsvoll konnte aber seine Auffassung erst in dem Augenblicke werden, der uns über die Frage der Geschwindigkeit aufklärte, mit der die elektrischen Wirkungen sich verbreiten, denn diese konnte bei den Fernwirkungen als unendlich grofs angesehen werden. Diese Frage ist erst durch die Hertzschen Versuche endgültig entschieden worden und zwar dahin, dafs die Geschwindigkeit, mit der die elektrischen Wellen im luftleeren Raume vorwärtsschreiten, etwa die des Lichtes ist, wie es Faraday geahnt und Maxwell mit Bestimmtheit vorausgesagt hatte. Diese Wellen sind häufig der Reflexion, der Brechung, der Interferenz und Polarisation unterworfen, und nach Helmholtz sind sie wahrscheinlich als Transversalwellen aufzufassen. Zwischen den Wellenlängen der strahlenden Wärme und des Schalles bestand bisher eine grofse Kluft. Diese ist durch das Einschalten der elektrischen Wellen überbrückt worden. Ein weiterer Erfolg lag in der jetzt beginnenden Anerkennung der von Maxwell aufgebauten elektromagnetischen Lichttheorie.

Nach alledem scheint es, als ob die Maxwellsche Auffassung vor der früheren den Vorzug verdiente. Sie erweckt

die Hoffnung, dafs wir einer einheitlichen Theorie der physikalischen Erscheinungen entgegengehen. Die Frage kann nur sein, ob man die Theorie der Fernwirkungen beibehalten und sie mit gewissen unentbehrlichen Maxwellschen Anschauungen verquicken will, oder ob man einheitlich nach Maxwell arbeiten soll. Zwar erheben sich noch Stimmen gegen das letztere, aber der Sieg Maxwells scheint bereits gesichert zu sein.

Da die Theorie der Schwingungen an dieser Stelle der elementaren Behandlung noch nicht zugänglich erscheint, soll hier mit den entsprechenden Betrachtungen abgebrochen werden. Für Kenner der höheren Analysis sei neben Maxwells Originalarbeiten und Maxwell-Weinstein folgende Litteratur angegeben:

Föppl: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, Leipzig bei B. G. Teubner.

Föppl: Die Geometrie der Wirbelfelder. Leipzig bei B. G. Teubner.

Maxwell-Boltzmann: Über Faradays Kraftlinien, Ostwaldsche Klassikerausgabe.

Helmholtz: Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes. Hamburg-Leipzig bei Voss.

Helmholtz: Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I. Leipzig bei Barth.

Dagegen hält an der Theorie der Fernwirkungen besonders fest und stellt sich den neueren Anschauungen kritisch gegenüber

Dr. C. Neumann: Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen Wirkungen. Leipzig bei Teubner. Auf seine Einleitung und die Einwände gegen Hertz auf S. 247 bis 251 sei besonders aufmerksam gemacht.

Die Hertzschen Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft sind im Jahre 1892 bei Ambr. Barth (Leipzig) erschienen. Nach Hertz ist das Wesen der Elektrizität weder durch Maxwell noch durch die Schwingungen ergründet. Hertz betrachtet seine Theorie lediglich als einen Weg, auf die Maxwellschen Gleichungen zu gelangen. Das Obige kann selbstverständlich nur als eine vorläufige Einführung in die neueren Anschauungen betrachtet werden.

Noch könnte die Frage aufgeworfen werden, ob sich zwei benachbarte Kraftlinien nicht auch gegenseitig anziehen können. Die Vorzeichenvertauschung in der einen der in Fig. 101 gezeichneten Kraftlinien reicht hin, die Frage zu beantworten. Da jetzt entgegengesetzte Elektrizitäten nebeneinander liegen, findet Anziehung statt. In einem späteren Kapitel wird sich zeigen, dafs die Kraftlinien

paralleler Magnetstäbe abstofsend aufeinander einwirken, wenn gleichnamige Pole nebeneinander liegen, dafs aber Anziehung der Linien stattfindet, wenn man die Pole des einen vertauscht. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

Benachbarte Kraftlinien stofsen einander ab, wenn sie gleich gerichtet sind. Diese Ausdrucksweise ist aber nur eine sinnbildliche, denn sie bezieht sich auf die polarisierten Moleküle.

Erinnert man sich ferner, dafs, je mehr sich die Kraftlinien und Niveauflächen aneinander drängen, um so gröfser die Stärke der elektrischen Kraftwirkungen ist, so erkennt man, dafs beide Sätze zusammen die bequemste Ausdrucksweise zum Beschreiben der Probleme geben, dafs man aus den Figuren ohne weiteres ablesen kann, was man wissen will. Es ist zu empfehlen, die schon besprochenen Systeme von Kraftlinien und Niveaulinien von diesem Gesichtspunkte aus noch einmal zu betrachten und mit jeder kommenden Figur ein gleiches zu thun. Man kann sich die Kraftlinien als vollkommen elastische Drahtfäden vorstellen, die bei jeder Störung des im Dielektrikum bestehenden Gleichgewichtes auf das empfindlichste den Zug- und Druckbeanspruchungen nachgeben, sich biegen oder strecken, sich drehen und sich dabei in charakteristischer Weise deformieren, so dafs sich eine förmliche Kinematik der Kraftlinien aufbauen liefse. Auch bei den Hertzschen Wellen, die auf Seite 156 und 157 seiner „Untersuchungen“ gezeichnet sind, handelt es sich um Kinematik der Kraftlinien, die sich so als wesentlicher Bestandteil der neueren Anschauungen herausstellt.

An einigen drei- und zweidimensionalen Problemen soll dies erläutert werden. Wirft man einen Stein ins Wasser, so quellen die bekannten Wellenkreise aus der Wurfstelle hervor. Dasselbe geschieht bei kontinuierlich zunehmender positiver Ladung eines allein im Raume befindlichen Konduktors mit den entsprechenden Niveauflächen. Neue und neue Niveauflächen quellen hervor und wandern, den Gesetzen des Zellennetzes folgend, koncentrisch anschwellend dem unendlichen Bereiche zu. Nur findet der Unterschied statt, dafs auch die Abstände zwischen den Niveaulinien anschwellen. Wird ein cylindrischer Draht geladen, so handelt es sich um cylindrische Flächen, die sich nach dem Gesetz der quadratischen Einteilung des Normalschnitts durch Polarkoordinaten anordnen.

Da eine geladene Kugel sich im Laufe der Zeit entladet, so findet auch die entgegengesetzte Erscheinung, das allmähliche Zusammenziehen der Niveaulinien statt. Bei dem Vertauschungsproblem des letzteren Falles finden Erscheinungen statt, die sich der Leser selbst zurechtlegen möge. Dabei ist jedoch einige Vorsicht nötig.

Werden zwei Kugeln in übereinstimmender Weise allmählich geladen, so quellen zunächst koncentrische Kugelflächen hervor, die sich an den einander zugekehrten Stellen zuspitzen, als ob sie einander anzögen, schliefslich berühren sich die Spitzen, die beiden Ovale vereinigen sich zu einer zunächst eingebuchteten Fläche, schwellen weiter an und werden zu Kugeln. Hat die Kugel die Ladung E, und bringt man eine zweite Ladung E heran, so krümmen sich die geraden Kraftlinien nach der in Fig. 66 angegebenen Form und schränken sich auf eine Halbebene ein. Im Momente des Zusammenfallens beider Ladungen erhält man ein Strahlenbüschel von doppelter Sektorenzahl. Nähert man eine dritte Ladung E, so wird Fig. 72 mafsgebend, und schliefslich hat man ein Strahlenbüschel von dreifacher Mächtigkeit. Der Vorgang der Ladung erhält so eine vollständig klare mathematische Deutung. Das Entgegengesetzte geschieht bei allmählicher Entladung. Das Hervorquellen oder Einschrumpfen im Falle der Ladung oder Entladung paralleler geradliniger Drähte führt auf lemniskatische Cylinder als Niveauflächen. Das Verhalten der Lemniskaten im Normalschnitt entspricht ganz dem der lemniskatischen Farbenringe, die bei der Drehung einer Platte aus doppeltbrechendem Material im Polarisationsapparate beobachtet werden. Man vergleiche dazu das Kapitel über „Lemniskatische Kinematik“ in des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“.

Handelt es sich um zwei parallele gleichgeladene Drähte, von denen der eine im Endlichen, der andere in sehr grofser Entfernung liegt, so zeigt der erstere im Normalschnitt zunächst koncentrische Kreise und Radien. Nähert man den zweiten, so spitzen sich die Kreise zu lemniskatischen Kurven zu, die Strahlen aber krümmen sich zu Hyperbeln um. Sie werden dabei auf die durch die Symmetrielinien des Problems begrenzte Halbebene eingeschränkt. Entfernt man den genäherten Draht wieder, so strecken sich die Hyperbeln wieder in die geradlinige Form, die lemniskatischen Ovale aber werden wieder zu Kreisen.

Sind die Drähte entgegengesetzt geladen, so findet ganz anderes statt. Bei Annäherung des zweiten werden die koncentrischen Kreise des Normalschnitts gewissermafsen abgestofsen und auf die besprochene Halbebene eingeschränkt. Sie bilden eine Steinersche Kreisschar. Die Strahlen aber krümmen sich einander entgegen, als ob sie sich anzögen, und je zwei bilden einen Kreisbogen, sämtliche ein Kreisbüschel.

Gerade an diesen zweidimensionalen Problemen mit ihren auch dem Anfänger geläufigeren Kurven läfst sich diese Art von Kinematik sehr einfach erläutern, besser als an den dreidimensionalen Problemen.

Sämtliche Kurvenscharen, die in der „Einführung“ gezeichnet sind, lassen sich in solcher Weise behandeln und bieten Beispiele

auch für die kompliziertesten Fälle der Punkt- und Linienprobleme. Dafs alles auch elektromagnetisch gedeutet werden kann, soll später gezeigt werden.

So giebt der Satz, dafs benachbarte und gleich gerichtete Kraftlinien einander abstofsen und entgegengesetzt gerichtete einander anziehen, nicht nur eine unbestimmte Vorstellung, sondern alles läfst eine streng mathematische Formulierung und bestimmte geometrische Darstellung zu. Die Kraftlinien und Niveauflächen sind nicht etwas Starres, wie die Gebilde der Euklidischen Geometrie, sondern etwas leicht Bewegliches, in unaufhörlicher Umgestaltung Begriffenes, wie die „lebendigen“ Gebilde der synthetischen Geometrie. Die unbestimmten Vorstellungen Faradays sind so in ein klares Licht gestellt, und man erkennt, dafs auch die Maxwellschen Vorstellungen und seine mathematischen Formulierungen einer elementaren Behandlung fähig sind. Dafs allerdings der Kenner der höheren Analysis, wie auch die „Einführung“ zeigt, noch weiter vordringen kann, ist selbstverständlich.

Kapitel VII.

Die Methode der elektrischen Bilder, der Symmetrie und der Inversion im Raume.*)

130) Vorbemerkungen. In diesem Kapitel kommen einige Theorien zur Anwendung, die in den neueren Lehrbüchern der Geometrie (vergl. z. B. Methodisches Lehrbuch, II) behandelt werden, die harmonischen Punkte, Pol und Polare, Inversion oder Abbildung durch reciproke Radiivectores, die Lehre von den Steinerschen Kreisscharen (elliptische und hyperbolische), die Kreisverwandtschaft von Möbius und dessen Kugelverwandtschaft.

Der Gedanke der Inversion geht bis auf Apollonius von Perga zurück, dessen Kreisberührungen (Taktionsprobleme) später von Vieta, Newton, Euler und Fuſs behandelt und von Fermat auf Kugeln ausgedehnt wurden. Nachdem sich auch Gaultier, Poncelet, Monge und Steiner damit beschäftigt hatten, stellte Plücker im Jahre 1834 die Inversion als ein neues Übertragungsprinzip auf, mit dem sich dann auch Magnus befaſste. Plücker gebührt die Priorität vor W. Thomson, der in England als Schöpfer dieses Gebietes betrachtet wird, obwohl sein „Prinzip der elektrischen Bilder“ erst 1845 veröffentlicht und im Cambridge and Dublin Mathematical Journal von 1848 ausführlicher dargestellt wurde. Dies geschah im Anschluſs an Poisson, der mit Hilfe der Kugelfunktionen, d. h mit Hilfe höherer Rechnungen, die Resultate bereits gefunden hatte, zu denen Thomson den elementaren Weg fand. Liouville setzte 1847 die Thomsonschen Forschungen fort, Lamé drang weiter vor in den Leçons sur les coordonnées curvilignes, Kirchhoff benutzte die Bicircularkoordinaten zur Anbahnung der Lehre von den stationären Strömungen in ebenen Platten. Reye stellte die Kugelverwandtschaft

*) Dieses Kapitel kann überschlagen werden, wenn dem Leser die Gesetze der Inversion nicht bekannt sind. Das zur Erläuterung nötigste ist jedoch in den Text aufgenommen.

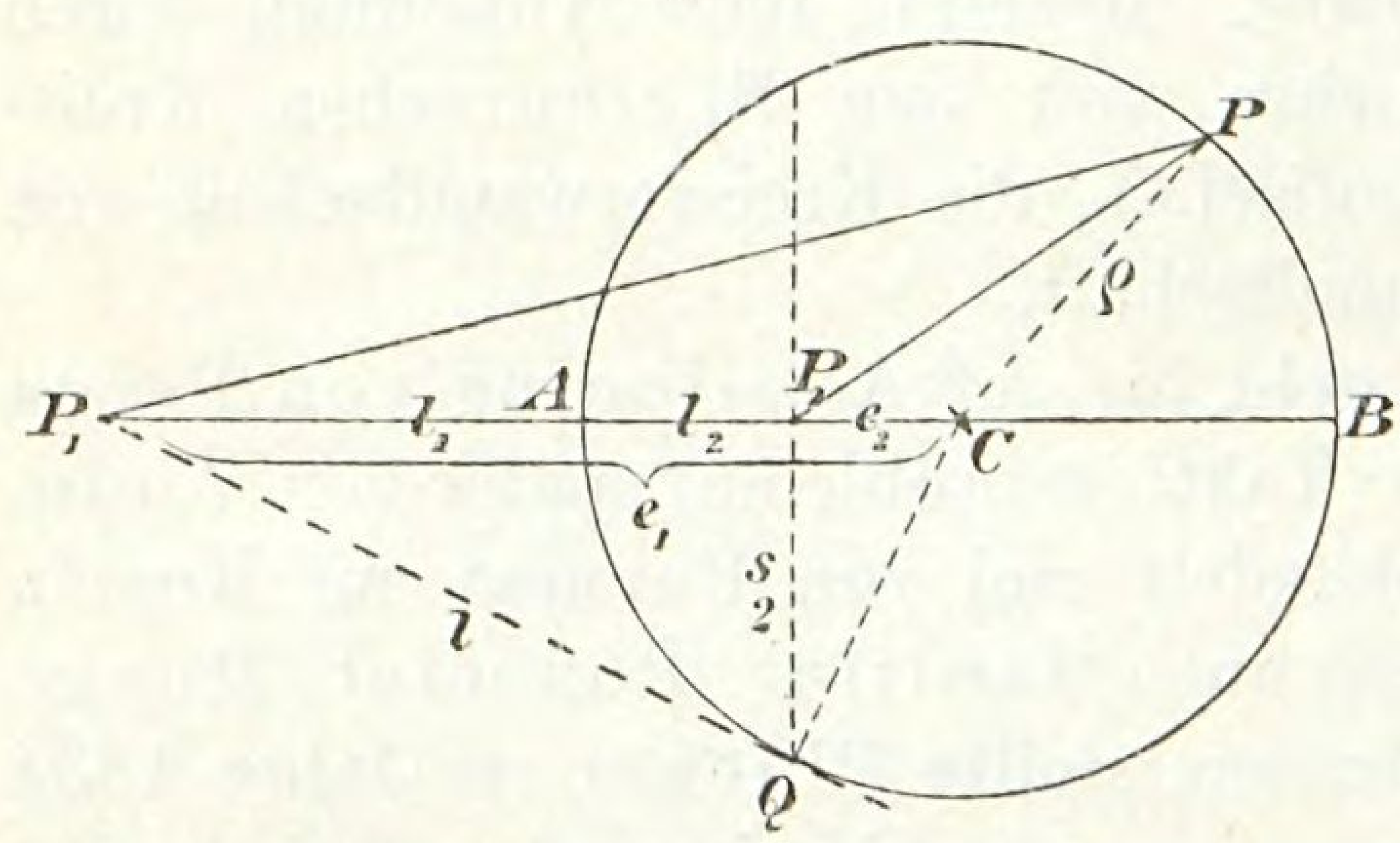
in einer Monographie dar. Auch Townsend, Hart, Casey haben sich mit diesen Lehren beschäftigt.

Es handelt sich, kurz gesagt, darum, mit Hilfe einer Transformation aus bereits gelösten Beispielen zur Geometrie und mathematischen Physik neue abzuleiten, also einen einfachen Übertragungsmechanismus an Stelle der umfangreichen Rechnungen zu setzen, über deren Schwierigkeiten man sich nach Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, unterrichten möge.

Um den Gang der Untersuchungen nicht durch mathematische Darlegungen unterbrechen zu müssen, geben wir für diejenigen Leser, denen die neueren Theorien nicht bekannt sind, einige geometrische Vorbemerkungen, verweisen aber im übrigen auf die neueren Lehrbücher (z. B. Method. Lehrbuch II).

131) Inversionsbeziehungen am Kreise und an der Kugel. Zu jedem Punkte P_1 außerhalb eines Kreises giebt es auf dem zugehörigen Durchmesser einen zweiten Punkt P_2, der so liegt, daß P_1, P_2 und die Endpunkte A und B des Durchmessers harmonische Punkte sind. Für diese gilt also, von den Vorzeichen abgesehen, die Proportion

Fig. 103.



$$P_1A : P_2A = P_1B : P_2B,$$

oder, wenn ϱ der Radius des Kreises ist und $l_1 = P_1A$, $l_2 = P_2A$, $e_1 = P_1C$, $e_2 = P_2C$ gesetzt wird

$$1) \qquad l_1 : l_2 = (e_1 + \varrho) : (e_2 + \varrho).$$

Nach Pythagoras ist ferner $CQ^2 = CP_2 \cdot CP$ (Kathetenquadrat gleich dem Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Stück derselben), also

$$2) \qquad e_1 \cdot e_2 = \varrho^2,$$

was die Inversionsbeziehungen

$$e_1 = \frac{\varrho^2}{e_2} \quad \text{und} \quad e_1 = \frac{\varrho^2}{e_1}$$

giebt, die für $\varrho = 1$ in

$$e_1 = \frac{1}{e_2} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{1}{e_1}$$

übergehen, wobei die Reciprozität am reinsten hervortritt.

Durch die Beziehung 2) geht die Proportion 1) über in

$$l_1 : l_2 = (e_1 + \varrho) : \left(\frac{\varrho^2}{e_1} + \varrho\right) = (e_1 + \varrho) : \frac{\varrho}{e_1}(\varrho + e_1) = 1 : \frac{\varrho}{e_1} = e_1 : \varrho = \varrho : e_2,$$

also

$$3)\qquad \frac{l_1}{l_2} = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{\varrho}{e_2}.$$

Verbindet man ferner einen Punkt P des Kreisumfangs mit P_1 und P_2, so ist das Verhältnis der Radiivectores p_1 und p_2 eine konstante Gröfse $\varkappa$, denn PA halbiert den Dreieckswinkel P_1PP_2. Es ist also

$$4)\qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{e_1}{\varrho} = \frac{\varrho}{e_2} = \varkappa.$$

Aus $e_1 = \varkappa\varrho$ und $e_2 = \frac{\varrho}{\varkappa}$ folgt noch durch Division $\frac{e_1}{e_2} = \varkappa^2$, so dafs man hat

$$5)\qquad \frac{e_1}{e_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{e_1^2}{\varrho^2} = \frac{\varrho^2}{e_2^2} = \varkappa^2.$$

P_2 wird gefunden mit Hilfe der von P_1 aus gezogenen Tangente $P_1Q = t$ und des Lotes QP_2. Umgekehrt ergiebt sich aus P_2 mit Hilfe des Lotes P_2Q und der Tangente in Q der Punkt P_1. Dabei ist nach dem bekannten Sekantensatze

$$t^2 = P_1A \cdot P_1B = PC^2 - CQ^2 = e_1^2 - \varrho^2.$$

Setzt man das Lot $P_2Q = \frac{s}{2}$ (halbe kürzeste Sehne durch P_2), so ist nach dem Satze über die Abschnitte der Sehnen unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Richtungen

$$-\left(\frac{s}{2}\right)^2 = P_2A \cdot P_2B = \overline{P_2C}^2 - \overline{CQ}^2 = e_2^2 - \varrho^2.$$

Bezeichnet man den Ausdruck $(e^2 - \varrho^2)$ für Punkte innerhalb und aufserhalb des Kreises (also für den negativen und positiven Fall gemeinsam) als Potenz Π eines Punktes in Bezug auf den Kreis, so braucht man für den Ausdruck

$$\Pi = P_1A \cdot P_1B = t^2 \quad\text{bezw.}\quad \Pi = P_2A \cdot P_2B = -\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

in der Schreibweise keinen Unterschied mehr zu machen.

132) Anwendung auf das Zweipunktproblem. Man denke sich jetzt im Punkte P des Kreisumfangs eine dem Newtonschen Gesetze entsprechende Kraft $\frac{1}{p_1^2}$ in der Richtung nach P_1 hin wirkend.

Zerlegt man sie in einen horizontalen Teil h_1 und einen nach C hin gerichteten Teil q_1, so ergiebt sich mit Hilfe ähnlicher Dreiecke

$$h_1 = \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{e_1}{p_1} = \frac{e_1}{p_1^3}, \qquad q_1 = \frac{1}{p_1^2} \cdot \frac{\varrho}{p_1} = \frac{\varrho}{p_1^3}.$$

Macht man dasselbe mit einer in P wirkenden Kraft $\frac{1}{p_2^2}$, die aber in der Richtung P_2P, also abstofsend im Sinne des Newton-Coulombschen Gesetzes wirkt, so wird, abgesehen vom Vorzeichen,

$$h_2 = \frac{1}{p_2^2} \cdot \frac{e_2}{p_2} = \frac{e_2}{p_2^3} = \frac{\varrho^2}{e_1 p_2^3} = \frac{\varrho^2}{e_1} \frac{e_1^3}{p_1^3 \varrho^3} = \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3}; \; q_2 = \frac{1}{p_2^2} \cdot \frac{\varrho}{p_2} = \frac{\varrho}{p_2^3} = \varrho \frac{e_1^3}{p_1^3 \varrho^3} = \frac{e_1^3}{\varrho^2 p_1^3}.$$

Sollen, damit die Resultante durch C gehe und der Kreis Niveaulinie werde, die Horizontalteile einander aufheben, so müssen die Kräfte $\frac{1}{p_1^2}$ und $\frac{1}{p_2^2}$ in bestimmtem Verhältnisse stehen. Setzt man z. B. die eine wieder gleich $\frac{1}{p_1^2}$, die andere aber gleich $\frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{1}{p_2^2}$, dann wird der eine Horizontalteil

$$h_2 = \frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3} = \frac{e_1}{p_1^3},$$

also, da die Richtung entgegengesetzt ist, gleich $-h_1$. Dabei wird

$$q_1 = \frac{\varrho}{p_1^3} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\varrho}{e_1} \cdot \frac{e_1^3}{\varrho^2 p_1^3} = \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3},$$

also unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Richtungen

$$q_1 + q_2 = \frac{\varrho}{p_1^3} - \frac{e_1^2}{\varrho p_1^3} = \frac{\varrho^2 - e_1^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{e_1^2 - \varrho^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{\Pi_1}{\varrho p_1^3}.$$

Nun ist aber

$$-\frac{e_1^2 - \varrho^2}{\varrho p_1^3} = -\frac{\frac{\varrho^4}{e_2^2} - \varrho^2}{\varrho \cdot \frac{p_2^3 \varrho^3}{e_2^3}} = -\frac{\varrho^2}{e_2^2}\left(\varrho^2 - e_2^2\right) \cdot \frac{e_2^3}{p_2^3 \varrho^4} = -\frac{\varrho^2 - e_2^2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2} = \frac{\Pi_2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2}.$$

Also auch

$$q_1 + q_2 = \frac{\Pi_2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2}.$$

Sind P_1 und P_2, also auch Π_1 und Π_2 und aufserdem ϱ fest gegeben, so ist p_1 bezw. p_2 die einzige veränderliche Gröfse, die der Lage von P auf dem Kreise entspricht. Die Resultante $q_1 + q_2$

ist also unter den gegebenen Voraussetzungen umgekehrt proportional der dritten Potenz von p_1 bezw. p_2.

In elektrostatischer Hinsicht hat man also folgendes:

Läſst man in einem Punkte P_1 auſserhalb des gegebenen Kreises die elektrische Ladung $+1$, in dem zugeordneten harmonischen Punkte P_2 die Ladung $-\frac{\varrho}{e_1}$ wirken, so geht die Resultante für jeden Kreispunkt durch den Punkt C, d. h. der Kreis ist eine Niveaulinie des Potentials. Ladet man den auf dem Kreisumfange beliebig liegenden und dort beweglichen Punkt P mit der Elektrizität $+1$ oder -1, so wird für jede Lage die Resultante gleich

$$\mp \frac{e_1^2 - \varrho^2}{\varrho p_1^3} = \mp \frac{\Pi_1}{\varrho p_1^3}$$

oder, was dasselbe ist, gleich

$$\pm \frac{e_2 - \varrho^2}{p_2^3} \cdot \frac{e_2}{\varrho^2} = \pm \frac{e_2 \Pi_2}{\varrho^2 p_2^3},$$

d. h. umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung p_1 bezw. p_2. Bei Ladung E bezw. $-E\frac{\varrho}{e_1}$ ist die Resultante das E-fache.

Dadurch bestätigen sich die Resultate des Abschnitts 97, von denen man ohne weiteres hätte ausgehen können, zugleich aber ist die dritte Potenz der Entfernungen als maſsgebend nachgewiesen, die schon bei dem Störungsproblem unter Nr. 35 als wichtig hingestellt worden war.

Man denke sich nun den Kreis um AB rotierend, ebenso die in Nr. 97 behandelten Kraft- und Niveaulinien des Zweipunktproblems für ungleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten, die sich wie $e_1 : \varrho$ verhalten. Die Niveauflächen des Problems haben dann die Gleichung

$$\frac{e_1}{r_1} - \frac{\varrho}{r_2} = c,$$

eine davon hat die Gleichung

$$\frac{e_1}{r_1} - \frac{\varrho}{r_2} = 0,$$

woraus $\frac{r_1}{r_2} = \frac{e_1}{\varrho}$ folgt, so daſs es sich um die soeben besprochene Kugel handelt. Denkt man sich die gleichwertigen Kraftröhren konstruiert, die nach Nr. 97 von P_1 aus zum Teil nach P_2, zum Teil

nach dem unendlichen Bereiche gehen, so wird die Kugelfläche in gleichwertige Felder eingeteilt, so dafs für sämtliche $p \cdot F$ konstant ist, wenn p die Resultante der beiden Kräfte, F die Fläche eines kleinen Feldes bedeutet. Die Kraftresultanten also verhalten sich umgekehrt, wie die Felderflächen, sie verhalten sich aber nach obigem auch umgekehrt, wie die dritten Potenzen der Entfernungen von P_1 und P_2, folglich hat man den Satz:

Die gleichnamigen Kraftröhren des Zweipunktproblems teilen die dabei vorkommende Kugelfläche in Felder ein, deren Flächen sich verhalten, wie die dritten Potenzen der Entfernungen von P_1 oder P_2.

Angenommen nun, auf der Kugelfläche ordnete sich aus irgend welchen Gründen Influenzelektrizität denselben Resultanten entsprechend an, so würde dies nach Poisson mit der Dichtigkeit $\delta = \frac{p}{4\pi}$ geschehen, d. h. proportional den Kraftresultanten, und daher umgekehrt proportional den dritten Potenzen der Fntfernungen von P_1 und P_2 und umgekehrt proportional diesen Felderflächen.

Diese Voraussetzung trifft nun ein bei folgenden Influenzproblemen:

133) **Aufgabe.** Eine leitende Kugel stehe durch einen Draht mit der Erde in Verbindung, in der Entfernung e vom Mittelpunkte befinde sich im Aufsenraume ein Punkt mit der elektrischen Ladung $+E$. Wie grofs ist die Menge der Influenzelektrizität erster Art, und wie ordnet sie sich an?

Auflösung. Durch die Verbindung mit der Erde wird erreicht, dafs nach vollendeter Scheidung im ganzen Leiter ebenso, wie in der Erde, das Potential Null herrscht. Die gesamte Influenzelektrizität $-E_1$ erster Art hat sich infolge der gegenseitigen Abstofsungen ihrer Teilchen auf der Kugeloberfläche angeordnet, aber infolge der Anziehung durch die Ladung E unregelmäfsig, d. h. dichter auf der dem Punkte E zugekehrten, weniger dicht auf der ihm abgewendeten Seite. Die Sätze über die homogene Kugelschale finden also hier keine Anwendung, das Potential der Belegung allein ist also für den Innenraum nicht konstant. Es wird sich aber ein einfaches Gesetz ergeben.

Jedes elektrische Teilchen $-\varepsilon$ der Influenzelektrizität hat für den Mittelpunkt C der Kugel das Potential $\frac{-\varepsilon}{\varrho}$, die gesamte Influenzelektrizität hat also dort den Potentialwert

$$\sum \frac{-\varepsilon}{\varrho} = \frac{-E_1}{\varrho}.$$

Der Potentialwert der Ladung E des influenzierenden Punktes ist dort gleich $\frac{+E}{e}$, die Summe beider Potentiale ist nach obigem gleich Null, also mufs sein

$$\frac{E}{e_1} - \frac{E_1}{\varrho} = 0,$$

woraus folgt

$$E_1 = E \frac{\varrho}{e_1}.$$

Folglich:

Die Menge der Influenzelektrizität erster Art verhält sich zur Ladung des influenzierenden Punktes wie der Kugelradius zur Entfernung des Punktes vom Kugelmittelpunkte; der konstante Potentialwert im ganzen Innern der Kugel ist dabei gleich Null. Die Menge der Influenzelektrizität entspricht genau der des Punktes P_2 im vorigen Problem.

[Es könnte eingewandt werden, dafs auch noch auf dem Draht Influenzelektrizität erster Art vorhanden sein könnte. Denkt man sich aber den Draht unendlich dünn im Verhältnis zu den Dimensionen der Schale, so würde die Menge dieser mit wachsender Entfernung schnell abnehmenden Elektrizität verschwindend klein sein gegen die der auf der Kugelfläche angeordneten, ihre Wirkung auf die elektrische Verteilung kann also vernachlässigt werden. Es ändert sich daher auch nichts, wenn man den Draht abschneidet und die Verbindung mit der Erde aufhebt.]

134) Identität dieses Influenzproblems mit dem Zweipunktproblem. Nach Aufhebung der Verbindung denke man sich jetzt das Innere der Kugel entfernt, so dafs nur eine dünne Schale bleibt, deren Potential gleich Null ist.

Nur im Aufsenraume befinden sich die Kraftlinien des Problems, denn im Innern ist das Potential konstant. Sie gehen von P_1 aus teils nach der Kugel, teils nach dem unendlichen Bereiche. Die Kugel aber ist eine Potentialfläche mit dem Potentialwerte Null, sie mufs also von den Kraftlinien senkrecht getroffen werden. Ganz dasselbe findet bei dem entsprechenden Zweipunktprobleme statt. In der That handelt es sich um dieses Problem, nur ist die Kugelfläche mit ihrer Belegung als Ersatz für den Punkt P_2 eingetreten und so der Innenteil der Kugel aus dem Problem ausgeschieden worden (vgl. Nr. 97). Die Kraftlinien und die Niveauflächen des Aufsenteils sind ungeändert geblieben. Die Belegung wirkt nach aufsen genau so, wie eine gleichstarke Ladung des Punktes P_2.

Folglich mufs die Anordnung der Influenzelektrizität dem oben besprochenen Dichtigkeitsgesetz entsprechen. Die Dichtigkeit ist

in jedem Punkte umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von P_1 bezw. P_2; sie ist umgekehrt proportional den Felderflächen, so dafs auf jedes Feld derselbe Betrag kommt; sie ist direkt proportional den an der Oberfläche wirkenden Einheitsresultanten

$$-E\frac{e_1^2-\varrho^2}{\varrho p_1^3}=E_1\frac{\varrho^2-e_2^2}{\varrho p_2^3}.$$

Die Dichte ist an jeder Stelle

$$\sigma=-E\frac{e_1^2-\varrho^2}{4\pi\varrho p_1^3}$$

bezw.

$$\sigma=E_1\frac{\varrho^2-e_2^2}{4\pi\varrho p_2^3}.$$

135) Folgerungen für die Gravitation. Daraus folgt für die Lehre vom Potential der Schwere folgendes:

Denkt man sich auf einer Kugelfläche ponderable Masse m so verteilt, dafs ihre Dichtigkeit umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von einem äufseren Punkte P_1 und seinem zugeordneten Punkte P_2 (oder von einem inneren Punkte P_2 und seinem zugeordneten Punkte P_1) ist, so wirkt sie nach aufsen genau so, wie dieselbe Masse im inneren Punkte P_2, nach innen ebenso, wie die gröfsere Masse $m\frac{e_1}{\varrho}$ im äufseren Punkte P_1.

Das erstere ist bereits nachgewiesen, das letztere folgt daraus, dafs im ganzen Innern das Potential der Belegung und das der Ladung des Punktes P_1 sich gegenseitig aufheben (Potentialwert gleich Null). Folglich:

Die so auf der Kugelfläche verteilte Masse giebt nach aufsen hin geradlinige Kraftlinien, die von P_2 ausgehen, und sie giebt Niveauflächen, die Kugeln mit P_2 als Centrum sind. Nach innen sind die Kraftlinien Strahlen, die von P_1 ausgehen, und die Niveauflächen sind Kugeln mit P_1 als Centrum. Für die Zelleneinteilung sind die Massen m bezw. $m\frac{e_1}{\varrho}$ zu Grunde zu legen.

Dasselbe Resultat findet man, wenn man P_2 mit der Elektrizität

$$-E_1=-E\frac{\varrho}{e_1}$$

ladet und die Kugelschale mit der Erde in Berührung setzt, nur sammelt sich dann die Influenzelektrizität nicht auf der Aufsenseite der Schale, sondern auf der Innenseite an. Der Gang der Betrachtung ist derselbe. Das Potential nach aufsen wird gleich Null, so dafs die Wirkungen von E_2 und der Belegung einander aufheben. Für gröfsere Entfernungen ist die Anordnung gleichgültig (Schwerpunkt), da aber die Wirkung gleich Null ist, mufs es sich um gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten handeln. Dies stimmt mit der vorigen Betrachtung überein. Es handelt sich also gewissermafsen um den Innenteil des Zweipunktproblems.

136) Centrobarischer Charakter der Belegung. Haben nun die Kraftlinien irgend einer Masse Asymptoten, so gehen diese nach Nr. 95 durch den Schwerpunkt der Masse. Hier sind die geraden Linien ihre eigenen Asymptoten, folglich ist P_2 der Schwerpunkt der so verteilten Masse (vgl. Nr. 131). Daraus ergiebt sich für die Mechanik folgendes bemerkenswerte Resultat:

Ordnet man auf einer Kugelfläche Masse so an, dafs ihre Dichtigkeit umgekehrt proportional zur Entfernung von einem inneren Punkte P_2 (oder seinem zugeordneten äufseren Punkte P_1) wird, so ist P_2 der Schwerpunkt der Masse. Attraktionscentrum und Schwerpunkt fallen also zusammen. Die Belegung ist centrobarisch.

Ein äufserer Punkt wird also so angezogen, dafs er frei fallend sich geradlinig nach P_2 hinbewegt. Wie in Nr. 11 bezw. 18 wird das Arbeitsdiagramm durch die Gravitationskurve, das Potentialdiagramm durch die gleichseitige Hyperbel dargestellt. Wird der Punkt nach irgend welcher Richtung hin geworfen, so tritt dieselbe Erscheinung ein, wie bei den Planetenbewegungen um die Sonne P_2, d. h. er bewegt sich auf einem Kegelschnitte, dessen einer Brennpunkt nach P_2 fällt.

Ein innerer Punkt verhält sich ebenso, nur ist für ihn P_1 der mafsgebende Anziehungspunkt.

Man kann sich nun unendlich viele Kugeln denken, die in Bezug auf P_1 und P_2 das Gesetz $\frac{p_1}{p_2} = c$ befolgen, so dafs man den ganzen Innenraum der ersten Kugel ausfüllt. Ist auf jeder Fläche die Massenbelegung proportional dem Werte $\frac{1}{p_2^3}$, so ist die Sache dieselbe. Nur mufs man jetzt, da die excentrischen Kugeln auf der P_1 zugewandten Seite dichter aneinander liegen, als auf der andern, den Fehler vermeiden, von der Dichte der Flächenbelegung auf die der räumlichen

Ausfüllung zu schliefsen. Unten wird sich zeigen, dafs die räumliche Dichtigkeit proportional der Gröfse $\frac{1}{p_2^5}$ wird.

137) Sonderfall der Ebene. Nähert man den influenzierenden Punkt P_1 einer unendlich grofsen leitenden (und abgeleiten) Kugelschale, d. h. einer unbegrenzten Ebene, so wird P_2 das wirkliche Spiegelbild von P_1, und die Menge der Influenzelektrizität wird gleich $E_1 = E\frac{\varrho}{e_1}$. Hier ist $\varrho = e_1 - l_1$, also

$$E_1 = E\frac{\varrho}{\varrho + l_1} = E\frac{1}{1 + \frac{l_1}{\varrho}},$$

also für

$$\varrho = \infty, \quad E_1 = E,$$

d. h. die beiden Mengen sind einander gleich. Dies war selbstverständlich, denn P_1 durfte auch als innerer Punkt der unendlich grofsen Kugel angesehen werden. Diese elektrische Menge ist so auf der Kugel zu verteilen, dafs die Dichtigkeit an jeder Stelle umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von P_1 bezw. P_2 wird. Diese Entfernung ist jetzt

$$p_1 = \sqrt{l_1^2 + z^2},$$

wo z die Entfernung von der Geraden $P_1 P_2$ ist.

Um die Dichte zu berechnen, kann man den Normalteil der Kraft $\frac{E}{p_1^2}$ bilden, d. h.

$$\frac{E}{p_1^2} \cdot \cos\alpha = \frac{E}{p_1^2}\frac{l_1}{p_1} = \frac{E l_1}{p_1^3}.$$

Dazu kommt die abstofsende Einwirkung der Influenzelektrizität auf ihre eigenen Teilchen, die so ist, als ob dieselbe elektrische Masse in P_2 angebracht wäre. Dies giebt einen gleichgerichteten Normalteil von derselben Gröfse, so dafs die Normalkraft gleich $\frac{2 E l_1}{p_1^3}$ ist, während die andern Teile einander aufheben, so dafs Gleichgewicht stattfindet. Die Dichtigkeit wird also jetzt

$$\delta = \frac{2 E l_1}{4\pi p_1^3} = \frac{E l_1}{2\pi p_1^3} = \frac{E l_1}{2\pi\left(l_1^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dies hätte sich auch aus dem früheren Resultate

$$\delta = E \cdot \frac{e_1^2 - \varrho^2}{4\pi\varrho p_1^3} = E\frac{(\varrho + l_1)^2 - \varrho^2}{4\pi\varrho p_1^3} = E\frac{2\varrho l^1 + l_1^2}{4\pi\varrho p_1^3}$$

ableiten lassen, was für $\varrho = \infty$ sich auf dasselbe reduziert. Dadurch ist eine wesentliche Ergänzung zur Theorie des symmetrischen Zweipunktproblems für gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten gegeben, dessen einer Punkt sich durch die so belegte Ebene ersetzen läfst. Die Felder der Ebene sind dabei proportional den dritten Potenzen der Entfernung von P_1.

[Die Bestätigung der Richtigkeit des Resultates läfst sich auf folgendem Wege elementar erreichen. Man errichte auf der Ebene in jeder Entfernung $r = z$ von der Linie $P_1 P_2$ Lote von der Höhe

$$y = \frac{E l_1}{2\pi [l_1^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}},$$

so dafs der Mantel des zugehörigen Cylinders mit $P_1 P_2$ als Achse das $2 r\pi$fache wird, nämlich $E l_1 \frac{r}{[l_1^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}}$. Um den Inhalt des so entstehenden Diagrammkörpers ohne höhere Rechnung zu finden, entwickelt man in

$$\left[l_1^2 + r^2\right]^{-\frac{3}{2}} = l_1^3 \left[1 + \left(\frac{r}{l_1}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

die Klammer mit Hilfe des binomischen Satzes in einer Reihe. Die Glieder derselben sind mit r zu multiplizieren und dann der Schichtenformel zu unterwerfen (Summenformel). Fügt man in der entsprechenden Klammer $+ 1$ und $- 1$ hinzu, und multipliziert man mit l_1^2, so ergiebt sich im wesentlichen $1 - \left[l_1^2 + r^2\right]^{-\frac{1}{2}}$. Das Endresultat giebt als Elektrizitätsmenge E, wie oben verlangt war.]

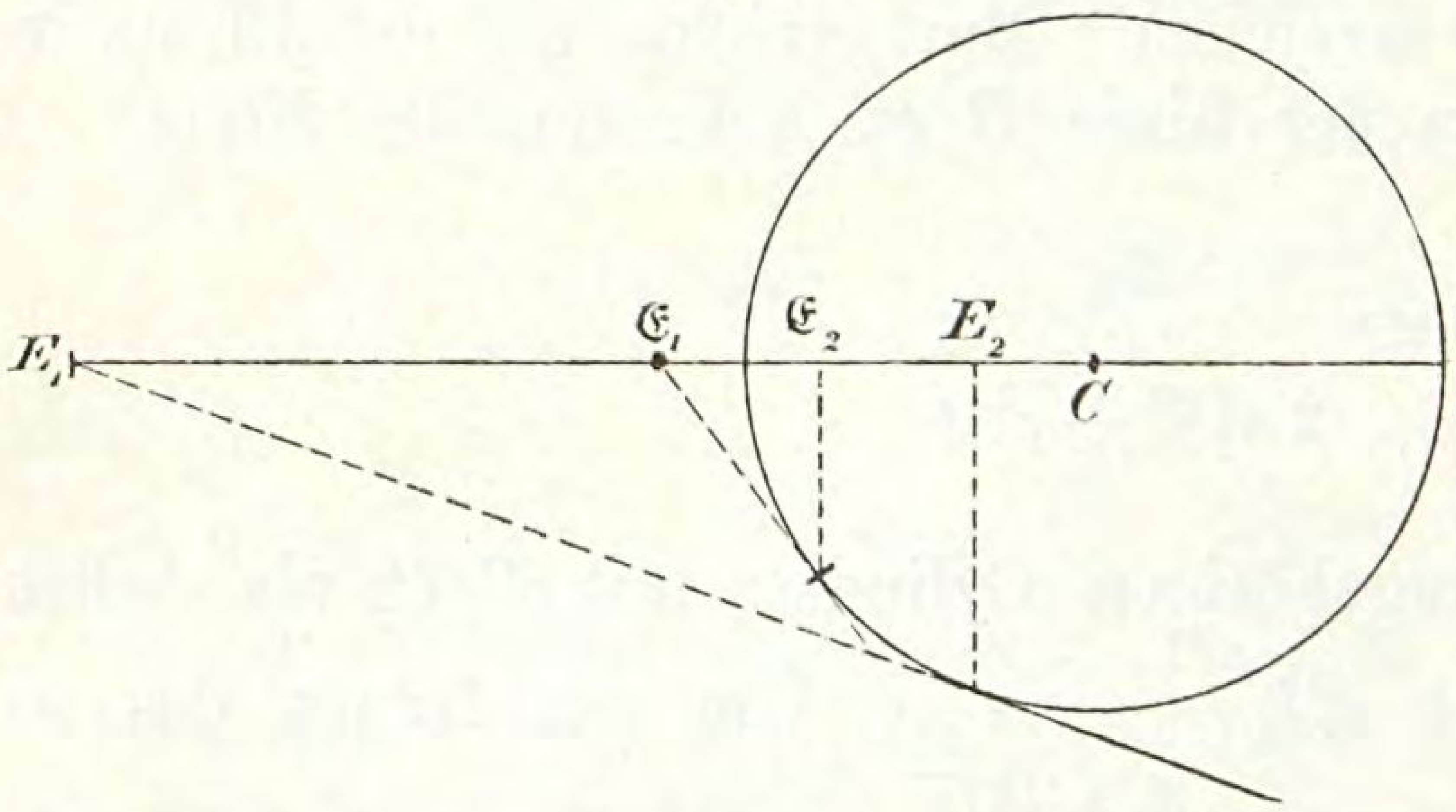
Bemerkenswert ist, dafs eine mit ponderabler Masse nach diesem Gesetz belegte Ebene auf beiden Seiten ebenso anziehend wirkt, wie der gleich stark geladene Punkt auf der entgegengesetzten Seite der Ebene. Die Kraftlinien sind also Strahlen durch diesen Punkt, die Niveauflächen koncentrische Kreise. Von der Freifallbewegung gilt das oben Gesagte, ebenso von den in Kegelschnittbahnen erfolgenden Wurfbewegungen.

Symmetrie und Reciprozität werden so zu einem Hebel der mathematischen Physik. Zugleich erkennt man wiederum, dafs ein Anziehungsproblem vollständig bestimmt ist, sobald man zwei seiner Niveauflächen kennt, dafs z. B. bei Punktproblemen die Punkte durch Niveauflächen von bestimmter Belegung ersetzt werden können. (Vgl. Nr. 128.)

Zur Übung kann man Probleme mit mehreren influenzierenden Punkten, die sich elementar angreifen lassen, behandeln; z. B. das folgende:

138) **Aufgabe.** Zwei gleichartig geladene Punkte aufserhalb einer leitenden Kugel, die auf der Verlängerung eines Durchmessers liegen, wirken unter Ableitung der letzteren nach der Erde influenzierend. Menge und Anordnung der Elektrizität sind zu untersuchen.

Fig. 104.



E_1 und $\mathfrak{E}_1$ seien die geladenen Punkte und zugleich die Elektrizitätsmengen der Ladung, E_2 und $\mathfrak{E}_2$ seien die Inversionsbilder mit den Ladungen

$$E_2 = -E_1 \frac{\varrho}{e_1}, \quad \mathfrak{E}_2 = -\mathfrak{E}_1 \frac{\varrho}{\mathfrak{e}_1}.$$

Das Problem dieser 4 Punkte ist nach Nr. 100 zu behandeln und giebt unter den Niveauflächen

$$1) \qquad \frac{E_1}{r_1} + \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{r}_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{r}_2} = c$$

die gegebene Kugel, die dem Potentialwerte Null entspricht. Die Kraftlinien des Problems sind von der Gleichung

$$2) \qquad E_1 \cos \vartheta_1 + \mathfrak{E}_1 \cos \delta_1 + E_2 \cos \vartheta_2 + \mathfrak{E}_2 \cos \delta_2 = c.$$

Beide Scharen sind zugleich die des Hauptproblems.

Ist für irgend einen Punkt der Kugel p die durch C gehende Resultante, also

$$p = E_1 \frac{\Pi_1}{\varrho r_1^3} + \mathfrak{E}_1 \frac{\mathfrak{P}}{\varrho \mathfrak{r}_1^3},$$

so ist $\frac{p}{4\pi}$ die Dichte der Influenzelektrizität in jedem Punkte, ihre Menge ist $E_2 + \mathfrak{E}_2$. Die Flächen $p = c$ geben mit der Kugel Schnittlinien, auf denen die Dichte konstant ist.

In entsprechender Weise sind beliebig viele und beliebig liegende Konduktoren zu behandeln. Die Belegung allein, ponderabel gedacht, wirkt nach aufsen wie die Punkte E_2 und $\mathfrak{E}_2$, nach innen wie die Punkte E_1 und $\mathfrak{E}_1$ mit ihren Ladungen. Der Schwerpunkt von E_2 und $\mathfrak{E}_2$ ist der Schwerpunkt der Belegung.

139) Elektrische Bilder.

Thomson, dem man diese Theorie verdankt, hat durch die Inversion zu gegebenen Punkte zu findende Punkte mit ihren elektrischen Ladungen die elektrischen Bilder der ersteren und ihrer Ladungen genannt. Der Name ist um so treffender, als es sich für den Fall der Ebene um wirkliche Spiegelbilder handelt. Der Begriff des elektrischen Bildes umfaſst also erstens die Lage, zweitens die Ladung. Auch eine homogene Masse hat ein elektrisches Bild in Bezug auf jede Kugel, die Abbildung aber wird nicht homogen, weil die einzelnen Punkte verschiedene Ladungen erhalten, die Dichtigkeit also veränderlich wird. Man muſs also lernen, nicht nur Punkte, Linien, Flächen und Körper, sondern auch Dichtigkeiten und Potentialwerte zu übertragen. Kann man dies, so lassen sich aus gelösten Problemen neue ableiten. Dies soll jetzt gelehrt werden.

140) Inversionsbeziehungen bei elektrischen Bildern.

a) A_1 und B_1 seien die Abbildungen von A und B mit Hilfe der Inversion durch den mit Radius ϱ um O gelegten Kreis. Aus

$$OA \cdot OA_1 = \varrho^2$$

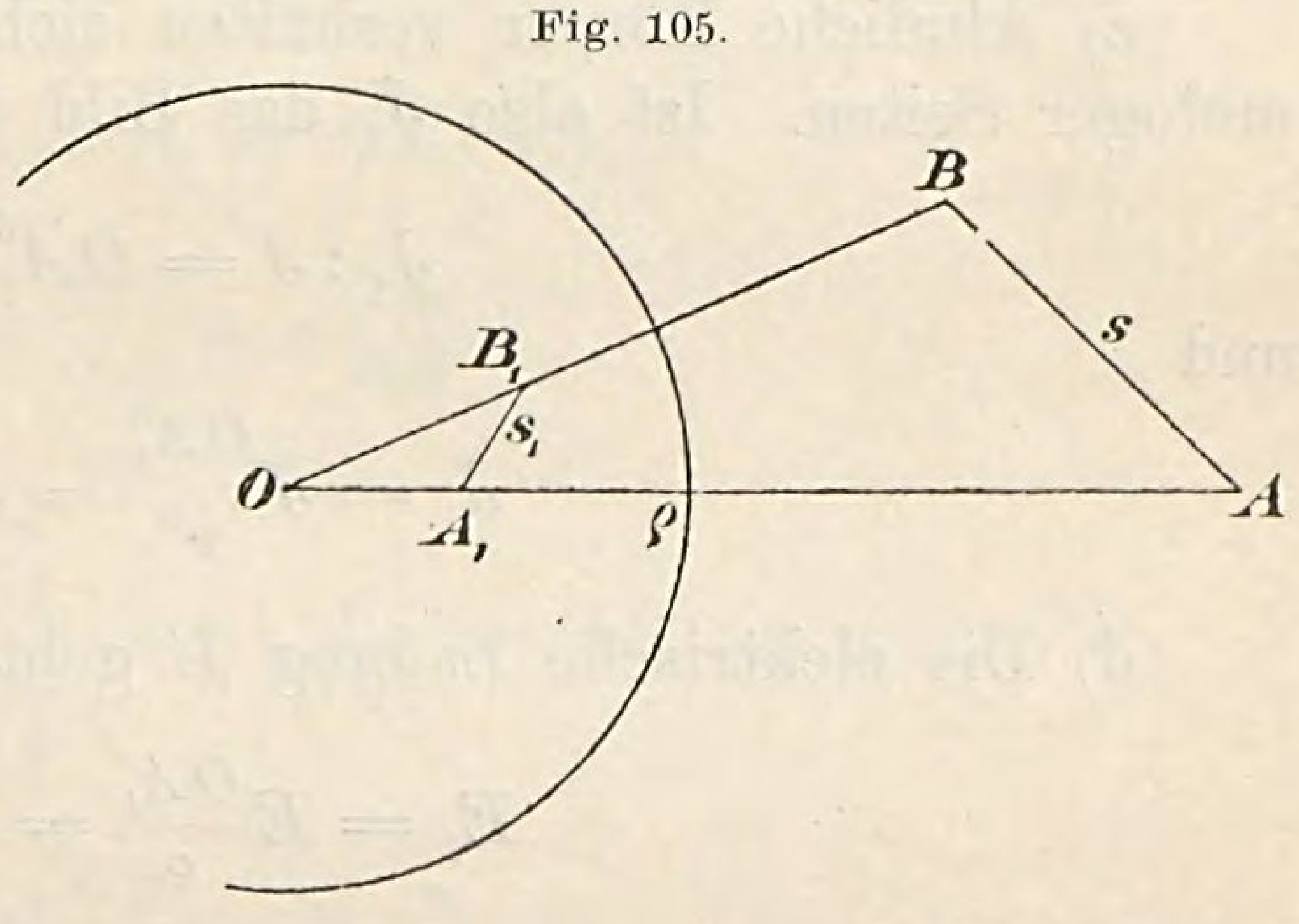
und

$$OB \cdot OB_1 = \varrho^2$$

folgt

$$OA : OB = OB_1 : OA_1$$

Fig. 105.



und damit die Ähnlicheit der Dreiecke OAB und OB_1A_1. Demnach ist

$$AB : A_1B_1 = OA : OB_1$$

oder, da $OB_1 = \frac{\varrho^2}{OB}$ ist,

$$AB : A_1B_1 = OA : \frac{\varrho^2}{OB} = OA \cdot OB : \varrho^2 = \frac{\varrho^2}{OA_1} : OB_1 = \varrho^2 : OA_1 \cdot OB_1.$$

Ist nun der Winkel α unendlich kein, also auch $AB = s$ und $A_1B_1 = s_1$ unendlich klein, so sind auch die Unterschiede zwischen OA_1 und OB_1, ebenso die zwischen OA und OB unendlich klein, man darf also dann statt $OA \cdot OB$ setzen OA^2, statt $OA_1 \cdot OB_1$ ebenso OA_1^2.

Wie also auch ein kleines Element s einer Geraden oder einer Kurve gerichtet sei, stets gilt für dieses und sein Inversionsbild die Proportion

$$s : s_1 = OA^2 : \varrho^2 = \varrho^2 : OA_1^2.$$

Ein kleines von A ausgehendes Linien- oder Bogenelement giebt demnach als Inversionsbild ein Element

$$s_1 = s \cdot \frac{\varrho^2}{OA^2} = s \cdot \frac{OA_1^2}{\varrho^2}.$$

(Für gröfseren Winkel α gilt diese Beziehung nicht, denn für solche ist $s : s_1 = OA : OB_1 = OB : OA_1$.)

Daraus läfst sich der isogonale Charakter und die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen bei dieser Übertragung ableiten. Ein kleines Dreieck mit den Seiten s, t, u geht in ein solches mit den Seiten

$$s_1 = s\frac{\varrho^2}{OA^2}, \quad t_1 = t\frac{\varrho^2}{OA^2}, \quad u_1 = u\frac{\varrho^2}{OA^2}$$

über. Die Ähnlichkeit ist also nachgewiesen.

b) Ähnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten. Ist also die kleine Fläche F_1 das Inversionsbild von F, so ist $F_1 : F = OA_1^4 : \varrho^4$, d. h.

$$F_1 = F \cdot \frac{OA_1^4}{\varrho^4} = F\frac{\varrho^4}{OA^4}.$$

c) Ähnliche Körper verhalten sich wie die dritten Potenzen homologer Seiten. Ist also J_1 das Bild von J, so ist

$$J_1 : J = OA_1^6 : \varrho^6$$

und

$$J_1 = J\frac{OA_1^6}{\varrho^6} = J\frac{\varrho^6}{OA^6}.$$

d) Die elektrische Ladung E geht über in

$$E_1 = E\frac{OA_1}{\varrho} = E\frac{\varrho}{OA}.$$

Der Beweis ist oben gegeben.

e) Aus

$$E_1 = E\frac{OA_1}{\varrho} = E\frac{\varrho}{OA} \quad \text{und} \quad s_1 = s\frac{OA_1^2}{\varrho^2} = s\frac{\varrho^2}{OA^2}$$

folgt durch Division

$$\frac{E_1}{s_1} = \frac{E}{s}\frac{\varrho}{OA_1} = \frac{E}{s}\frac{OA}{\varrho}.$$

Nun ist aber die Dichte der elektrischen oder ponderablen Belegung eines Linienelements

$$\delta_1 = \frac{E_1}{s_1} \quad \text{bezw.} \quad \delta = \frac{E}{s}.$$

Das Bild der Belegung δ eines Linienelements also ist

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho}{OA_1} = \delta \frac{OA}{\varrho}.$$

f) Dieselbe Betrachtung für die Belegung eines Flächenelements führt auf

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho^3}{OA_1^3} = \delta \frac{OA^3}{\varrho^3}.$$

g) Dieselbe für die Belegung eines Körperelements führt auf

$$\delta_1 = \delta \frac{\varrho^5}{OA_1^5} = \delta \frac{OA^5}{\varrho^5}.$$

h) Auch Potentialwerte lassen sich durch Abbildung übertragen. Befindet sich z. B. in A die Ladung E, deren Potentialwert in B gleich $V = \frac{E}{s}$ ist, so giebt die Abbildung in A_1 die Ladung

$$E_1 = E \frac{\varrho}{OA} = E \frac{OA_1}{\varrho},$$

deren Potential in B_1 den Wert $V_1 = \frac{E_1}{s_1}$ hat. Für gröfsern Winkel α gilt aber die Proportion

$$s : s_1 = OA : OB_1 = OB : OA_1,$$

d. h. es ist

$$s_1 = s \frac{OB_1}{OA} = s \frac{OA_1}{OB}.$$

Es ist also

$$V : V_1 = \frac{E}{s} : \frac{E_1}{s_1} = \frac{E}{s} : \frac{E \frac{\varrho}{OA}}{s \frac{OB_1}{OA}} = 1 : \frac{\varrho}{OB_1} = OB_1 : \varrho = \varrho : OB,$$

also

$$V_1 = V \frac{OB}{\varrho} = V \frac{\varrho}{OB_1}.$$

Das Verhältnis der Potentiale ist also unabhängig von der Lage des geladenen Punktes, dagegen abhängig von der Lage des Punktes, für den der Potentialwert genommen ist und vom Inversionsradius. Demnach gilt das Gesagte auch von mehreren Ladungen.

Hat man z. B. drei Ladungen, deren Potentialwerte für B die Summe $U + V + W$ geben, so findet man für den Bildpunkt B_1 den Potentialwert der abgebildeten Ladungen als

$$U_1 + V_1 + W_1 = (U + V + W) \frac{OB}{\varrho} = (U + V + W) \frac{\varrho}{OB_1}.$$

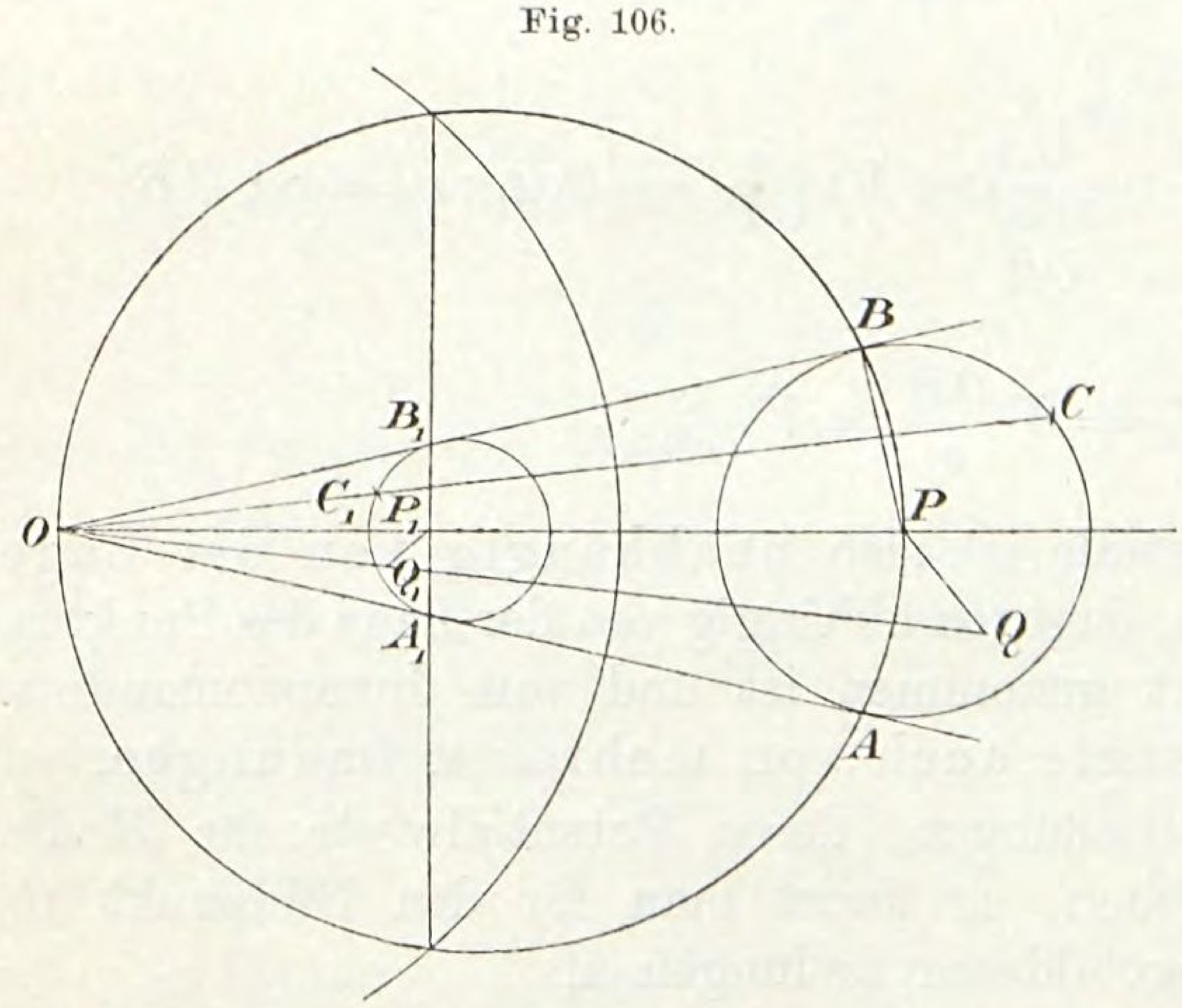
Als bekannt werde nun vorausgesetzt (vgl. Meth. Lehrbuch II, Stereom. Kap. IX), dafs durch Inversion Kugeln wieder in Kugeln übergehen, wobei die Schnittwinkel zweier Kugeln erhalten bleiben, so dafs z. B. eine Kugel, die die Inversionskugel rechtwinklig schneidet, in sich selbst übergeht. Ebenen gehen in Kugeln über, die durch das Inversionscentrum gehen, Kugeln durch letzteres verwandeln sich in Ebenen. Das Inversionscentrum ist äufserer Ähnlichkeitspunkt der Kugel und ihrer Bildkugel, woraus sich harmonische Beziehungen ergeben. Die Rechteckteilung des Raums durch koncentrische Kugeln, Meridianebenen und Kugelflächen geht über in eine solche durch excentrische Kugeln, die ein Kugelbüschel durch einen Kreis orthogonal schneiden und in eine dritte Orthogonalschar von Flächen, die gewissermafsen als Kegel mit kreisförmig gebogenen Seiten betrachtet werden können. Alle diese Beziehungen lassen sich elementar entwickeln, wozu man besonders Möbius und Reye vergleiche. Vorbeugend sei bemerkt, dafs im Raum die Niveauflächen eines Problems nicht in solche des Inversions-Problems übergehen. In der Ebene dagegen findet dies statt.

141) Abbildung gleichwertiger Niveauflächen.

Unter den zahlreichen physikalischen Sätzen, die sich aus obigem ableiten lassen, ist folgender von besonderer Wichtigkeit:

Haben mehrere Niveauflächen desselben Anziehungsproblems Belegungen, deren Potentiale nach aufsen hin (oder nach innen hin) überall gleichwertig sind, so haben auch ihre Bilder Potentiale von dieser Eigenschaft.

Fig. 106.



Beispiel. Die homogen mit Masse m belegte Kugelschale hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie ihr gleich stark geladener Mittelpunkt. Durch Abbildung mittels eines um einen äufseren Punkt geschlagenen Kreises geht sie in eine Kugelschale über, bei der nach Nr. 139 die Dichte umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung (z. B.

OA_1^3, OB_1^3, OC_1^3) ist. Da der Kreis durch den Mittelpunkt P, durch O und mit OP als Durchmesser (also durch A und B) in die Gerade $A_1 B_1$ übergeht, d. h. in die Berührungssehne, ist P_1 der O zugeordnete Punkt. Die Ladung von P_1 wird nach d)

$$m_1 = m \frac{\varrho}{OP}.$$

Die Belegung der neuen Kugel und die Ladung des Punktes P_1 haben nach aufsen hin dasselbe Potential. Die Potentialwerte für gröfsere Entfernungen stimmen überein, also müssen beide Belegungen gleich $m \frac{\varrho}{OP}$ sein.

So ergiebt sich das schon in Nr. 132 behandelte Problem in äufserst einfacher Weise.

Beispiel. Die homogen mit Masse m belegte Kugelschale hat im Innern überall den Potentialwert $V = \frac{m}{r}$, z. B. auch im beliebig liegenden Punkte Q, der in Q_1 übergeht. Nach h) wird

$$V_1 = V \cdot \frac{\varrho}{OQ_1} = \frac{m}{r} \cdot \frac{\varrho}{OQ_1} = \frac{m}{OQ_1} \cdot \frac{\varrho}{r},$$

also umgekehrt proportional OQ_1. Nun ist aber nach vorigem Beispiel die Belegung

$$m_1 = m \cdot \frac{\varrho}{OP} = m \frac{OP_1}{\varrho},$$

also ist

$$V_1 = \frac{m}{OQ} \cdot \frac{\varrho}{r} = \frac{m_1 \cdot OP}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{1}{OQ_1} = \frac{1}{OQ_1} \cdot \frac{OP \cdot m_1}{r}.$$

Aus $r : r_1 = OP : M_1$ folgt

$$r = r_1 \frac{OP}{OM_1},$$

demnach wird

$$V_1 = \frac{m_1}{OQ_1} \cdot \frac{OP \cdot OM_1}{r_1 OP} = \frac{m_1 \frac{OM_1}{r_1}}{OQ_1},$$

oder, wenn man $m_1 \frac{OM_1}{r_1} = m_0$ setzt,

$$V_1 = \frac{m_0}{OQ_1},$$

d. h. gleich dem Potential einer in O angebrachten Masse m_0, die zu m_1 in dem früher dargelegten Verhältnisse steht. Also auch hier bestätigt sich alles früher Abgeleitete.

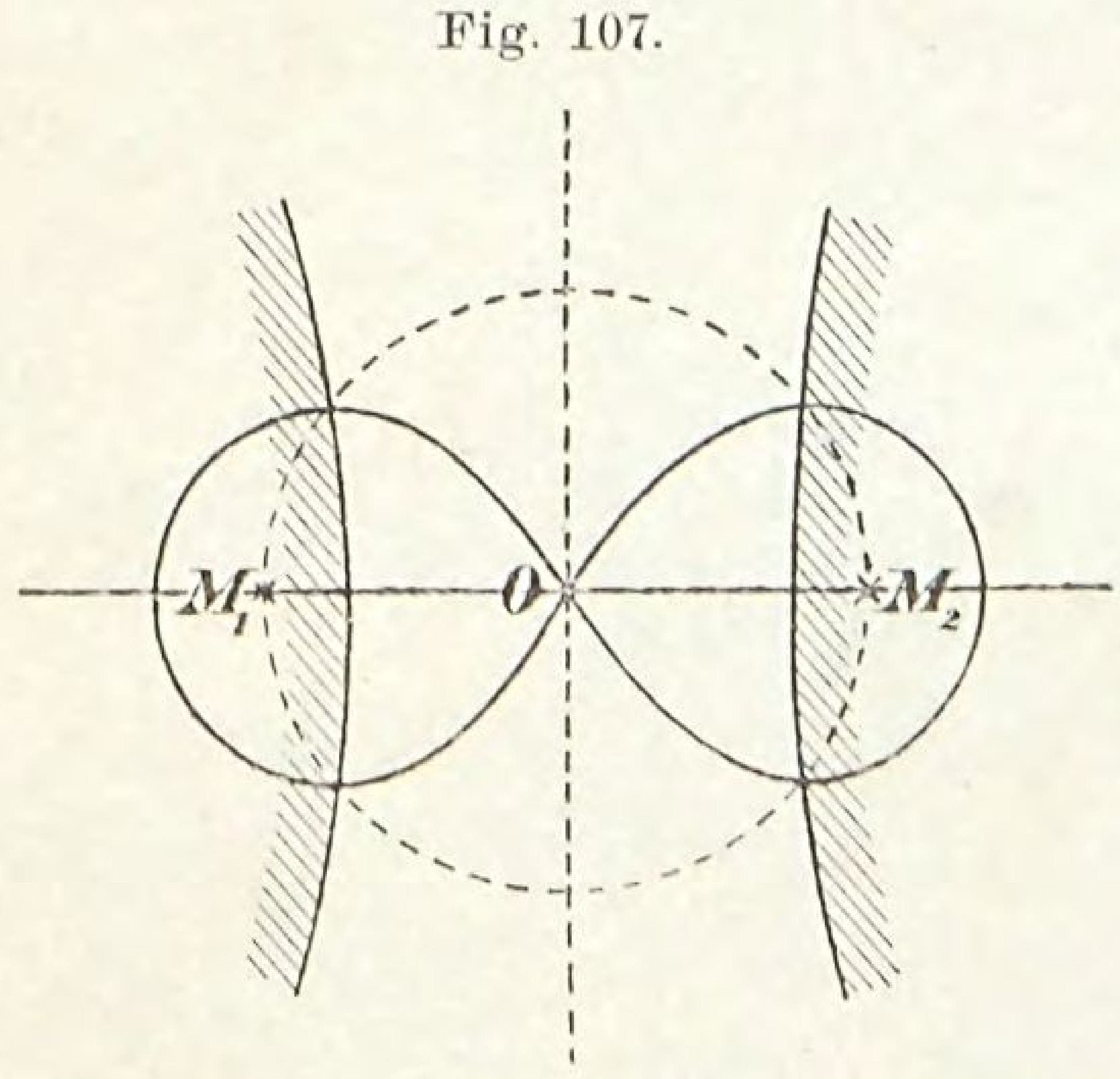
Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man einen Inversionskreis wählt, der die Kugel auf sich selbst abbildet, indem er sie rechtwinklig schneidet.

Beispiel. Koncentrische, homogen mit derselben Masse belegte Kugelschalen haben nach aufsen hin dasselbe Potential. Folglich: Kreise einer sogenannten Kreisschar, die mit gleichen Massen so belegt sind, dafs auf jeder die Dichtigkeiten umgekehrt proportional dem Kubus der Entfernung von einem der Büschelpunkte sind, haben nach aufsen hin dasselbe Potential.

Beispiel. Die homogen mit Masse ausgefüllte Vollkugel hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie der mit derselben Masse belegte Mittelpunkt. Nach 139 geht sie durch Abbildung in eine Kugel über, deren Dichtigkeit im Innern umgekehrt proportional der fünften Potenz der Entfernung vom Inversionscentrum oder von dessen zugeordnetem Punkte in der Bildkugel ist. Das Potential nach aufsen ist überall gleich dem einer im letzteren Punkte befindlichen Masse, deren Gröfse $m \cdot \frac{\varrho}{OM}$ gleich der der Bildmasse ist. Damit ist die Ergänzung zu Nr. 135 gegeben.

Die koncentrische homogen erfüllte Hohlkugel hat nach aufsen hin dasselbe Potential, wie die gleiche Masse im Centrum. Sie geht in eine excentrische Hohlkugel des vorigen Dichtigkeitsgesetzes über, für deren Büschelpunkte dasselbe gilt. Das Potential im Hohlraum der ersteren ist konstant, das der letzteren ergiebt sich mit bei der Schale als gleich dem des äufseren Büschelpunktes mit einer leicht zu bestimmenden Ladung. Der innere Büschelpunkt ist nach dem Asymptotengesetz der Schwerpunkt der so mit Masse erfüllten Kugel.

Fig. 107.



Beispiel. Jede Niveaufläche des symmetrischen Zweipunktsystems für gleichartige Ladungen hat bei der früher ermittelten Belegung nach aufsen hin dieselbe Potentialwirkung, wie die Punkte M_1 und M_2. Man bilde mittels des um O gelegten, durch M_1 und M_2 gehenden Kreises ab, dann gehen M_1 und M_2 in sich selbst über, die Niveaufläche geht in ihre reciproke Fläche mit einer ganz bestimmten Belegung über, z. B. bei der durch O gehenden Niveaufläche in eine asymptotische Drehungsfläche, deren Gleichung leicht aus der ersteren abzuleiten ist. Die Punkte des Aufsenraumes der ursprünglichen Niveaufläche gehen in die des nicht schraffierten Raumes über. Dort sind also die Niveau-

flächen und Stromlinien der neuen Belegung ebenfalls identisch mit denen von M_1 und M_2. Daraus lassen sich weitere Schlüsse über das Zweipunktproblem ziehen, da sich für die reciproken Punkte eine einfache Beziehung herausstellt. — Entsprechendes gilt von jeder Anordnung geladener Punkte auf dem Kreise oder auf der Kugel.

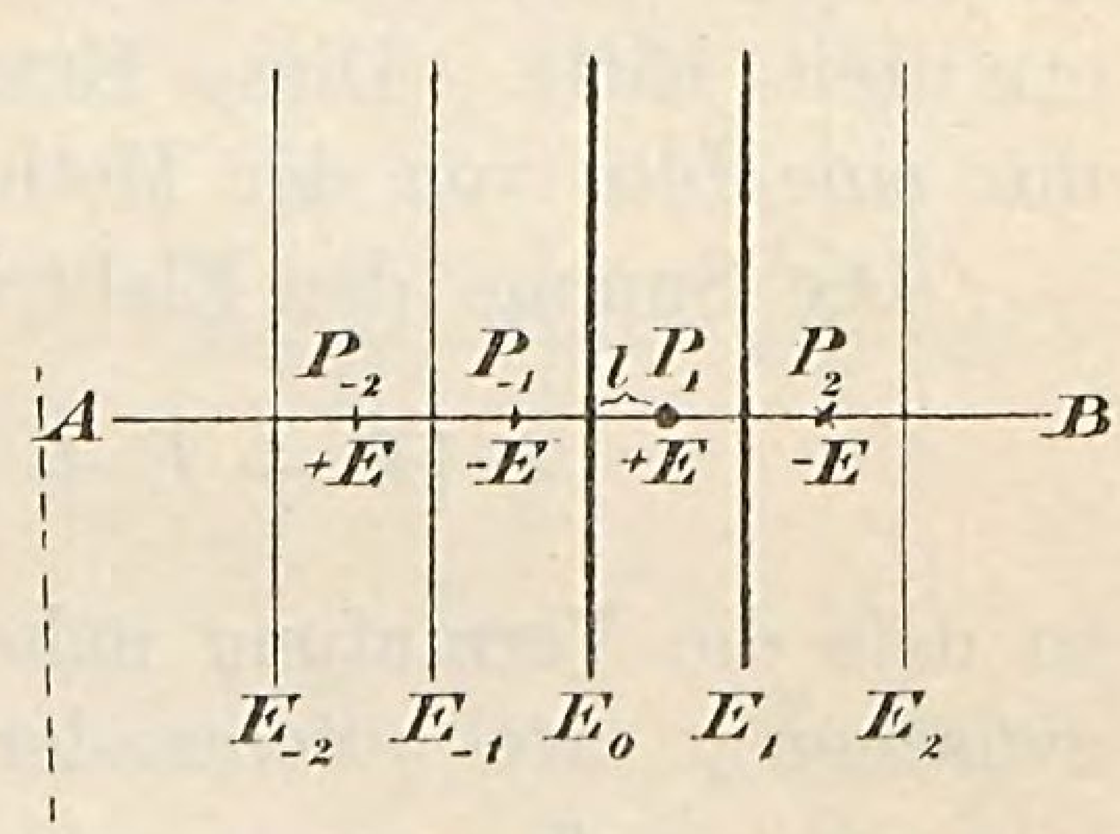
Obwohl im allgemeinen Niveauflächen nicht wieder in Niveauflächen übergehen, lassen sich in der genannten Weise aus gelösten Problemen neue ableiten, und dazu liefsen sich noch zahlreiche Beispiele geben.

142) Mehrfache Spiegelung bei parallelen Ebenen. Thomson hat aber auch Beispiele behandelt, bei denen mehrfache Spiegelung vorkommt. Auch diese bedeutungsvolle Ergänzung seiner Methode soll an einfachen Beispielen verdeutlicht werden, bei denen es sich um Influenzerscheinungen auf mehreren Flächen zugleich handelt.

Aufgabe. In der Mitte zwischen zwei unbegrenzten Parallelebenen E_0 und E_1 befinde sich ein Punkt P_1 mit der Ladung $+E$. Dieser rufe auf jeder der leitenden Ebenen Influenz hervor, die beiden negativen Influenzelektrizitäten aber beeinflussen sich gegenseitig. Die elektrische Dichtigkeit für beliebig liegende Punkte der beiden Ebenen soll untersucht werden.

Auflösung. Man spiegele P_1 und die Ebene E_1 gegen die Ebene E_0, was P_{-1} mit der Ladung $-E$ und die Ebene E_{-1} giebt. Alles jetzt Vorhandene spiegele man gegen die Ebene E_1, das neu Erhaltene gegen E_0, das jetzt Neue gegen E_0 u. s. w. So erhält man auf der Geraden AB unendlich viele Punkte in gleichen Abständen $2l$ mit wechselnden Ladungen $+E$ und $-E$ und dazwischen entsprechende Ebenen. Jede der Ebenen ist Symmetrieebene des Problems der so geladenen Punkte. Die Punkte rechts und links von E_0 z. B. bringen

Fig. 108.



auf der Ebene eine Influenzverteilung hervor, die identisch mit der auf E_1 hervorgebrachten ist. Entfernt man jetzt alles, was rechts und links von E_1 liegt, so hat man die Lösung des Problems. Denn durch die entsprechende Belegung beider Ebenen ist alles Aufsenliegende ersetzt worden.

Nach Nr. 136 geben die Punkte P_1 und P_{-1} zusammen der Ebene E_0 in einem beliebigen Punkte die elektrische Dichtigkeit

$$\delta_1 = \frac{El}{2\pi(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wenn r die Entfernung des untersuchten Punktes von der Geraden AB ist. Die Punkte P_2 und P_{-2} haben von E_0 die Entfernung $3l$, sie haben entgegengesetzte Ladungen, wie die vorigen, verändern also die Normalkraft und geben die Dichtigkeit

$$\delta_2 = -\frac{E\cdot 3l}{2\pi(3l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

P_3 und P_{-3} geben

$$\delta_3 = +\frac{E5l}{2\pi(25l^2+r^2)},$$

und so geht es in unendlicher Reihe weiter. Die Dichtigkeit in dem untersuchten Beispiele wird also

$$\delta = -\frac{El}{2\pi}\left[\frac{1}{[l^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{[(3l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{[(5l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{7}{[(7l)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}} + \cdots\right].$$

Diese Formel giebt die Dichtigkeit der Belegung beider Ebenen E_0 und E_1 in jedem Punkte. Die Reihe in der Klammer ist eine schnell konvergierende oszillierende. Bildet man die Lösungen der ersten n bezw. $(n+1)$ Glieder, so liegt die wirkliche Lösung zwischen diesen Resultaten. Man kann also für jeden Standpunkt der Berechnung die Fehlergrenze angeben. Eine geschlossene Lösung würde man allerdings erst haben, wenn man die Formel für die Summe der Reihe ermittelt hätte. Diese Ermittelung soll aber hier unterbleiben, da nur eine Idee von der Methode gegeben werden soll.

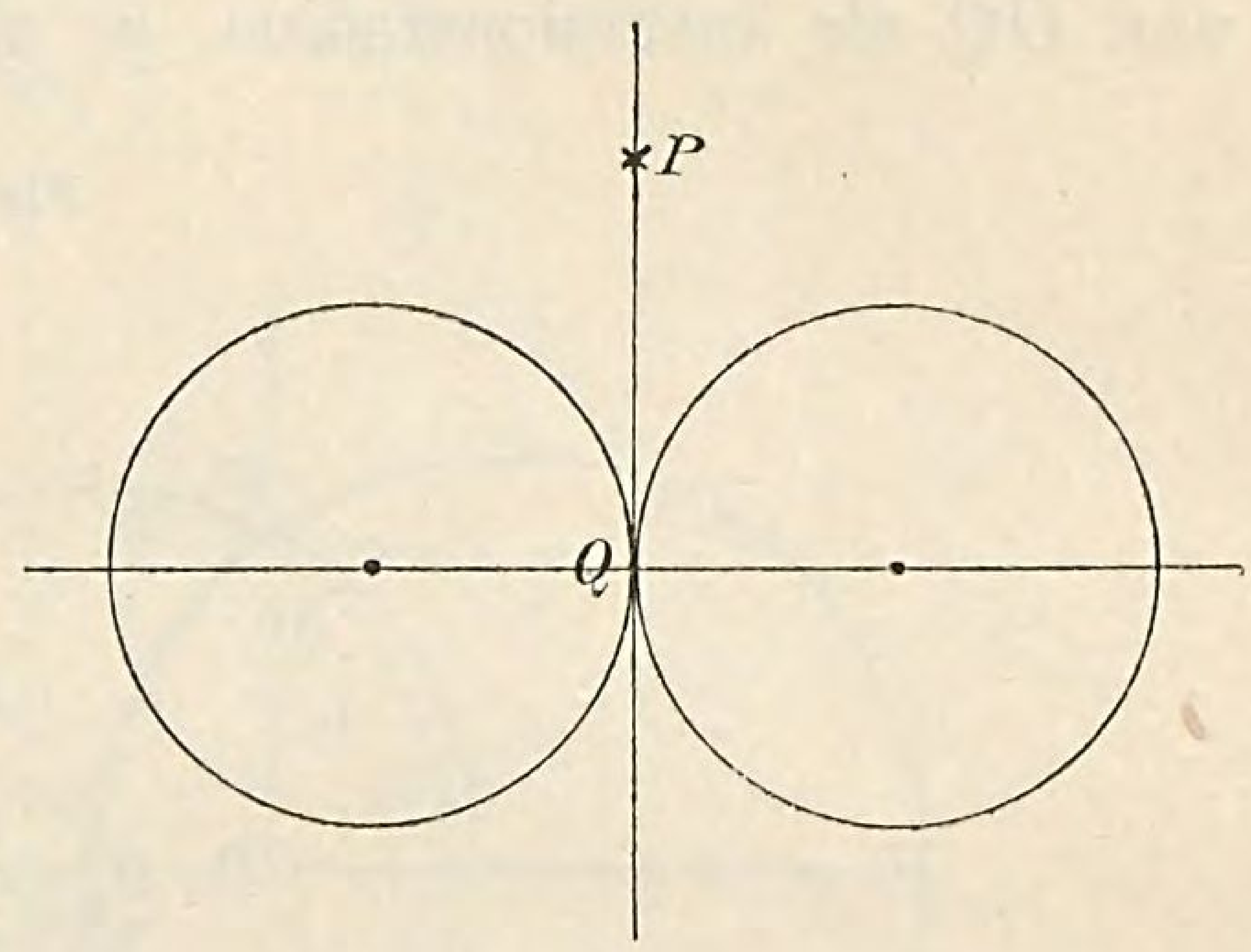
Die Summe der Elektrizitäten für jede Gesamtebene würde sein

$$-[E - E + E - E + E - E + \cdots],$$

so daſs die Vermutung nahe liegt, es würde sich um den Mittelwert zwischen je zwei aufeinander folgenden Näherungswerten O und $-E$, d. h. um $-\frac{E}{2}$ handeln. Dies ist in der That der Fall, denn man kann sich die beiden Ebenen im unendlichen Bereiche, wo die Dichtigkeit gleich Null ist, als geschlossen denken, wodurch nichts geändert wird. Man könnte sich z. B. vorstellen, daſs es sich um ein Drehungsellipsoid von der Drehungsachse $2l$ handelt, welches aber bis ins Unendliche reicht. Auf diesem würde die Influenzelektrizität gleich $-E$ sein, so daſs auf jeden der beiden Teile $-\frac{E}{2}$ kommt.

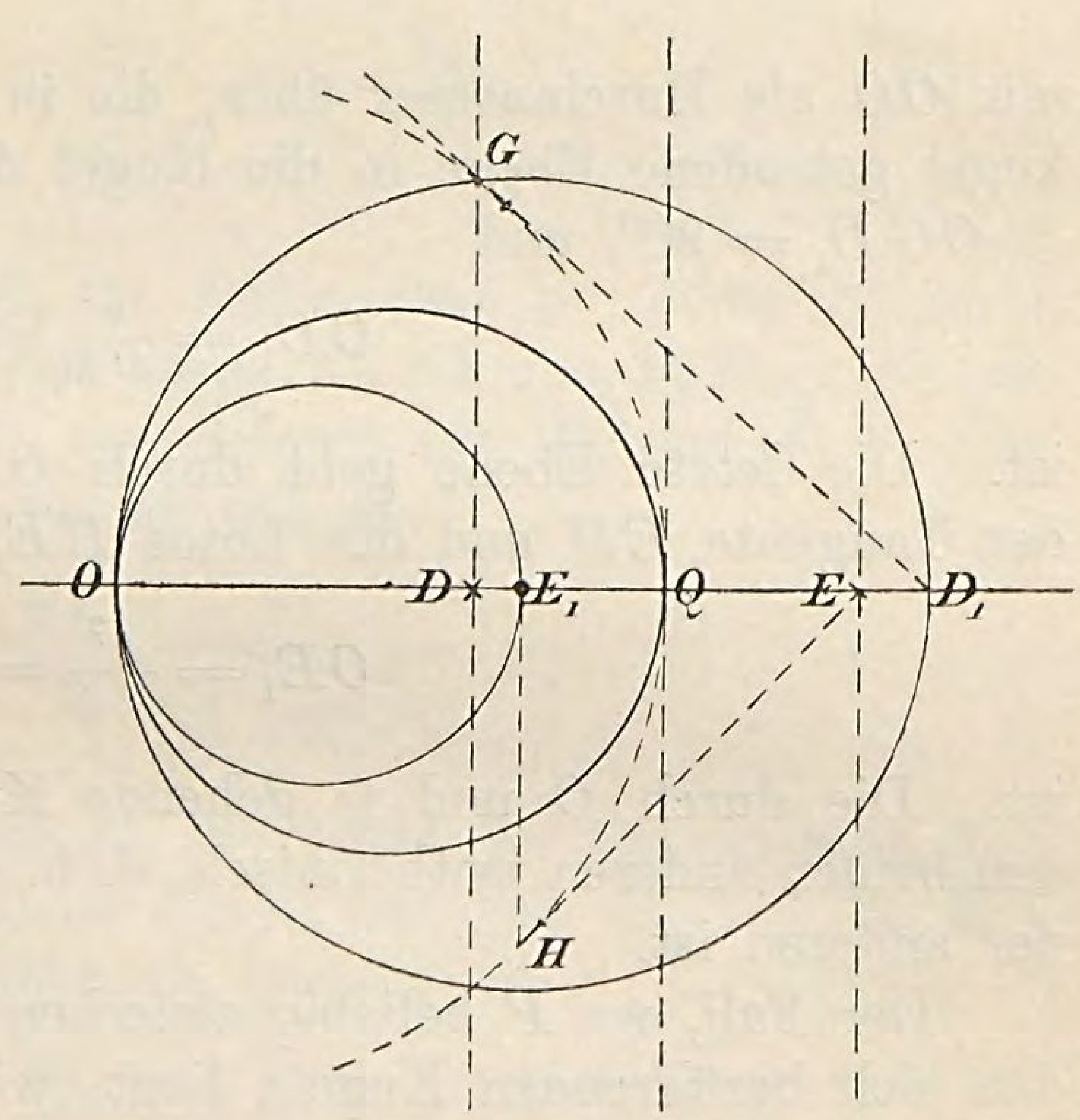
143) Mehrfache Spiegelung bei Berührungskugeln. Bildet man das Problem mit Hilfe irgend einer Kugel ab, so erhält man die Lösung des Problems zweier einander berührender Kugelflächen, bei denen der influenzierende Punkt irgendwo auf einer dritten Kugel liegt, die den Raum zwischen den beiden anderen isothermisch teilt, d. h. so, dafs die eine Kugel in Bezug auf sie zur anderen reciprok ist. Die Berührung kann dabei eine äufserliche oder eine innerliche sein. Hat die abbildende Kugel ihr Centrum irgendwo auf der den Raum zwischen den beiden Parallelebenen halbierenden Parallelebene, so handelt es sich um den durch Fig. 109 dargestellten Symmetriefall, wo P auf zwei sich berührenden gleich grofsen Kugeln Iufluenz hervorruft. Die Übertragung geschieht nach den oben auseinandergesetzten Grundsätzen.

Fig. 109.



Wählt man als Inversionscentrum einen beliebigen Punkt O im Aufsenraume der Parallelebene, als Inversionsradius die Entfernung $OQ = \varrho$ bis zur Mittelebene, so verwandelt sich diese in eine Kugel mit dem Durchmesser OQ. Die von der Inversionskugel in F und G geschnittene Ebene geht über in eine Kugel durch O, G und F. Der rechte Winkel OGD_1 giebt einen vierten Punkt E_1, und dabei ist von selbst

Fig. 110.



$$OD_1 = \frac{\varrho^2}{OD} = \frac{\varrho^2}{\varrho - l}.$$

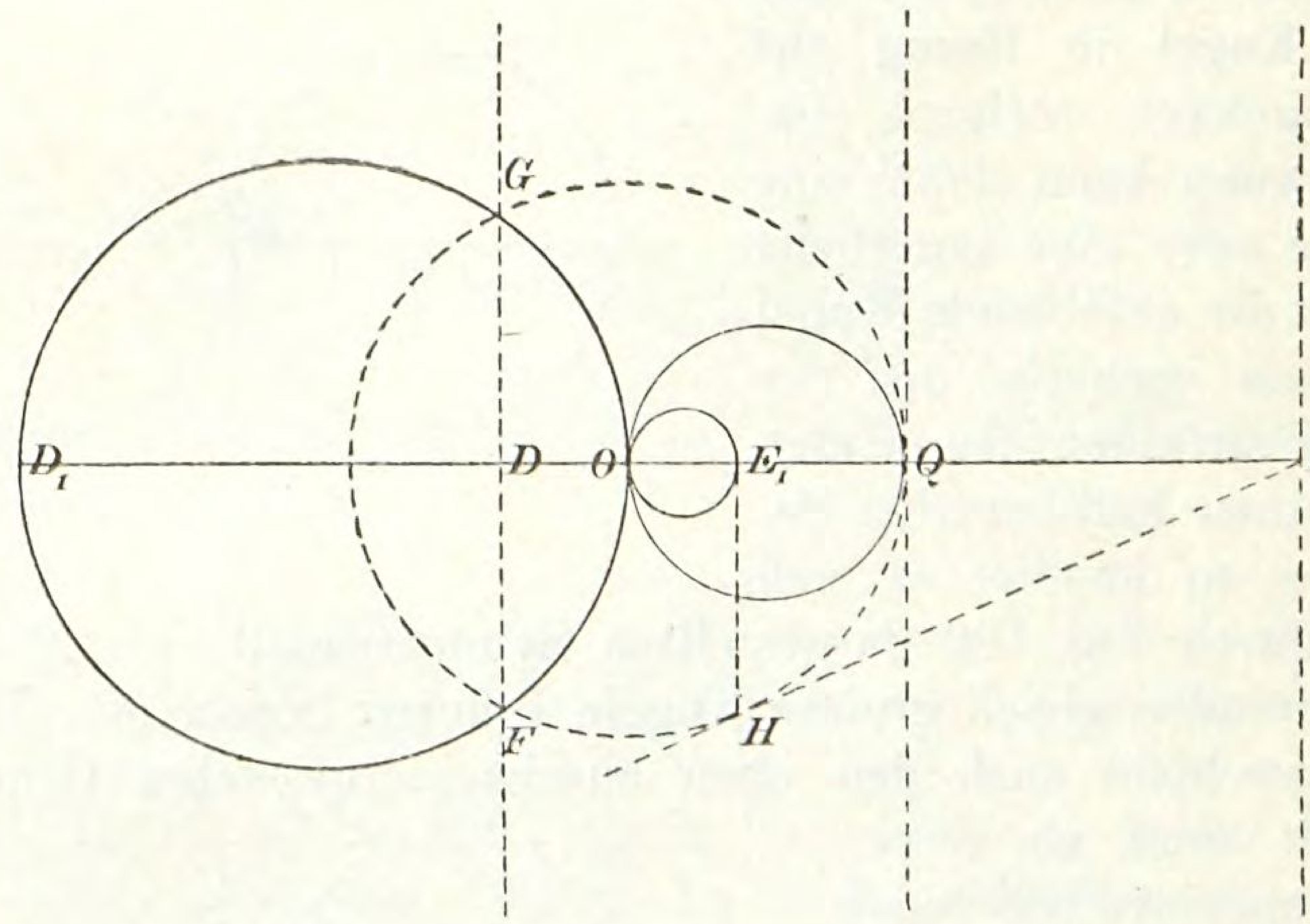
Für die letzte Kugel ergiebt sich der Punkt E_1 mit Hilfe der Tangente EH und des Lotes HE_1, wobei

$$OE_1 - \frac{\varrho^2}{OE} = \frac{\varrho^2}{\varrho - l}$$

ist. Die äufsere Kugel ist das Reciproke des Innern in Bezug auf die mittlere Kugel, was dem Begriffe der isothermischen Teilung entspricht. Auf der letzteren Kugel liegt irgendwo der influenzierende Punkt, der die beiden anderen Kugeln beeinflufst.

Wählt man einen beliebigen Punkt O zwischen den Parallelebenen und OQ als Inversionsradius, so geht die Mittelebene in die Kugel

Fig. 111.



mit OQ als Durchmesser über, die in F und G von der Inversionskugel getroffene Ebene in die Kugel durch O, G, F und D_1, wobei $\sphericalangle\, OGD_1 = 90^0$, und

$$OD_1 = \frac{\varrho^2}{OD} = \frac{\varrho^2}{l - \varrho}$$

ist. Die letzte Ebene geht durch O und E_1, wobei E_1 mit Hilfe der Tangente EH und des Lotes HE_1 gefunden wird und

$$OE_1 = \frac{\varrho^2}{OE} = \frac{\varrho^2}{\varrho + l}$$

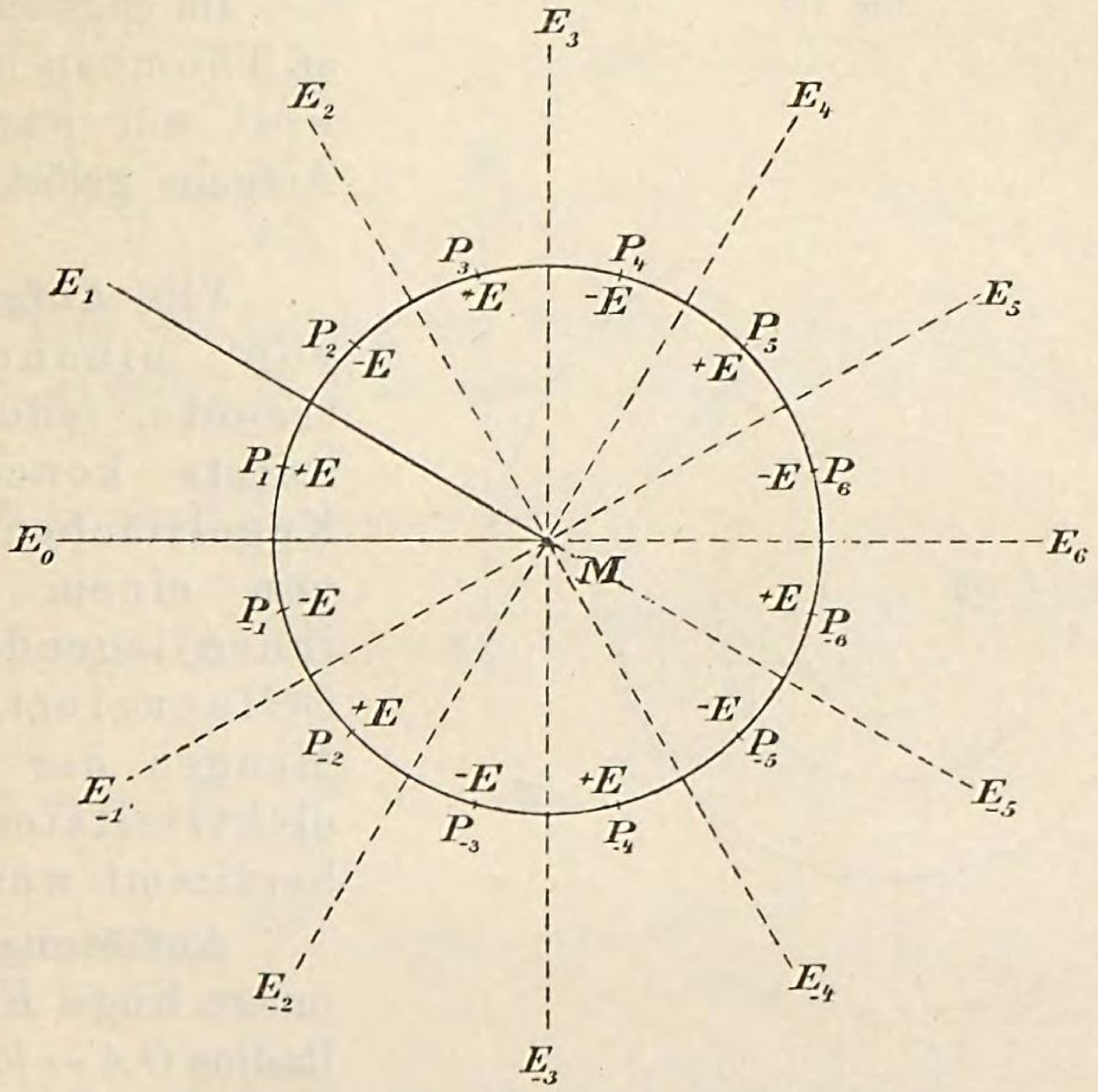
ist. Die durch O und Q gehende Kugel teilt den Raum zwischen den beiden anderen isothermisch, d. h. so, dafs die eine die Abbildung der anderen ist.

Der Fall, wo P beliebig zwischen den beiden Parallelebenen oder den sich berührenden Kugeln liegt, wird ganz ähnlich behandelt.

144) **Aufgabe.** Zwei Ebenen E_0 und E_1 mögen sich unter dem Winkel $30^0 = \frac{360^0}{12}$ schneiden. Auf der den Winkel halbierenden Ebene liege ein influenzierender Punkt P_1 mit der Ladung $+E$. Die Influenzverteilung soll untersucht werden.

Auflösung. Man bilde wie vorher die Spiegelbilder, was Punkte P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 mit abwechselnden Ladungen $-E$, $+E$, und ebenso Punkte P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, ... P_{-6} mit solchen Ladungen giebt. Durch die sämtlichen Punkte werden die beiden Ebenen ersetzt.

Fig. 112.



P_1 und P_{-1} haben von E_0 die Entfernung l_1. Jeder Punkt in Entfernung x von der Senkrechten durch M hat von $P_1 P_{-1}$ die Entfernung $r_1 = x - MA_1$, wo A_1 den Schnitt von E_0 und $P_1 P_{-1}$ bedeutet. Die Dichte in ihm bestimmt sich als

$$\delta_1 = -\frac{El_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(l_1^2 + r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso haben P_2 und P_{-2} von E_0 die leicht zu berechnende Entfernung l_2. Der vorher behandelte Punkt hat von $P_2 P_{-2}$ die Entfernung $r_2 = x - A_2$. Dies giebt die Dichtigkeit

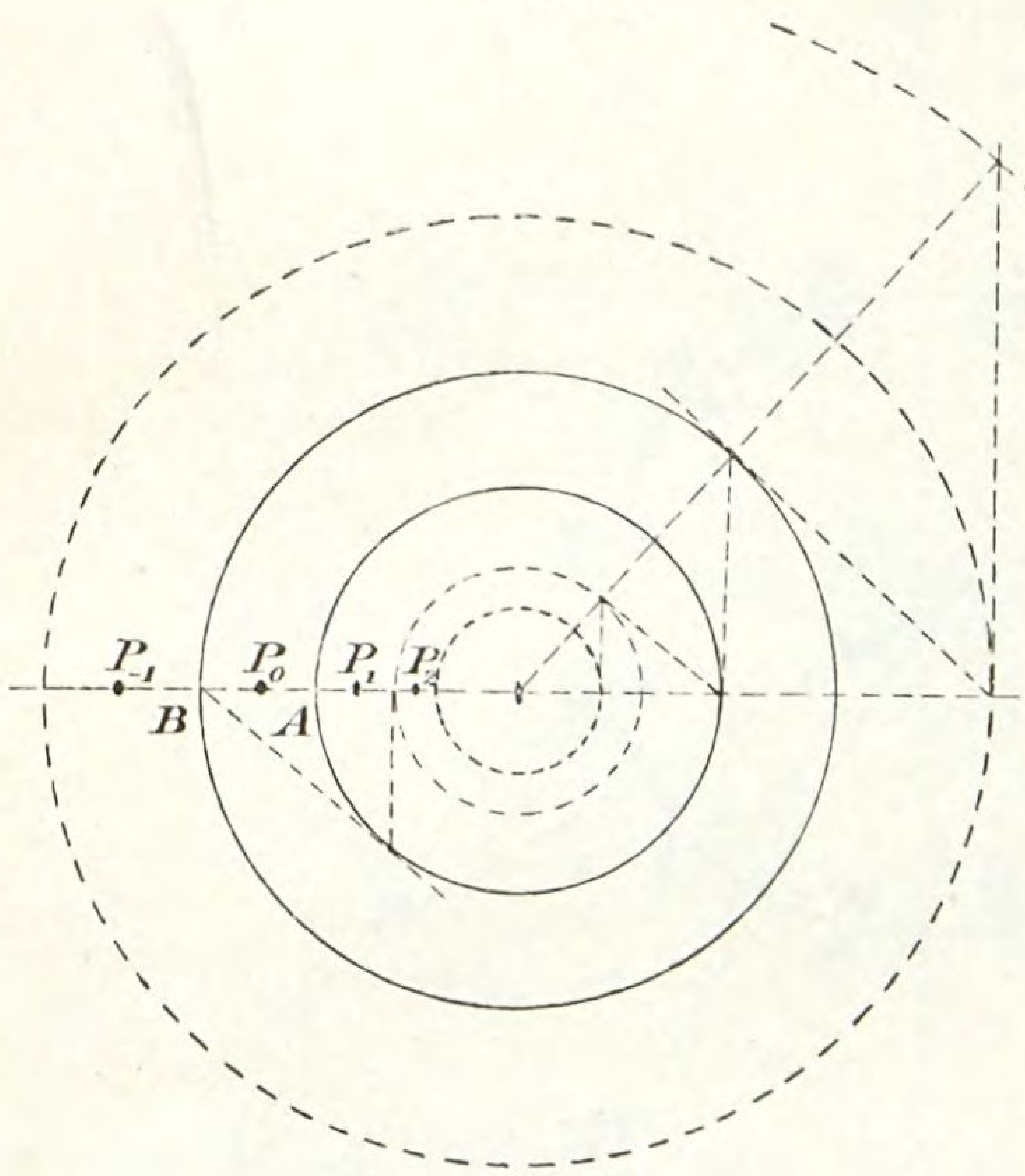
$$\delta_2 = +\frac{El_2}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(l_2^2 + r_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ebenso bestimmt sich die aus den übrigen Punkten P_3 und P_{-3}, P_4 und P_{-4}, P_5 und P_{-5}, P_6 und P_{-6} hervorgehende Dichtigkeit. Diese kann also für die ganze Ebene E_0, also auch für die Halb-

ebene ME_0 in geschlossener Form berechnet werden. Dies ist für jeden Winkel $\alpha = \frac{360^0}{2n}$ möglich, sobald n ganze Zahl ist.

Durch Abbildung erhält das Problem hier zwei sich unter α schneidende Kugeln und einen zwischen ihnen „isothermisch" liegenden Punkt.

Fig. 113.



Im engsten Anschlufs an Thomson bezw. Maxwell soll jetzt folgende Aufgabe gelöst werden:

145) **Aufgabe:** Zwei von einander getrennte, jedoch abgeleitete koncentrische Kugelflächen werden von einem zwischen ihnen liegenden Punkte influenziert. Die Mengen der Influenzelektrizitäten sollen bestimmt werden.

Auflösung. Die erste innere Kugel K_1 habe den Radius $OA = b$, die zweite, äufsere K_2 den Radius $OB = b \cdot e^w$. Die Lage des Punktes P sei durch $OP = b \cdot e^u$ bestimmt.

a) Zunächst werde P gegen K_1 gespiegelt, was den Punkt Q_0 geben mag, dann dieser gegen K_2, was P_1 giebt, dieser gegen K_1, was Q_2 giebt u. s. w. Dabei ist für jede durch K_1 vermittelte Spiegelung

$$OP \cdot OQ_0 = b^2, \quad OP_1 \cdot OQ_1 = b^2, \ldots, \quad OP_s \cdot OQ_s = b^2;$$

für jede durch K_2 vermittelte ist

$$OQ_0 \cdot OP_1 = b^2 e^{2w}, \quad OQ_1 \cdot OP_2 = b^2 e^{2w}, \ldots, \quad OQ_{s-1} \cdot OP_s = b^2 e^{2w}.$$

Demnach ist

$$OQ_0 = \frac{b^2}{OP} = \frac{b^2}{be^u} = be^{-u},$$

$$OP_1 = \frac{b^2 e^{2w}}{OQ_0} = \frac{b^2 e^{2w}}{be^{-u}} = be^{u+2w}$$

$$OQ_1 = \frac{b^2}{OP_1} = \frac{b^2}{be^{u+2w}} = be^{-(u+2w)}$$

$$OP_2 = \frac{b^2 e^{2w}}{OQ_1} = \frac{b^2 e^{2w}}{b e^{-(u+2w)}} = b e^{u+4w}$$

.

.

.

.

$$OP_s = \frac{b^2 e^{2w}}{OP_{s-1}} = \frac{b^2 e^{2w}}{b e^{-(u+2(s-1)w)}} = b e^{u+2sw}$$

$$OQ_s = \frac{b^2}{OP_s} = \frac{b^2}{b e^{u+2sw}} = b e^{-(u+2sw)}.$$

Bezeichnet man die Ladung der Punkte durch die ihnen beigelegten Buchstaben, so dafs z. B. P die Ladung von P ist, so wird nach Nr. 139

$$Q_0 = -P\frac{b e^{-u}}{b} = -P e^{-u},$$

$$P_1 = -Q_0 \cdot \frac{OP_1}{\varrho_2} = P e^{-u} \cdot \frac{b e^{u+2w}}{b e^{w}} = P e^{w},$$

$$Q_1 = -P_1 \cdot \frac{OQ_1}{\varrho_1} = -P e^{w}\frac{b e^{-(u+2w)}}{b} = P e^{-(u+w)},$$

$$P_2 = -Q_1 \frac{OP_2}{\varrho_2} = P e^{-(u+w)} \cdot \frac{b e^{u+4w}}{b e^{w}} = P \cdot e^{2w},$$

allgemein

$$P_s = P e^{sw}, \quad Q_s = -P e^{-(u+sw)}.$$

Dies ist bis ins Unendliche fortzusetzen.

b) Man bilde jetzt P gegen K_2 ab, was Q_1' giebt, sodann Q_1' gegen K_1, was P_1' giebt, dieses gegen K_2, was Q_2' giebt u. s. w. Dann wird entsprechend

$$OQ_1' = b e^{2w-u}, \quad OP_1' = b e^{u-2w}$$

$$OQ_2' = b e^{4w-u}, \quad OP_1' = b e^{u-4w},$$

und allgemein

$$OP_s' = b e^{u-2sw}, \quad OQ_s' = b e^{2sw-u}.$$

Die Ladungen werden allgemein

$$P_s' = P e^{-sw}, \quad Q_s' = -P e^{sw-u}.$$

c) Zu den Niveauflächen sämtlicher Punkte gehören die beiden Kugelflächen und alle ihre gegenseitigen Abbildungen. Die Kugel K_1 mit ihrer Belegung kann durch die innere Punktreihe, die Kugel K_2

mit der ihrigen durch die äufsere Punktreihe ersetzt werden. Die innere Reihe enthält alle Punkte P' und Q, die äufsere alle Punkte P und Q', alle P sind positiv, alle Q negativ geladen.

Die Ladung der inneren Kugel ist gleich der Summe der Ladungen aller Q und aller P'. Die einen geben

$$\sum_0^\infty Q_s = -Pe^{-u}(1+e^{-w}+e^{-2w}+e^{-3w}+\cdots)$$

$$= -P\frac{e^{-u}}{1-e^{-w}} = P\frac{e^{-u}e^{w}}{e^{w}-1} = P\frac{e^{w-u}}{e^{w}-1},$$

die anderen

$$\sum_1^\infty P'_s = Pe^{-w}(1+e^{-w}+e^{-2w}+\cdots)$$

$$= P\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} = P\frac{1}{e^{w}-1}.$$

Die Ladung der inneren Kugel wird also

$$E_1 = -P\frac{e^{w-u}}{e^{w}-1} + P\frac{1}{e^{w}-1} = -P\frac{e^{w-u}-1}{e^{w}-1},$$

oder

$$E_1 = -\frac{P}{e^{u}}\cdot\frac{e^{w}-e^{u}}{e^{w}-1},$$

oder, da

$$e^{u} = \frac{OP}{b} = \frac{OP}{OA} \quad \text{und} \quad e^{w} = \frac{OB}{b} = \frac{OB}{OA}$$

ist,

$$E_1 = -P\cdot\frac{OA}{OP}\cdot\frac{\frac{OB}{b}-\frac{OP}{b}}{\frac{OB}{b}-1},$$

d. h.

$$E_1 = -P\frac{OA}{OP}\cdot\frac{OB-OP}{OB-OA} = -P\frac{OA\cdot PB}{OP\cdot AB}.$$

d) Die äufseren Punkte geben auf der äufseren Kugel folgende Influenzmengen: P_s mit Ladung Pe^{sw} giebt auf der Kugel

$$P_s\cdot\frac{\varrho_2}{OP_s} = Pe^{sw}\cdot\frac{be^{w}}{be^{u+2sw}} = Pe^{-(u+(s-1)w)}.$$

Dies giebt die Reihe

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} = Pe^{-u}\,[e^{0}+e^{-w}+e^{-2w}+\cdots] = P\frac{e^{-u}}{1-e^{-w}} = P\frac{e^{w-u}}{e^{w}-1}.$$

Jedes Glied der anderen Gruppe Q_s' mit Ladung $-Pe^{sw-u}$ giebt auf der Aufsenkugel die Ladung

$$-Pe^{sw-u}\frac{\varrho_2}{OQ_s'}=-Pe^{sw-u}\cdot\frac{be^w}{be^{2sw-u}}=-Pe^{w(1-s)}.$$

Die Summe von $s=1$ bis $s=\infty$ wird

$$-P\left[e^0+e^{-w}+e^{-2w}+\cdots\right]=-P\frac{1}{1-e^{-w}}=-P\frac{e^w}{e^w-1}.$$

Im ganzen ist die Belegung

$$-P\frac{e^w}{e^w-1}+P\frac{e^{w-u}}{e^w-1}=-P\frac{e^w-e^{w-u}}{e^w-1}.$$

Setzt man wieder

$$e^w=\frac{OB}{OA}\quad\text{und}\quad e^u=\frac{OP}{OA}$$

ein, so erhält man als Ladung

$$E_2=-P\cdot\frac{OB}{OP}\cdot\frac{AP}{AB}.$$

e) Dabei ist

$$E_1+E_2=-P\left[\frac{OA}{OP}\cdot\frac{PB}{AB}+\frac{OB}{OP}\cdot\frac{AP}{AB}\right]=-P\frac{OA\cdot PB+(OA+AB)AP}{OP\cdot AB}$$

$$=-P\frac{OA(PB+AP)+AB\cdot AP}{OP\cdot AB}=-P\cdot\frac{OA\cdot AB+AB\cdot AP}{OP\cdot AB}$$

$$=-P\cdot\frac{OA+AP}{OP}=-P.$$

Die beiden Kugeln zusammengenommen verhalten sich also wie ein geschlossener Hohlraum, bei dem die Influenzelektrizität dieselbe Menge hat, wie die influenzierende.

Ferner ist

$$E_1:E_2=OA\cdot PB:OB\cdot PA.$$

[Sind OA und OB unendlich grofs, aber AB endlich, so ist

$$E_1:E_2=PB:AP,$$

d. h. auf parallelen Ebenen verhalten sich die Mengen der Influenzelektrizität umgekehrt, wie die Abstände von der Ladung P_1 und zwar ist

$$E_1=-P\frac{PB}{AB},\quad E_2=-P\cdot\frac{AP}{AB}.$$

Damit ist ein wichtiges Resultat für das allgemeine Ebenenproblem gefunden, welches ganz ähnlich, wie das Kugelproblem, auf zwei Gruppen von Punkten führt.]

Liegt bei den koncentrischen Kugeln P auf der isothermisch teilenden Kugel, so ist

$$OA \cdot OB = OP^2 = (OA + AP)(OB - BP),$$

also

$$OA \cdot OB = OA \cdot OB + OB \cdot AP - BP(OA + AP),$$

d. h.

$$OB \cdot AP = BP \cdot OA + BP \cdot AP = BP \cdot OP.$$

Demnach wird in diesem Falle

$$E_1 = -E\frac{OA \cdot BP}{OP \cdot AB} = -E\frac{OB \cdot AP - BP \cdot AP}{OP \cdot AB}$$

$$= -E\frac{AP \cdot (OB - BP)}{OP \cdot AB} = -E\frac{AP \cdot OP}{OP \cdot AB} = -E\frac{AP}{AB}.$$

$$E_2 = -E\frac{OB \cdot AP}{OP \cdot AB} = -E\frac{BP \cdot OP}{OP \cdot AB} = -E\frac{BP}{AB}.$$

Das Verhältnis vereinfacht sich also zu

$$E_1 : E_2 = AP : BP,$$

während

$$E_1 + E_2 = -E$$

bleibt.

[Sind die Kreise unendlich grofs, also Parallelebenen, so liegt jetzt P auf der den Zwischenraum halbierenden Parallelebene und es wird $AP = BP$, also $E_1 = E_2$.]

In diesem Falle bilden die Radien der Bildpunkte, ebenso die der Ladungen, eine einfachere geometrische Reihe (letztere mit wechselnden Vorzeichen), so dafs die Rechnung einige Erleichterungen bietet, namentlich wenn man $OP_1 = 1$ setzt.

Die Berechnung der Dichtigkeit in jedem Punkte hat so zu erfolgen, dafs man bei der Innenkugel nach der früheren Dichtigkeitsformel für jeden Innenpunkt und seine Ladung die Dichtigkeiten festsetzt und die oszillierende Reihe aufstellt. Die Summierung derselben macht im allgemeinen Schwierigkeiten, da sie aber schnell konvergiert, ist der Fehler leicht einzugrenzen, denn die Summe liegt zwischen der Summe der n ersten und der Summe der $(n + 1)$ ersten Glieder. — Durch Abbildung kann man zu excentrischen Kreisen und auseinanderliegenden Kreisen übergehen.

Weitere Beispiele, besonders auch die Übertragung des Problems der Kreisscheibe auf die Kugelkalotte, findet man bei Maxwell und Thomson. Die Fruchtbarkeit der Methode ergiebt sich aber schon aus den hier behandelten Problemen.

Kapitel VIII.

Centrobarische Flächenbelegungen und Körper.

146) Rückblick. Sowohl die homogene Kugelschale als auch die homogene Voll- und koncentrische Hohlkugel ziehen jede äufsere Masse so an, als ob ihre eigene Masse im Mittelpunkte, d. h. im Schwerpunkte, vereinigt wäre. Wird ferner eine Kugelschale so mit Masse belegt, dafs die Dichtigkeit umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von einem inneren oder äufseren Punkte ist, so ist der erstere, bezw. das Bild des zweiten, für jede äufsere Masse als Attraktionscentrum zu betrachten. Daraus folgt sofort für den Fall, dafs diese Masse in unendlicher Entfernung liegt, dafs das Attraktionscentrum zugleich der Schwerpunkt ist. Dasselbe gilt von der Vollkugel, sobald die Dichtigkeit umgekehrt proportional der 5^{ten} Potenz der Entfernung von einem äufseren oder inneren Punkte ist, ebenso von der entsprechenden excentrischen Hohlkugel, deren Flächen Orthogonalflächen zu dem Kreisbüschel durch den äufseren Punkt und sein Bild bezw. zu den zugehörigen Kugeln sind.

Ferner wurde folgendes gezeigt: Wird eine in sich geschlossene Fläche nach der Erde abgeleitet und von einem inneren Punkte aus, der mit der Elektrizität $+E$ geladen ist, influenziert, so ordnet sich die Influenzelektrizität $-E$ erster Art so an, dafs das Potential für den gesamten Aufsenraum gleich Null ist. Die Wirkungen der Ladung und die der Influenzelektrizität heben sich nach aufsen hin in jedem Punkte auf, abgesehen vom Vorzeichen wirkt also jede von beiden genau ebenso wie die andere. Die entsprechende Belegung der Fläche mit ponderabler Masse wirkt also nach aufsen genau ebenso, wie der mit derselben Masse versehene innere Punkt. Die nach aufsen gehenden Kraftlinien sind also Gerade, die Niveauflächen koncentrische Kreise. Da ferner die Asymptoten der Kraftlinien, d. h. die Geraden selbst, durch den Schwerpunkt gehen, so ist der den influenzierenden Punkt vertretende Massenpunkt zugleich Schwerpunkt der Belegung. Vgl. 136.

147) Unterschied zwischen Flächen- und Körperbelegungen. Die Lehre von der Influenzelektrizität lehrt uns also, dafs es Massenbelegungen für in sich geschlossene Flächen giebt, die nach aufsen ebenso wirken, wie ein im Innern beliebig gelegener Massenpunkt, und zwar giebt es für jeden Massenpunkt eine bestimmte **und nur diese einzige Art der Belegung**, denn auch die Influenzelektrizität ordnet sich nur auf eine einzige Art an, sobald die Punktladung eine bestimmte Lage hat. Für solche Belegungen ist also das Attraktionscentrum in Bezug auf äufsere Massenpunkte und körperliche Massen von beliebiger Gestalt und Dichtigkeitsanordnung, sobald sie nur ganz aufsen liegen, stets dasselbe. Man nennt eine solche Belegung eine centrobarische Belegung.

Man kann sich nun den Innenraum kontinuierlich durch in sich geschlossene aufeinanderfolgende Flächen ausgefüllt denken, was auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen kann, da die gewählten Gestalten willkürliche sein können. Dabei soll jede der Flächen eine entsprechende centrobarische Belegung erhalten. Das Dichtigkeitsgesetz für den Körper wird dabei selbstverständlich ein anderes, wie für die einzelnen Flächen. Für die Kugel z. B. ging die 3^{te} Potenz in die 5^{te} über. Vgl. 140g. Dann ist der ganze Körper centrobarisch. Folglich:

Ein von einer in sich geschlossenen Fläche begrenzter Raum kann auf unendlich viele Arten so mit Masse angefüllt werden, dafs er centrobarisch wirkt und zwar wie ein der Lage nach in seinem Innern gegebenes Attraktionscentrum.

Aus dem centrobarischen Verhalten eines Körpers lassen sich also keine Schlüsse auf die Art der Massenverteilung in seinem Innern ziehen.

In den früheren Betrachtungen kamen aufser den oben genannten noch andere Ableitungen centrobarischer Belegungen vor. Man denke z. B. an das symmetrische Zweipunktproblem. Die Kraftlinien und Niveauflächen desselben werden nicht geändert, wenn man an Stelle des einen Punktes eines der getrennten Ovale setzt, natürlich mit der entsprechenden Belegung. Weil der Punkt durch das so belegte Oval ersetzt werden kann, wirken beide nach aufsen hin in übereinstimmender Weise. Das Oval hat also eine centrobarische Belegung und der Punkt ist deren Schwerpunkt. Dies gilt von allen Problemen für getrennte Massenpunkte und die Niveauflächen, die nur einen dieser Punkte umschliefsen, ihn also bei entsprechender Belegung ersetzen können.

148) Centrobarische Weltkörper. Angenommen, ein Weltkörper sei centrobarisch, dann wirkt er auf jeden äufseren Massen-

punkt so, als ob die Anziehung von dem Attraktionscentrum ausginge, umgekehrt wird er von allen ihn umgebenden Massen so angezogen, dafs sämtliche Einzelkräfte, also auch die Resultante, in diesem Centrum angreifen. Ist die Resultante gleich Null, so herrscht Gleichgewicht, denn drehende Kräftepaare können dabei nicht in Erscheinung treten. Der Körper kann um das Centrum beliebig gedreht werden, ohne dafs das Gleichgewicht gestört wird.

Denkt man sich diesen Weltkörper festliegend und aufser ihm nur noch einen einzigen anderen Weltkörper, dem irgend eine Geschwindigkeit in beliebiger Richtung gegeben werde, dann bewegt sich der letztere so, als ob er von einem festen Punkte angezogen würde, d. h. in einer Kegelschnittbahn, deren einer Brennpunkt das Attraktionscentrum ist.

Man denke sich zwei centrobarische Körper allein im Weltraume und gebe jedem eine nach Gröfse und Richtung beliebige Geschwindigkeit, dann werden sie sich folgendermafsen bewegen. Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich geradlinig mit der reduzierten Anfangsgeschwindigkeit $\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, wobei im Zähler die Addition in mechanischem Sinne aufzufassen ist, also auch die Richtung giebt. Beide Körper bewegen sich in Bezug auf den ruhend zu denkenden Schwerpunkt in ähnlichen Kegelschnittbahnen, z. B. in Ellipsen; d. h. der Schwerpunkt jedes Einzelkörpers macht diese Bewegung. Aufserdem macht jeder Körper Drehungen um seinen Schwerpunkt, die zunächst um feste Hauptachsen, aber auch um irgendwie schwankende beliebige Achsen geschehen könnten. Diese Drehungen erfolgen aber ohne jede gegenseitige Einwirkung. Es wird sich jedoch zeigen, dafs Schwankungen der Achsen nicht stattfinden können, da das Centralellipsoid solcher Körper eine Kugel, also jede Schwerpunktsachse Hauptträgheitsachse, d. h. freie Drehungsachse ist.

Wäre also z. B. die Erde ein centrobarischer Körper, so würde die Sonne nicht imstande sein, an ihr Präzessionserscheinungen hervorzurufen; ebensowenig würde der Mond Nutationen der Erdachse veranlassen. Da diese Erscheinungen stattfinden, ist die Erde kein solcher Körper.

Die centrobarischen Körper geben also den einfachsten Fall für die astronomischen Theorien, z. B. für das Problem der zwei bezw. drei Körper, die auf einfache Punktprobleme reduziert werden können. Dergleichen Annahmen werden in der Regel stillschweigend gemacht, sie bedürfen aber der Präzisierung im Sinne der centrobarischen Theorie.

149) Einige Sätze über centrobarische Körper. Es lassen sich über solche Körper mehrere einfache Sätze aussprechen. Aus obigem geht zunächst folgender hervor:

Ist ein Körper centrobarisch in Bezug auf einen frei beweglichen Massenpunkt, so ist er es auch in Bezug auf jede beliebig gestaltete Masse.

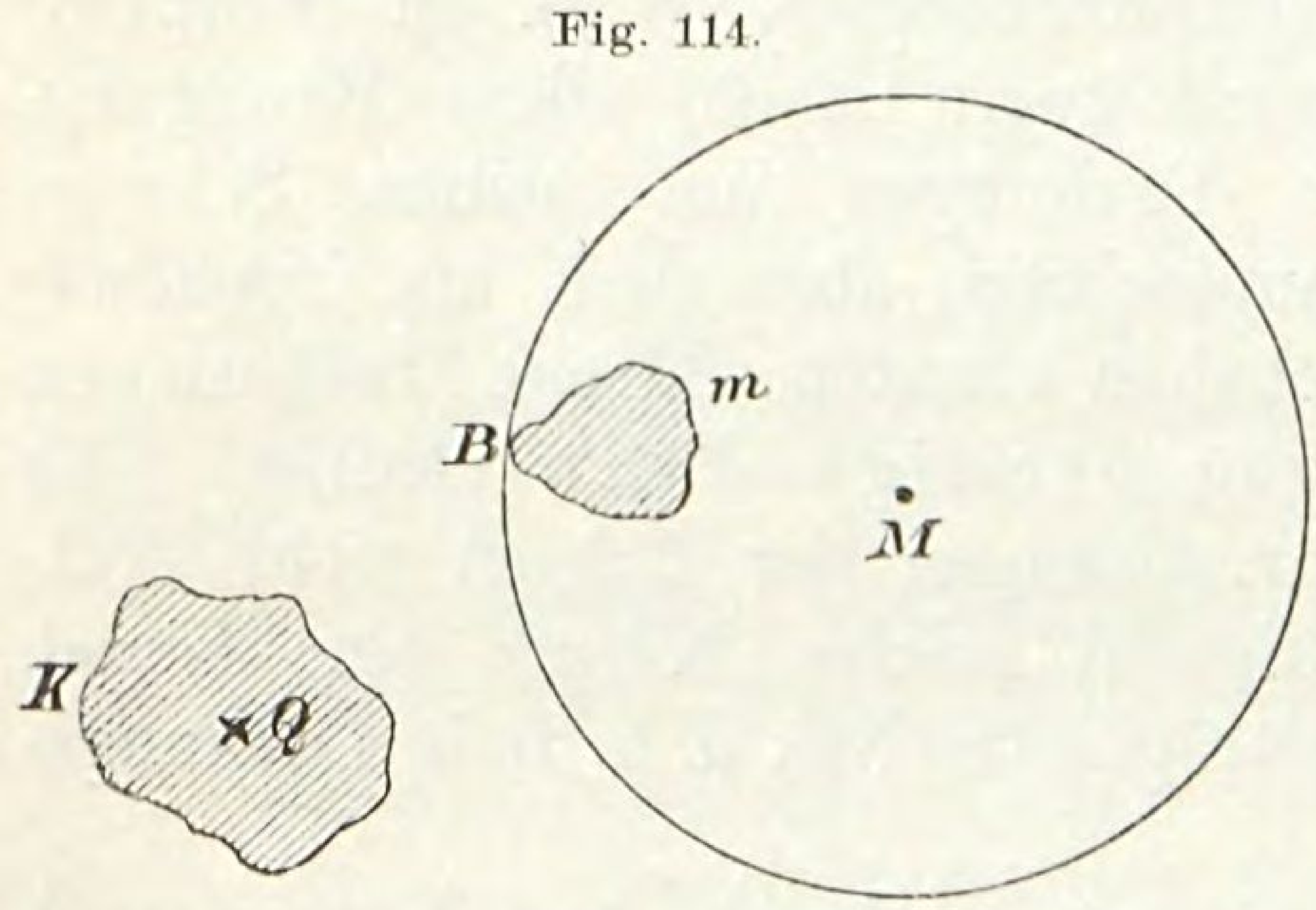
Die englischen Physiker haben auch den folgenden Satz und seinen Beweis für notwendig gehalten:

Ist ein Körper centrobarisch für eine einzige freibewegliche und irgendwie gestaltete Masse, so ist er es auch in Bezug auf jeden Massenpunkt (und jede beliebige andere Masse).

Der Beweis läfst sich folgendermafsen führen:

Ist K der Körper und m die beliebig gestaltete Masse, auf die er in jeder Lage sich centrobarisch einwirkend verhält, so denke man sich eine beliebige Kugelfläche, die m berührend einschliefst, K aber ausschliefst. Durch Drehungen um den Mittelpunkt M kann man die Masse m in neue Lagen bringen. Nach der Voraussetzung wirkt sie dann stets so, dafs die anziehende Kraft im Attraktionscentrum Q angreift. Man denke sich nun die Kugelfläche in n^2 gleich grofse Felder eingeteilt, z. B. durch Meridiane und Parallelkreise. Jedes der Felder soll in seinem Mittelpunkte von einem nach dorthin um M gedrehten Körper m berührt werden. Dabei wird angenommen, dafs ein Übergreifen der Körper ineinander nicht störend wirkt, aufserdem soll die Dichtigkeit δ jedes Punktes in $\frac{\delta}{n^2}$ verwandelt werden. Weil die Anziehungskraft jedes Körpers in Q angreift, greift auch die aller n^2 Körper dort an. Dies bleibt auch richtig, wenn man n unendlich grofs nimmt, wobei der Raum einer Vollkugel oder Hohlkugel gleichmäfsig und kontinuierlich mit solchen Körpern angefüllt ist. Die Masse jedes Punktes ist jetzt gleichmäfsig über die durch ihn gehende koncentrische Kugelfläche verteilt vorden, sie zieht jetzt so an, als ob sie in M befindlich wäre, und die Kraft greift in Q an. Dies gilt von sämtlichen Punkten der Masse M. Ihre neue Anziehung ist so, als ob die ganze Masse in M vereinigt wäre. In Bezug auf diesen willkührlich gewählten Punkt ist jetzt die Masse K centrobarisch, sie ist ebenso centrobarisch in Bezug auf jeden

Fig. 114.



beliebigen anderen Punkt ihres Aufsenraumes, also auch centrobarisch in Bezug auf jede beliebige aufsen liegende Masse.

Das Attraktionscentrum eines centrobarischen Körpers kann nur in seinem Innern liegen. Wird nämlich die betreffende Fläche von aufsen her influenziert, so wird bei Ableitung zur Erde zwar das Potential für den Innenraum gleich Null, aber nicht für Punkte des Aufsenraumes. Es ist nicht ausgeschlossen, dafs eine centrobarische Belegung entsteht, wie z. B. bei der Kugelfläche, aber dann ist nicht der äufsere, sondern ein innerer Punkt Attraktionscentrum. Sobald ein Körper seinen Schwerpunkt im Aufsenraume hat, kann er nicht centrobarisch sein. Ringkörper z. B., die durch Rotation entstehen, sind niemals centrobarisch. Auch ein aus getrennten Teilen bestehender Körper kann als Ganzes genommen nicht centrobarisch sein.

150) [Die wichtigste mechanische Eigenschaft centrobarischer Körper ist die, dafs ihr Centralellipsoid stets eine Kugel ist, so dafs jede Schwerpunktsachse eine Hauptachse der Trägheit ist. Ein vollkommen zwingender elementarer Beweis des Satzes scheint nicht möglich zu sein. Für vorgeschrittene Leser sei des Interesses halber, welches der Satz beansprucht, folgender Beweis gegeben.

Man umgebe den centrobarischen Körper mit einer in sich geschlossenen Fläche. Jede Belegung derselben greife ihn so an, als ob seine Masse nur im Attraktionscentrum befindlich wäre, denn jeder einzelne Punkt greift dort an. Ein Kräftepaar kann also nicht entstehen. Ist die Resultante gleich Null, so sind sämtliche Gleichgewichtsbedingungen, auch die der Kräftepaare, erfüllt. Der Schwerpunkt sei Anfangspunkt der Koordinaten.

Man denke sich jetzt die Belegung der Hilfsfläche derartig, dafs das Potential für jeden Punkt x, y, z des Innern den Wert xyz habe. Wird dann die Masseneinheit aus einer Lage x, y, z in eine Lage x_1, y_1, z_1 gebracht, so ist die Arbeit $x_1 y_1 z_1 - xyz$ nötig; ist δ die Dichte, so ist für jede Raumeinheit die Arbeit $\delta(x_1 y_1 z_1 - xyz)$ nötig, geschieht die Bewegung parallel zur X-Achse, so ist die Arbeit $\delta(x_1 - x)yz$ nötig, für sämtliche Punkte des Körpers also die Arbeit

$$\sum \delta (x_1 - x) yz = (x_1 - x) \sum \delta yz.$$

Da nun aber das Attraktionscentrum für den Körper gesetzt werden kann, ist zur Verschiebung von Null bis x_1 längs der X-Achse die Arbeit

$$m(x_1 - o)\, y \cdot z = m \cdot x_1 \cdot o \cdot o = o$$

nötig, also mufs auch

$$(x_1 - x)\sum \delta yz = o$$

sein, also, da $x_1 - x$ verschieden von Null ist,

$$\sum \delta yz = o.$$

Dies ist aber der Ausdruck für das Centrifugalmoment, und da dieses gleich Null ist, mufs die X-Achse Hauptachse sein. Die X-Achse war aber ganz willkürlich durch den Schwerpunkt gelegt, also ist jede Schwerpunktsachse Hauptachse, des Centralellipsoid also eine Kugel. (Vgl. Ing.-Math. I, Nr. 388.)

Befinden sich also zwei centrobarische Körper im Weltraum und giebt man jedem eine willkürlich fortschreitende und drehende Bewegung, so bleibt, während die beiden sich nach dem Planetengesetz umkreisen, die Drehungsachse eines jeden konstant gerichtet. Keiner der beiden beeinflufst den anderen in seiner Drehung. Es handelt sich also nur um das schon besprochene Problem zweier freien Massenpunkte. Bei dem Problem der drei Körper z. B. ist es gleichgültig, ob man centrobarische Körper oder Massenpunkte nimmt.

Für einfache Fälle, wie die centrobarische Belegung der Kugelfläche, läfst sich nach obigem die Gleichheit der Hauptträgheitsmomente auch elementar nachweisen.]

„Eins der überraschendsten Ergebnisse der wundervollen Greenschen Theorie des Potentials ist der Nachweis der Existenz centrobarischer Körper, und die Entdeckung derselben ist gewifs eine der merkwürdigsten und interessantesten von den verschiedenen Anwendungen dieser Theorie.“ So urteilen Thomson und Tait über den Gegenstand dieses Abschnitts. Es handelt sich um einen der Punkte, bei denen die Physik den Mathematiker auf neue Bahnen geleitet hat. Aus diesem Grunde wurde den betreffenden Körpern ein besonderes Kapitel gewidmet.

Kapitel IX.

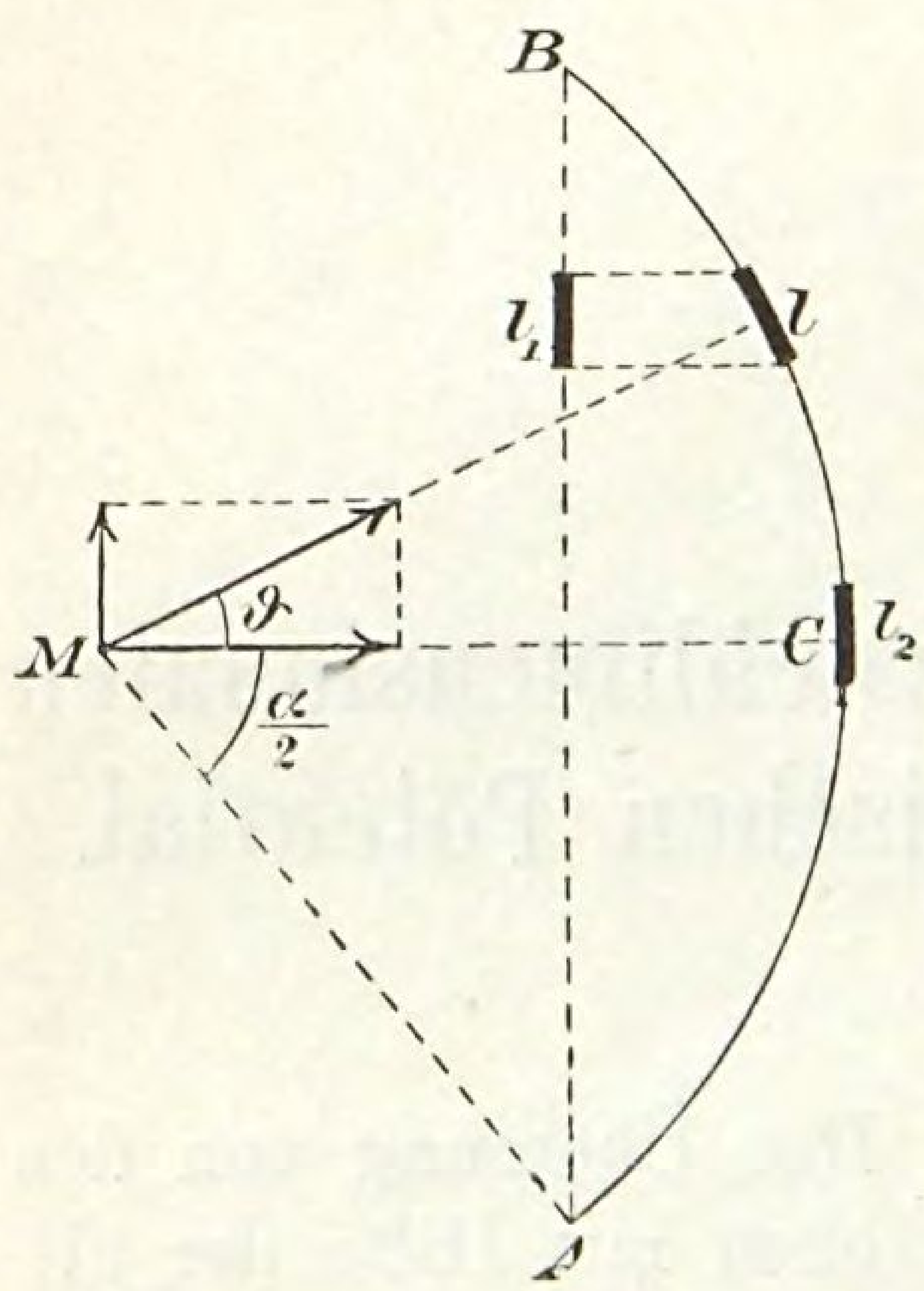
Selbständiger Übergang zu den zweidimensionalen Problemen und zum logarithmischen Potential.

151) Allgemeine Vorbemerkungen. Der Übergang von den Raumproblemen zu denen der Ebene wurde oben mit Hilfe der allgemeinen Kraftlinientheorie gemacht. Früher pflegte man die Angelegenheit durch Rechnung zu erledigen. Da man dadurch einen neuen Einblick in die Theorie erhält, der auch solchen, die das vorher Besprochene nicht absolviert haben, ein bequemes Eindringen gestattet, und der ferner etwaige Zweifel beseitigen wird, so soll auch der Rechnungsweg angegeben werden. Einige dabei auftretende Wiederholungen möge man damit entschuldigen, daſs auch dieses Kapitel in sich abgerundet sein möchte.

Die physikalische Bedeutung des Kapitels liegt nicht nur in den jetzt zu behandelnden stationären Strömungen der Wärme und Elektrizität in ebenen Platten, oder etwa nur in den entsprechenden Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit und der damit zusammenhängenden Theorie der freien Ausfluſsstrahlen im zweidimensionalen Gebiete, sondern auch in den elektromagnetischen Wirkungen geradliniger Ströme in beliebig gestalteten und gelagerten Drähten (Theorie der aus zahlreichen Drähten zusammengesetzten Kabel für elektrisches Licht und Telegraphie) und der damit zusammenhängenden Wirbelbewegungen. Dazu treten aber noch kartographische und hodographische Deutungen und Anwendungen auf Kinematik, Elastizitäts- und Kapillaritätslehre, gewisse Fouriersche Wärmeprobleme und die Grundlagen der Forchheimerschen Theorie der Grundwasserbewegungen. Da die Funktionentheorie selbst das gröſste Interesse an dem Ausbau dieses Gebietes hatte, sind hier weit schnellere Fortschritte gemacht worden, als in dem von drei Dimensionen. Die Attraktionskonstante wird im folgenden stillschweigend gleich 1 gesetzt.

152) **Aufgabe.** Wie stark zieht ein homogener Kreisbogen den zugehörigen Kreismittelpunkt an?

Fig. 115.



Auflösung. Ist auf jeder Längeneinheit des Bogens die Masse 1 angebracht, ebenso auch in M, so zieht das Teilchen l den Mittelpunkt mit der Kraft $\frac{l}{r^2}$ an, von der man, da die Resultante durch den Halbierungspunkt C des Bogens geht, nur die Komponente $\frac{l}{r^2}\cos\vartheta$ braucht. Nun ist aber in Fig. 115 $l\cos\vartheta = l_1$, d. h. gleich der Projektion des Bogens l auf die Sehne AB, denn $\sphericalangle\,\vartheta_1 = \sphericalangle\,\vartheta$. Verlegt man nach C die Masse $l_2 = l_1 = l\cos\vartheta$, so zieht l_2 den Punkt M ebenso an, wie die wirksame Komponente von l. Dies gilt von jedem Teilchen. Folglich:

Die Anziehung des Kreisbogens $\widehat{AB}$ ist ebenso grofs, als die der nach C verlegten Masse der Sehne AB.

Diese Sehne hat die Länge $2r\sin\frac{\alpha}{2}$, ihre Anziehung ist, wenn sie in C koncentriert gedacht wird, gleich $\frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}}{r^2}$ oder $\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{r}$, d. h. proportional dem Sinus des halben Centriwinkels (oder des zugehörigen Peripheriewinkels) und umgekehrt proportional dem Kreisradius.

Für den Halbkreis z. B. handelt es sich um

$$\frac{2\sin 90^0}{r} = \frac{2}{r},$$

für den ganzen Kreis um

$$\frac{2\sin 180^0}{r} = 0,$$

für den Viertelkreis um

$$\frac{2\sin 45^0}{r} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{\sqrt{2}}{r},$$

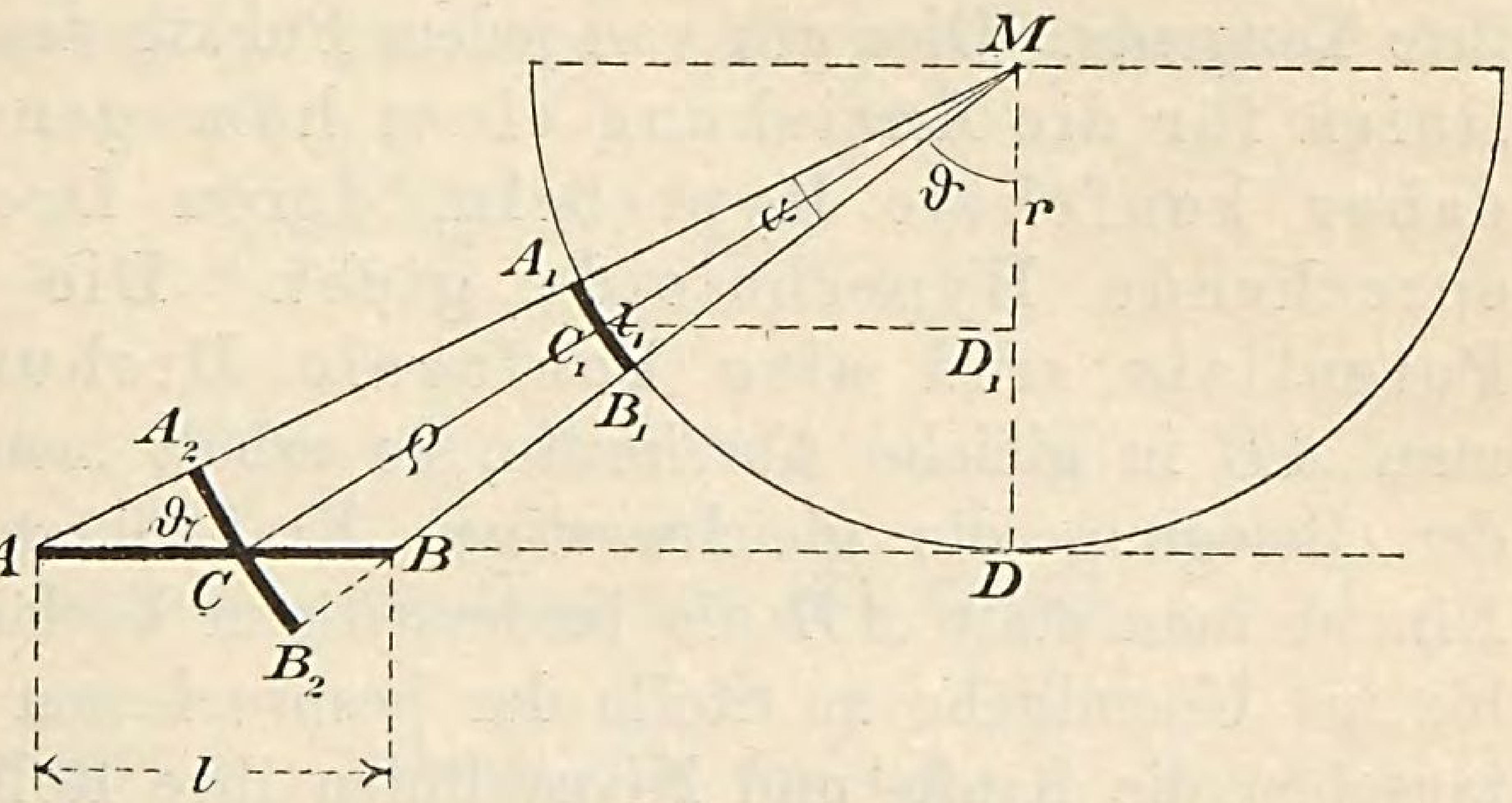
für den sechsten Teil der Kreislinie um

$$\frac{2\sin 30^0}{r} = \frac{1}{r}.$$

153) **Aufgabe.** Wie stark zieht eine homogene unbegrenzte Gerade einen in der Entfernung r befindlichen Punkt an?

Auflösung. Ist M der freie Punkt, so schlage man um ihn den die Gerade in D berührenden Halbkreis und denke sich auf jeder Längeneinheit wieder die Masse 1 angebracht. Das kleine Massenteilchen $AB = l$ zieht den Punkt mit der Kraft $\frac{l}{\varrho^2}$ an, wenn $\varrho = MC$ ist. Seine Projektion auf den durch C gelegten koncentrischen Kreis ist $A_2 B_2 = l \cos \vartheta$.

Fig. 116.



Diese wirkt auf M mit der Kraft $\frac{l \cos \vartheta}{\varrho^2}$. Die Projektion auf den Halbkreis ist

$$l_1 = A_1 B_1 = A_2 B_2 \cdot \frac{r}{\varrho} = (l \cos \vartheta) \cdot \cos \vartheta = l \cos^2 \vartheta = l \frac{r^2}{\varrho^2}.$$

Ihre Anziehung auf M ist

$$l \frac{r^2}{\varrho^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{l^2}{\varrho^2},$$

d. h. ebenso grofs, wie die von $l = AB$ ausgeübte. Dies gilt von jedem Teilchen der Geraden. Folglich:

Die unbegrenzte Gerade zieht den Punkt M mit derselben Kraft an, wie der berührende Halbkreis, d. h. mit der Kraft $\frac{2}{r}$. Die Anziehung ist also umgekehrt proportional der Entfernung r.

Setzt man die Dichte δ der Belegung gleich $\frac{1}{2}$, so ist die Anziehung gleich $\frac{1}{r}$. Der Faktor 2 ist also ganz unwesentlich.

154) [Niveauflächen und Kraftlinien der endlichen und homogenen Geraden. Aufserhalb des Ganges der Untersuchung kann man hier interessante Bemerkungen anknüpfen. Die Gerade AB zieht den Punkt M an mit der Kraft

$$\frac{l}{\varrho^2} - \left(\frac{l r^2}{\varrho^2}\right) \frac{1}{r^2} = \frac{A_1 B_1}{r^2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{r},$$

d. h. mit einer Kraft, die proportional dem Sinus des halben Gesichtswinkels α und umgekehrt proportional der Entfernung r von der Richtungslinie der Strecke ist. Weil jedes Teilchen von AB gleich seinem

Projektionsteilchen auf A_1B_1 ist, so fällt die Resultante MC in die Linie MC_1, d. h. sie halbiert den Winkel und C teilt die Strecke AB im Verhältnis der Geraden AM und BM. Denkt man sich durch M eine Hyperbel mit den Brennpunkten A und B gelegt, so ist CM ihre Tangente. Dies gilt von jedem Punkte des Raumes. Die Kraftlinien für die Anziehung einer homogenen Strecke AB sind daher konfokale Hyperbeln, deren Drehung um AB entsprechende Hyperboloide giebt. Die Niveauflächen des Potentials sind also konfokale Drehungsellipsoide. Teilt man AB in gleiche Abschnitte, so erhält man wegen der Gleichheit der Belegung die gleichwertigen Kraftröhren dieses Problems. — Nimmt man statt AB die beiderseitigen Verlängerungen der Geraden bis ins Unendliche an Stelle der besprochenen Geraden selbt, so vertauschen die Kraft- und Niveaulinien ihre Rolle. Ist die Gerade nur einseitig begrenzt, so handelt es sich um zwei Orthogonalscharen konfokaler Parabeln, bezw. um die entsprechenden Paraboloide. Man könnte also schon an dieser Stelle den Übergang zu den elliptischen und parabolischen Koordinaten im Raume machen.

Man verwechsle aber das Problem der homogenen Geraden nicht mit dem der elektrischen Ladung einer Geraden, die unter keinen Umständen homogen wird, sondern infolge der gegenseitigen Abstoſsungen eine Anhäufung nach den Endpunkten hin giebt. Auf diesen Punkt kommen wir noch zurück.]

155) Das Arbeitsdiagramm für die unbegrenzte Gerade und das logarithmische Potential. Man wiederhole an dieser Stelle das, was in Nr. 112 über die gleichseitige Hyperbel als Arbeitsdiagramm für die Entfernung eines Punktes von der homogenen, unbegrenzten Geraden und über die Berechnung des Flächeninhalts mit Hilfe des natürlichen Logarithmus, ebenso das, was über die Zellenverteilung des Raumes mit Hilfe koncentrischer Cylinder gesagt ist. Auch das in Nr. 113 über das logarithmische Potential

$$m_1 \lg r_1 + m_2 \lg r_1 + \cdots + m_n \lg r_n$$

beliebig verteilter Massenpunkte in der Ebene soll jetzt nicht noch einmal dargestellt werden.

156) **Aufgabe.** Mit welcher Kraft zieht die unbegrenzte Ebene einen in der Entfernung r befindlichen Punkt an?

Auflösung. Man denke sich Fig. 116 um den Radius MD ein wenig gedreht, so daſs l ein kleines „Rechteck" $f = bl$, l_1 ein kleines Rechteck $f_1 = b_1 l_1$ giebt, wobei

$$\frac{b_1}{b} = \frac{C_1 D_1}{CD} = \frac{r}{\varrho}$$

ist. Während bei der dortigen Aufgabe $\frac{l}{\varrho^2} = \frac{l_1}{r^2}$ war, ist jetzt bei homogener Flächenbelegung ein Faktor $\frac{b}{b_1}$ oder $\frac{\varrho}{r}$ beizufügen, so dafs

$$\frac{bl}{\varrho^2} = \frac{b_1 l_1}{r^2} \cdot \frac{\varrho}{r}$$

oder

$$\frac{f}{\varrho^2} = \frac{f_1}{r^2} \cdot \frac{\varrho}{r}$$

wird. Die senkrechte Anziehungskomponente der Fläche f wird

$$\frac{f}{\varrho^2} \cdot \cos\vartheta = \frac{f}{\varrho^2} \cdot \frac{r}{\varrho} = \frac{f_1 \varrho}{r^3} \frac{r}{\varrho} = \frac{f_1}{r^2},$$

d. h. die Anziehung des Flächenteilchens f ist ebenso grofs, wie die des nach D versetzten Flächenteilchens f_1.

Dies gilt von jedem Teilchen der Grundfläche; die unbegrenzte homogene Ebene zieht also den Punkt M so an, als ob die homogene Belegung der Halbkugel in D koncentriert wäre. Die Massenbelegung der Halbkugel ist aber gleich $2 r^2 \pi$. Diese in D koncentrierte Masse übt auf die in M befindliche Einheit die Anziehung

$$\frac{2 r^2 \pi}{r^2} = 2\pi$$

aus, was von r unabhängig ist. Folglich:

Die mit der Dichte 1 homogen belegte unbegrenzte Ebene zieht die irgendwo im Raume befindliche Masseneinheit mit der konstanten Kraft 2π an.

157) Man wiederhole jetzt was in Nr. 114 über das sogenannte Planpotential und das Rechteck als Arbeitsdiagramm gesagt ist, ebenso die Bemerkungen in Nr. 114 und 104 über die Einteilung des Raums in Würfel durch zwei Scharen von Parallelebenen.

Es handelt sich dabei um das sogenannte homogene Feld. Jede kleine Raumzelle bei anderen Kraftlinien und Niveauflächen kann angenähert als homogenes Feld betrachtet werden. Dies gilt z. B. auch von der Anziehung der Erde in unmittelbarer Nähe ihrer Oberfläche, wo man sogar auf gröfsere Strecken hin die Kraftlinien der Schwere als Parallele betrachten darf. Man darf also hier an Stelle des Newtonschen Potentials das Planpotential setzen. Dies soll zunächst in Bezug auf die stationäre Strömung in einem Flusse geschehen.

158) Stationäre Strömung eines geradlinigen Flusses von konstantem Querschnitt. Ist die Neigung einer schiefen Ebene die durch den sogenannten Reibungswinkel bestimmte, so wird ein auf ihr liegender Körper, der einen Stofs nach unten erhalten hat, sich ohne Beschleunigung, und wenn der Luftwiderstand gleich Null ist, auch ohne Verlangsamung, d. h. mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Arbeit der Schwerkraft ist dabei gleich ph, wenn p das Gewicht des Körpers, h der Höhenunterschied ist. Das Arbeitsdiagramm ist also ein Rechteck. Die Geschwindigkeit hängt nur von der Stofskraft ab, nicht von der Steilheit der Ebene, die sich bekanntlich aus $\tan\alpha = \mu$ bestimmt, wo μ der Reibungskoeffizient ist.

Man denke sich an Stelle des festen Körpers eine stationär strömende Flüssigkeit, also einen geradlinigen Strom von konstantem rechteckigen Querschnitte. Die schwache Neigung der Ebene, auf der er herabfliefst, soll ebenfalls konstant sein. Die kleine Geschwindigkeit ist dann ebenfalls konstant. Dabei soll von den durch Reibung an den Wänden hervorgerufenen Drehungen der Moleküle, die durch Reibung Störungen in den Bewegungen der Nachbarmoleküle hervorrufen, abgesehen werden. Die Bewegung sämtlicher Teilchen soll also geradlinig und mit derselben Geschwindigkeit erfolgen.

Während nun bei dem vorigen Beispiele die Geschwindigkeit durch die Kraft des Anstofses bestimmt war, nicht aber von der Neigung der schiefen Ebene, hängt sie hier wesentlich von der letzteren und von der Beschaffenheit des Flufsbettes ab. Die Arbeit der Schwerkraft wird durch die Überwindung der Bewegungshindernisse gerade erschöpft, sonst würde die Bewegung nicht konstant sein. Die Widerstandsverhältnisse geben einen konstanten Widerstandsfaktor $\varkappa$ für die Geschwindigkeit. Für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Neigung lassen sich verschiedene Hypothesen aufstellen. Für die hier beabsichtigten Zwecke wird angenommen, die Horizontalprojektion der Geschwindigkeit sei proportional der Tangente der Neigung. Bezeichnet man diese Projektion der Geschwindigkeit mit v, so hat man die Formel $v = \varkappa_1 \tan\alpha$. Nun ist aber

$$\tan\alpha = \frac{h_1 - h_2}{w},$$

wo w der Horizontalweg, $h_1 - h_2$ die Höhendifferenz für die Endpunkte ist, demnach ist

$$v = \varkappa_1 \frac{h_1 - h_2}{w}.$$

Den Ausdruck für $\tan\alpha$ bezeichnet man allgemein als das Gefälle oder das Gefällverhältnis. Nun ist aber nach obigem die Arbeit der

Schwerkraft proportional der Höhendifferenz, also ist auch das Potential proportional dieser Differenz, z. B. Potentialdifferenz gleich $\varkappa_2(h_1 - h_2)$. Demnach ist

$$v = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \frac{\text{Potentialdifferenz}}{w},$$

also, wenn man $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \varkappa$ setzt,

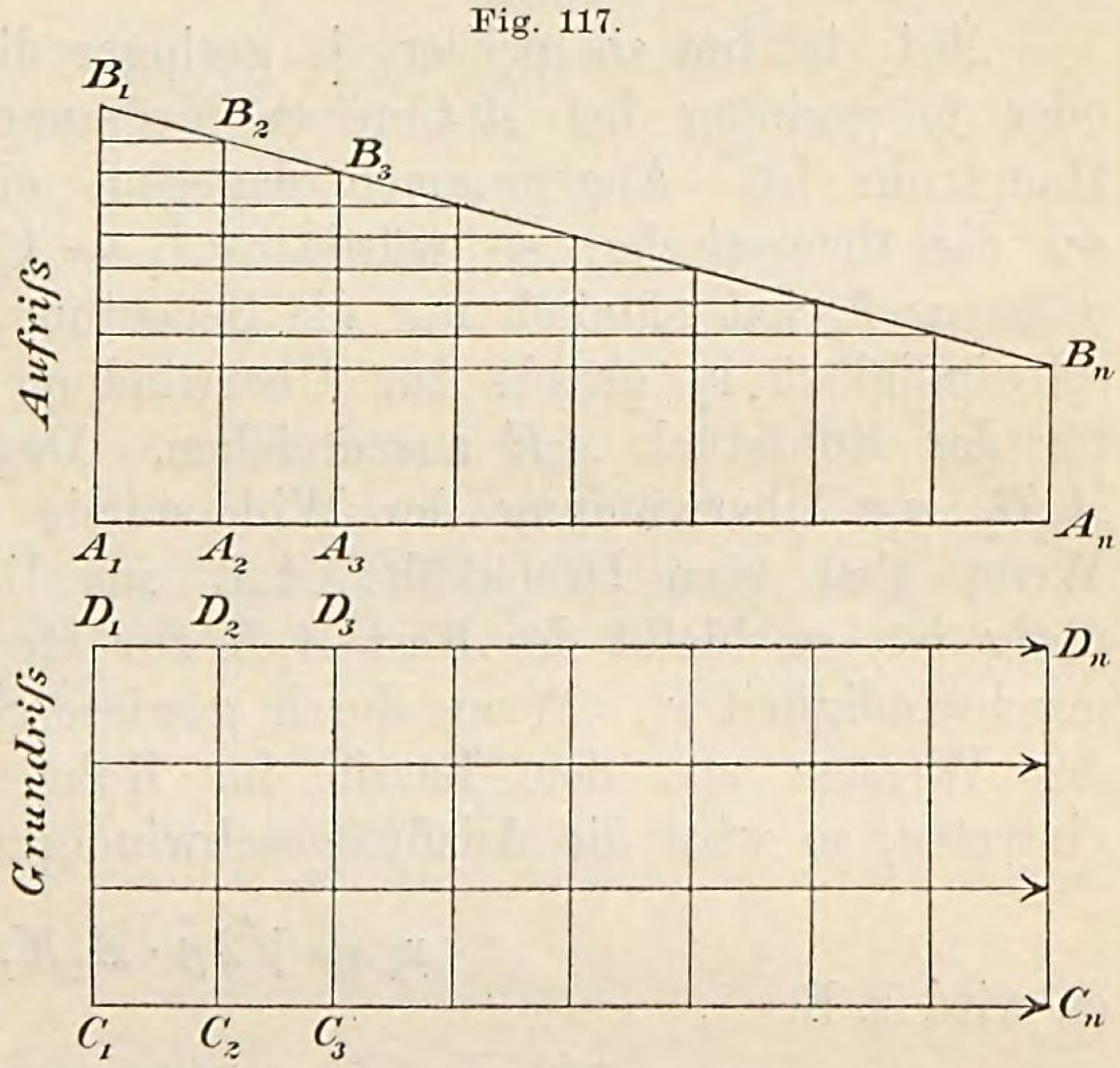
$$v = \varkappa \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Horizontalweg}}.$$

Die sekundlich durch jeden Querschnitt passierende Flüssigkeitsmenge ist also

$$m = vF = \varkappa F \frac{V_1 - V_2}{w} = \varkappa F \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Horizontalweg}}.$$

In Figur 117 sind diese Verhältnisse dargestellt. Man hat so ein Analogon für die Wärmeströmung in einem ebenen Parallelstreifen und für die Elektrizitätsströmung in einem solchen nach dem Ohmschen Gesetze.

Fig. 117.

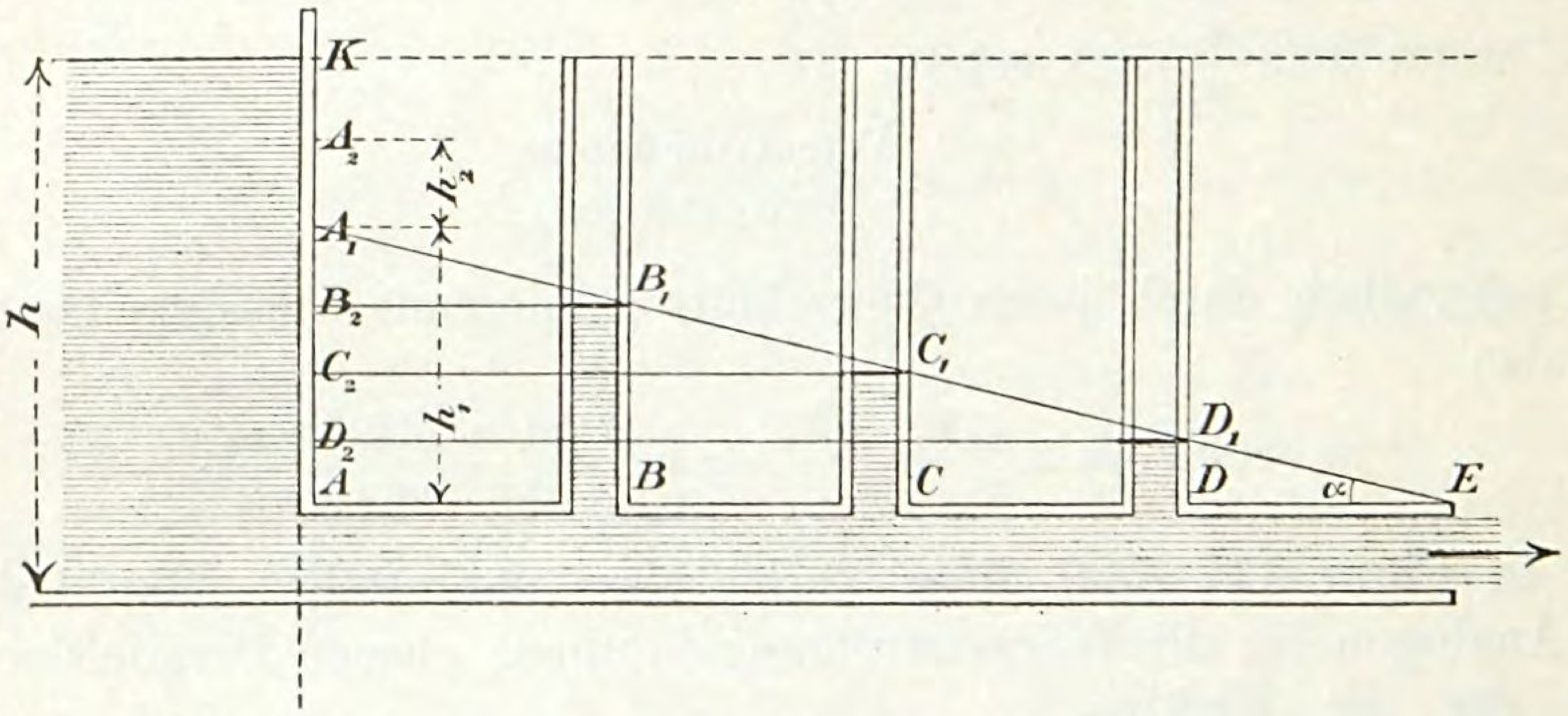


Bei senkrechtem Falle wird das Beispiel illusorisch, da dann $\frac{V_1 - V_2}{w}$ unendlich grofs, die Projektion der Geschwindigkeit aber gleich Null wird. Zwar kann der Widerstand so grofs gemacht werden, wie die Schwerkraft selbst, so dafs die Geschwindigkeit irgend einen konstanten Wert erhält, aber mit der Formel selbst läfst nichts mehr anfangen. Praktisch hat sich also diese Analogie in bestimmten Grenzen zu halten, sie gilt nur für kleine Geschwindigkeiten und geringe Neigungen.

159) Druckhöhe in Wasserleitungsröhren von konstantem Querschnitt. Man denke sich ein Wasserbassin, von dessen Grunde ein horizontales Leitungsrohr ausgeht. Bei F ströme das Wasser mit beliebiger Geschwindigkeit v_1, die kleiner als die theoretische Ausflufsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ sei, aus.

Bringt man zur Messung des Druckes, unter dem das Rohr an verschiedenen Stellen steht, senkrechte offene Röhren an, so zeigt sich, dafs die Wasserstände nach einer geraden Linie $A_1 E$ abnehmen.

Fig. 118.



AA_1 ist um so gröfser, je geringer die Ausflufsgeschwindigkeit, oder je geringer bei stationärer Strömung die Geschwindigkeit im Hauptrohr ist. Angenommen dagegen, die Ausflufsgeschwindigkeit sei die theoretische, so würde $AA_1 = h_1 = 0$ sein. Die Druckdifferenz h_1 hat nämlich nur die Bedeutung, bei der vorliegenden Geschwindigkeit v_1 gerade zur Überwindung der Reibungswiderstände für das Rohrstück AE auszureichen. Dagegen reicht die Differenz $A_1 B_2$ zur Überwindung der Widerstände für die Strecke AB aus. Wenn aber eine Druckhöhe AA_1 zur Überwindung der Reibung nötig ist, so bleibt der Rest $A_1 K$ zur Hervorbringung der Ausflufsgeschwindigkeit v_1. Wenn durch gewisse Störungen beim Übergange des Wassers aus dem Bassin ins Rohr noch besondere Verluste eintreten, so wird die Ausflufsgeschwindigkeit noch kleiner als

$$v_1 = \sqrt{2g \cdot A_1 K},$$

es wird z. B.

$$v_1 = \sqrt{2g \cdot A_2 K} = \sqrt{2g \cdot (h - h_1 - h_2)}.$$

[Die Gleichung der Geraden $A_1 F$ ist von der Form

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{h_1} = 1$$

oder

$$y = h_1 - x\frac{h_1}{l} = h_1 - x \tan\alpha$$

Hier ist nach der letzten Formel (für v_1)

$$h_1 = h - h_2 - \frac{v_1^2}{2g}$$

zu setzen. Man findet übrigens v_1 und h_1 durch Beobachtung, A_2K durch Berechnung aus $v_1 = \sqrt{2gA_2K}$, so daſs h_2 durch eine Subtraktion gefunden wird. Vgl. dazu Weisbach Ing. Mechanik u. s. w.]

Für unsere Zwecke reicht es aus, sich mit dem Diagramm AFA_1 zu beschäftigen. Die Druckdifferenzen entsprechen bestimmten Widerstandsarbeiten, sie veranschaulichen also Potentialdifferenzen.

Ganz ebenso sieht das Diagramm für die Potentialdifferenzen bei der elektrischen Strömung in einem homogenen Drahte aus, die bekanntlich dem Ohmschen Gesetze gehorcht. Auch dort werden die Potentialdifferenzen nur dazu verwandt, die Widerstände zu überwinden. Die Geschwindigkeiten werden dadurch nicht beeinfluſst. Man vgl. dazu das in Nr. 54 Gesagte. Die Potentialdifferenzen sind hier proportional den Weglängen.

Ebenso ist es mit der Fortbewegung der Wärme in einer dünnen Platte von der Gestalt eines Parallelstreifens, dessen eines Ende auf der konstanten Temperatur t_1 gehalten wird, während das andere auf der niedrigeren t_n steht. Die Lote entsprechen den Temperaturen. Dasselbe gilt von der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem Kanale von überall konstantem rechteckigen Querschnitt und dem zugehörigen Geschwindigkeitspotential. Maſsgebend ist für die passierende Menge überall der Ausdruck

$$\lambda F \frac{V_2 - V_1}{w} = \lambda F G = \lambda F \tan\alpha,$$

wo λ der Leitungs- oder Widerstandsfaktor, F der Querschnitt, w die Weglänge, $V_2 - V_1$ die Potentialdifferenz, G das Potentialgefälle ist. Die Geschwindigkeit selbst ist

$$v = \lambda \frac{V_2 - V_1}{w} = \lambda G = \lambda \tan\alpha,$$

während beim Newtonschen Anziehungsgesetz die Kraft

$$p = \varkappa \frac{V_2 - V_1}{w} = \varkappa G$$

war.

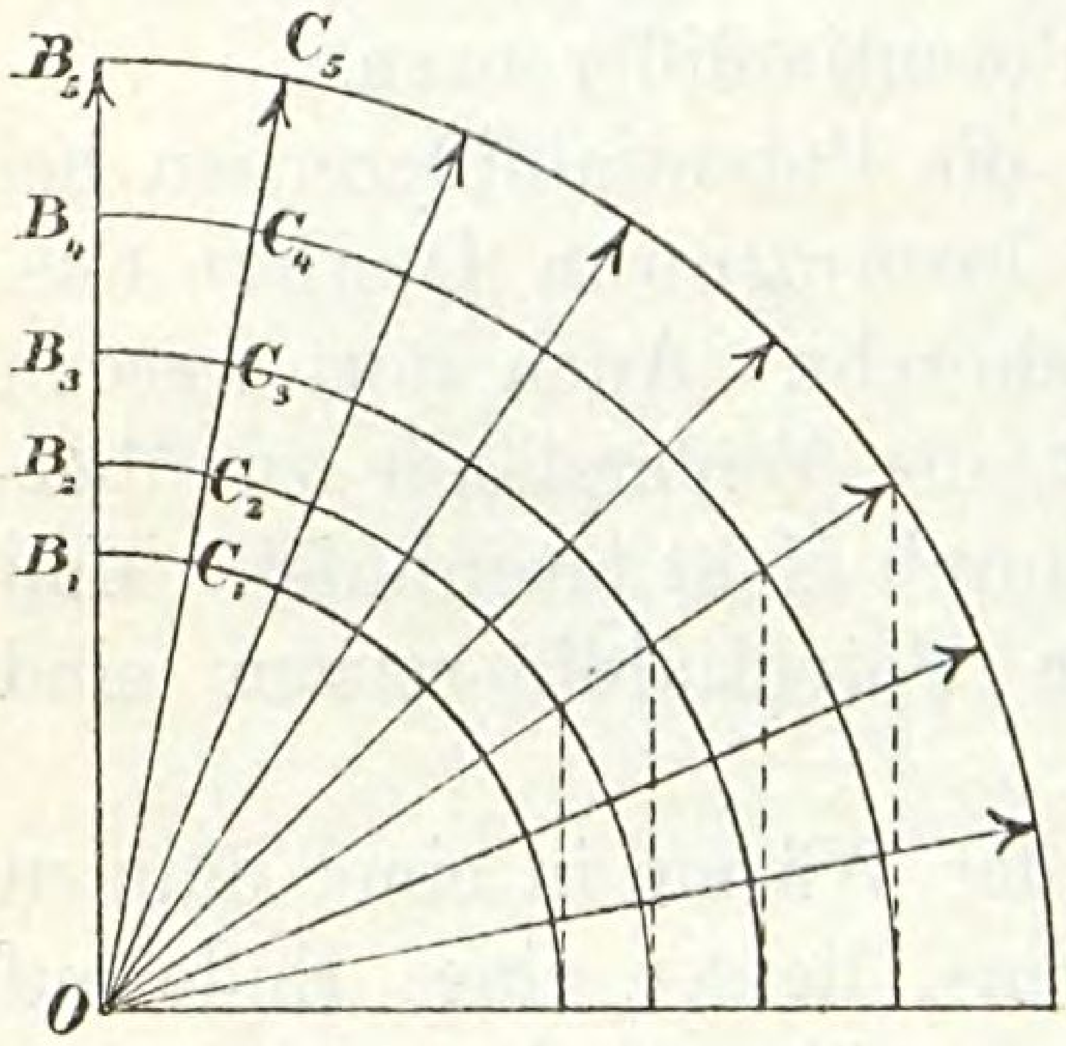
160) Ausdehnung der Analogien auf die Radialströmung in ebenen Platten.

Die Strömung erfolge jetzt in einer dünnen, überall gleich starken ebenen Platte, entweder von O aus nach allen Seiten hin, oder innerhalb eines Sektors OB_5C_5. Soll die Strömung stationär sein, so muſs durch die Bogen B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, ... u. s. w. dieselbe Menge passieren, d. h. die Geschwindigkeit muſs umgekehrt proportional dem Radius r sein, d. h. es ist

$$v_1 : v_n = r_n : r_1 = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n},$$

oder, da die Geschwindigkeit proportional dem Gefälle $\tan\alpha$ angenommen wird (Nr. 155),

Fig. 119.



$$\tan\alpha_1 : \tan\alpha_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n}.$$

Das veränderliche Gefälle läfst sich also in der Form

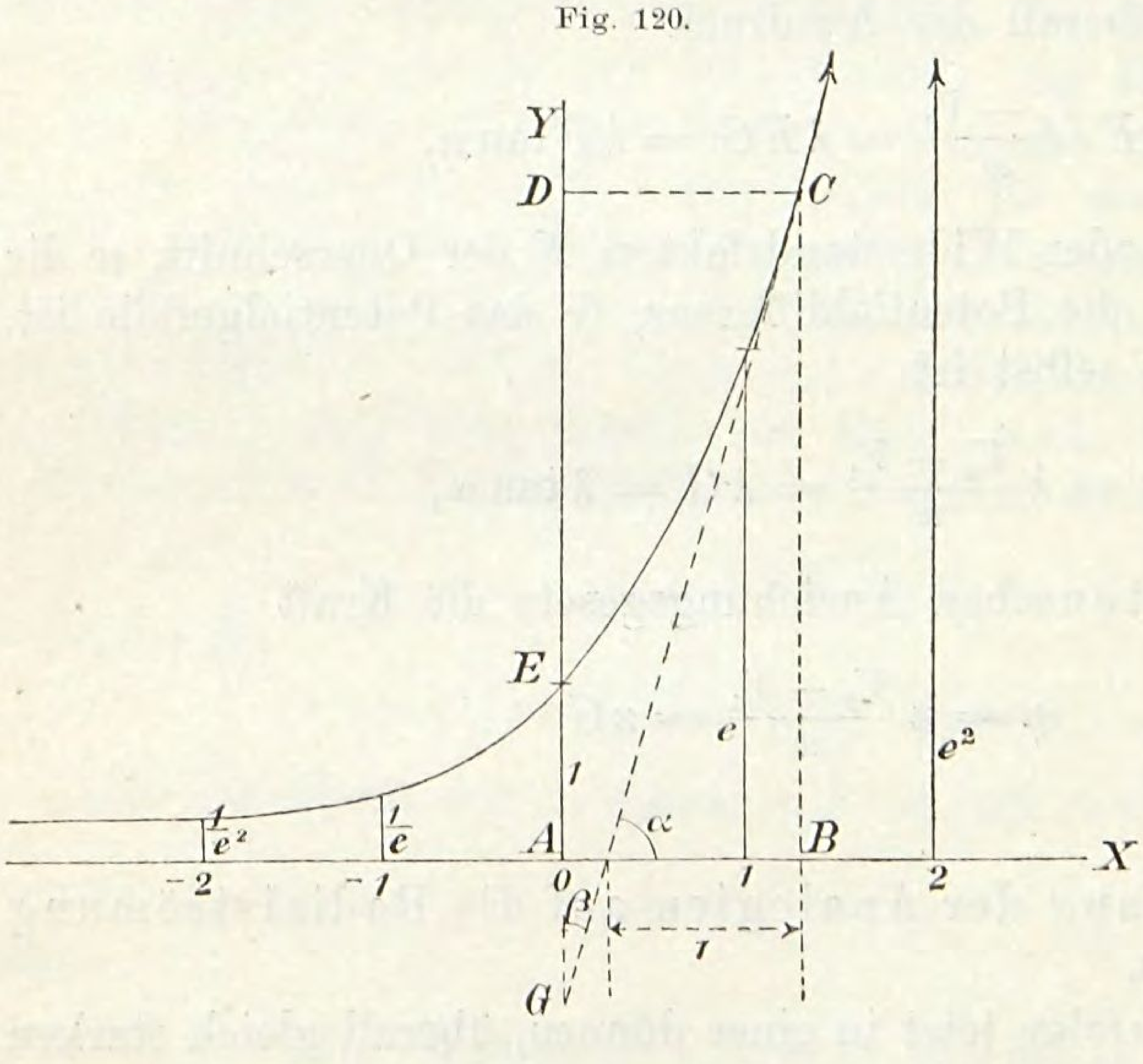
$$\tan\vartheta = c \cdot \frac{1}{r}$$

schreiben, oder, wenn man für ϑ den Supplementwinkel φ und $c = 1$ setzt,

$$\tan\varphi = -\frac{1}{r}.$$

Da man nach Nr. 112 auf das logarithmische Potential kommen mufs, steht zu vermuten, dafs diese Gleichung die einer logarithmischen Linie ist. Die Gleichung der letzteren in gewöhnlicher Lage ist $y = e^x$. Nach Ing.-Math. I Seite 150 ist in Fig. 120

Fig. 120.



$$\tan\alpha = \frac{BC}{1} \quad \text{oder}$$

$$\tan\alpha = e^x = y,$$

folglich

$$\tan\beta = \frac{1}{y}.$$

Betrachtet man also die positive Y-Achse als positive X-Achse, so ist die Gleichung der aufsteigenden logarithmischen Linie durch

$$\tan\beta = \frac{1}{x}$$

charakterisiert, die der absteigenden durch

$$\tan\varphi = -\frac{1}{x},$$

oder, wie oben des radialen Charakters wegen geschrieben ist, durch

$$\tan \varphi = -\frac{1}{r}.$$

Die Gleichung läfst sich auch schreiben $r = e^{-y}$, oder $\frac{1}{r} = e^{y}$, oder endlich

$$y = -\overset{e}{\lg}\, r.$$

Die Höhe y hat wiederum die Bedeutung eines Potentials. Verschiebung und Vergröfserung verwandeln die Gleichung in

$$y = a - c \lg r.$$

Behält man die bei den oben angegebenen Analogien festgestellten Annahmen bei, so ergiebt sich folgendes:

Erweitert sich das Bett eines Flusses nach Art eines Kreissektors und soll seine Tiefe bei stationärer Strömung trotzdem überall gleich grofs bleiben, so mufs, da die Horizontalprojektion der Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Radius ist, das Gefälle nach dem Gesetz einer logarithmischen Linie abnehmen, deren Gleichung durch

$$y = a - c \overset{e}{\lg}\, r$$

dargestellt wird.

Erweitert sich ebenso fächerförmig das horizontale Ableitungsrohr einer Wasserleitung bei überall gleicher Höhe, so werden die Wasserstandhöhen in den Druckröhren nach demselben Gesetz abnehmen.

Dasselbe gilt von den Werten des elektrischen Potentials für den Fall, dafs in einem Punkte (kleinem Kreise) in eine Platte Elektrizität eingeführt und an dem durch einen koncentrischen Kreis gebildeten Rande abgeleitet wird.

Dasselbe gilt von der ebenso eingeleiteten und abgeleiteten Wärme und den entsprechenden Temperaturen.

Weil das Gesetz ein logarithmisches ist, so gehören zu gleichen Potentialdifferenzen nicht etwa gleiche Wege, sondern einer arithmetischen Reihe von Potentialen entspricht eine geometrische Reihe von Abständen, und zwar nimmt die eine ab, wenn die andere zunimmt.

Kennt man demnach zwei Punkte der Kurve, so kann man beliebig viele Punkte elementar konstruieren.

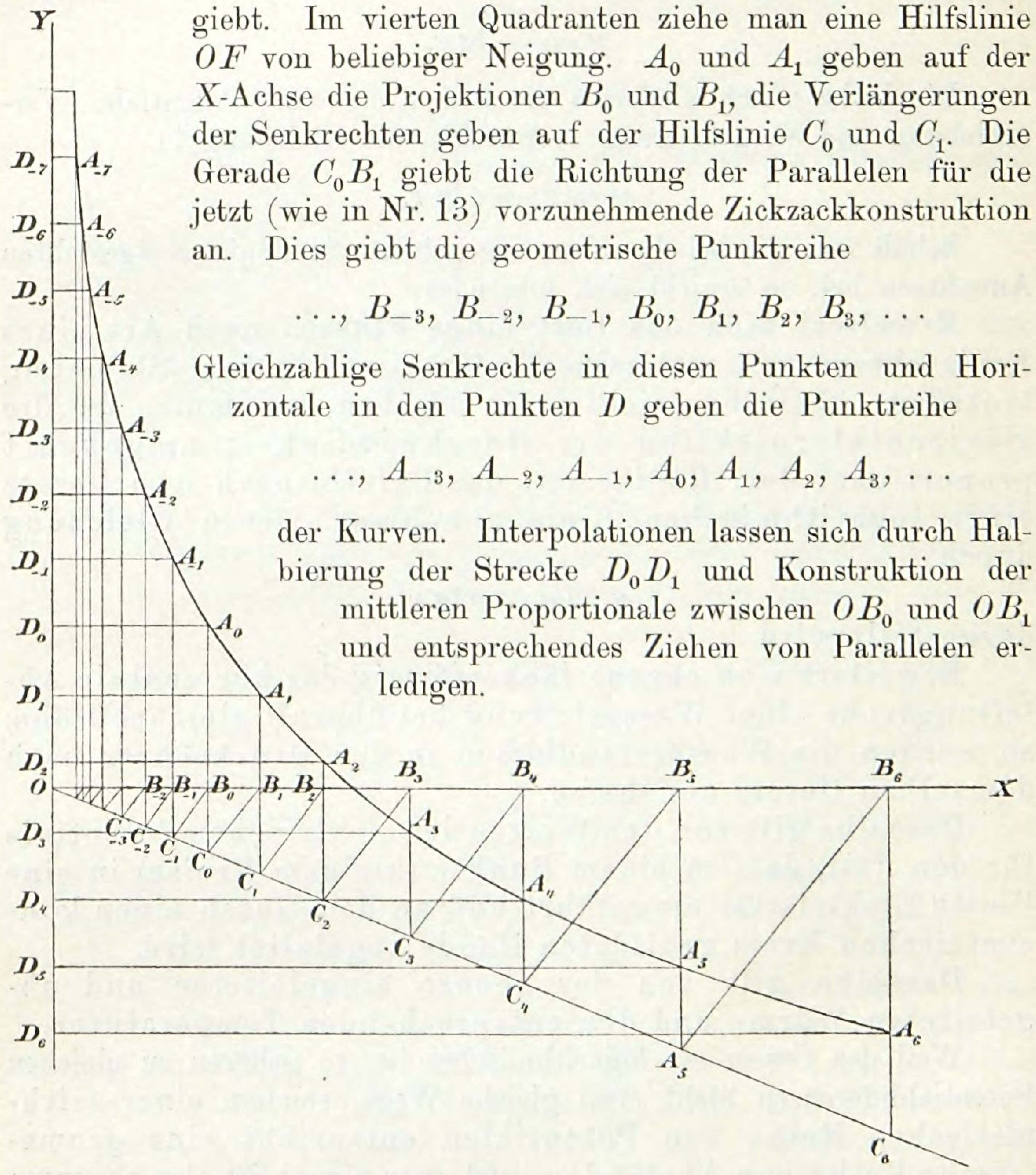
161) Konstruktion der Potentialkurve für radiale Strömung aus zwei Punkten.

Auflösung. A_0 und A_1 seien die gegebenen Punkte. Man projiziere beide auf die Y-Achse, was D_0 und D_1 giebt. Den Abstand $D_0 D_1$

trage man nach oben und unten beliebig oft ab, was eine arithmetische Punktreihe

$$-\ldots, D_{-3}, D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1, D_2, D_3, \ldots$$

Fig. 121.



giebt. Im vierten Quadranten ziehe man eine Hilfslinie OF von beliebiger Neigung. A_0 und A_1 geben auf der X-Achse die Projektionen B_0 und B_1, die Verlängerungen der Senkrechten geben auf der Hilfslinie C_0 und C_1. Die Gerade C_0B_1 giebt die Richtung der Parallelen für die jetzt (wie in Nr. 13) vorzunehmende Zickzackkonstruktion an. Dies giebt die geometrische Punktreihe

$$\ldots, B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$$

Gleichzahlige Senkrechte in diesen Punkten und Horizontale in den Punkten D geben die Punktreihe

$$\ldots, A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$$

der Kurven. Interpolationen lassen sich durch Halbierung der Strecke D_0D_1 und Konstruktion der mittleren Proportionale zwischen OB_0 und OB_1 und entsprechendes Ziehen von Parallelen erledigen.

Die Gleichung der Kurve mufs nach obigem von der Form

$$y = a - b \lg r \qquad (1)$$

sein. Nun war gegeben

$$y_0 = B_0A_0, \; y_1 = B_1A_1, \; r_0 = D_0A_0, \; r_1 = D_1A_1.$$

Die Konstanten a und b sind also zu bestimmen aus

$$y_0 = a - b \lg r_0$$
$$y_1 = a - b \lg r_1.$$

Durch Subtraktion folgt

$$y_0 - y_1 = - b (\lg r_0 - \lg r_1),$$

es ist also

$$b = - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1},$$

demnach

$$a = y_0 + b \lg r_0 = y_0 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \cdot \lg r_0 = y_1 + b \lg r_1$$
$$= y_1 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \lg r_1.$$

Dadurch ist die Gleichung 1) fest bestimmt. Sie lautet

2) $$y = \left(y_0 - \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \cdot \lg r_0\right) + \frac{y_0 - y_1}{\lg r_0 - \lg r_1} \lg r.$$

Statt y_0 und y_1 hat man beim Wärmeproblem die gegebenen Temperaturen T_0 und T_1 für Anfang und Ende einzusetzen. Die Temperatur für jede zwischen liegende Stelle ergiebt sich dann aus Gleichung 2). Dasselbe gilt von den Potentialwerten V_0 und V_1 für elektrische Strömung.

Das Gefälle an jeder Stelle ergiebt sich aus

$$G = - \frac{T_\alpha - T_\beta}{r_\alpha - r_\beta} = - \frac{(a - b \lg r_\alpha) - (a - b \lg r_\beta)}{r_\alpha - r_\beta} = b \frac{\lg r_\alpha - \lg r_\beta}{r_\alpha - r_\beta},$$

wo r_α und r_β benachbarte Werte sind, oder für die Grenze aus

$$G = b \frac{1}{r}.$$

Die durch die Querschnittseinheit sekundlich passierende Wärme ist also

$$W = \varkappa \cdot b \frac{1}{r},$$

wo $\varkappa$ der Leitungskoeffizient ist. Bei Metalldicke d geht durch jeden Kreis (vom Radius r) die konstante Menge

$$W = 2 r \pi d \varkappa b \cdot \frac{1}{r} = 2 \pi d \varkappa b.$$

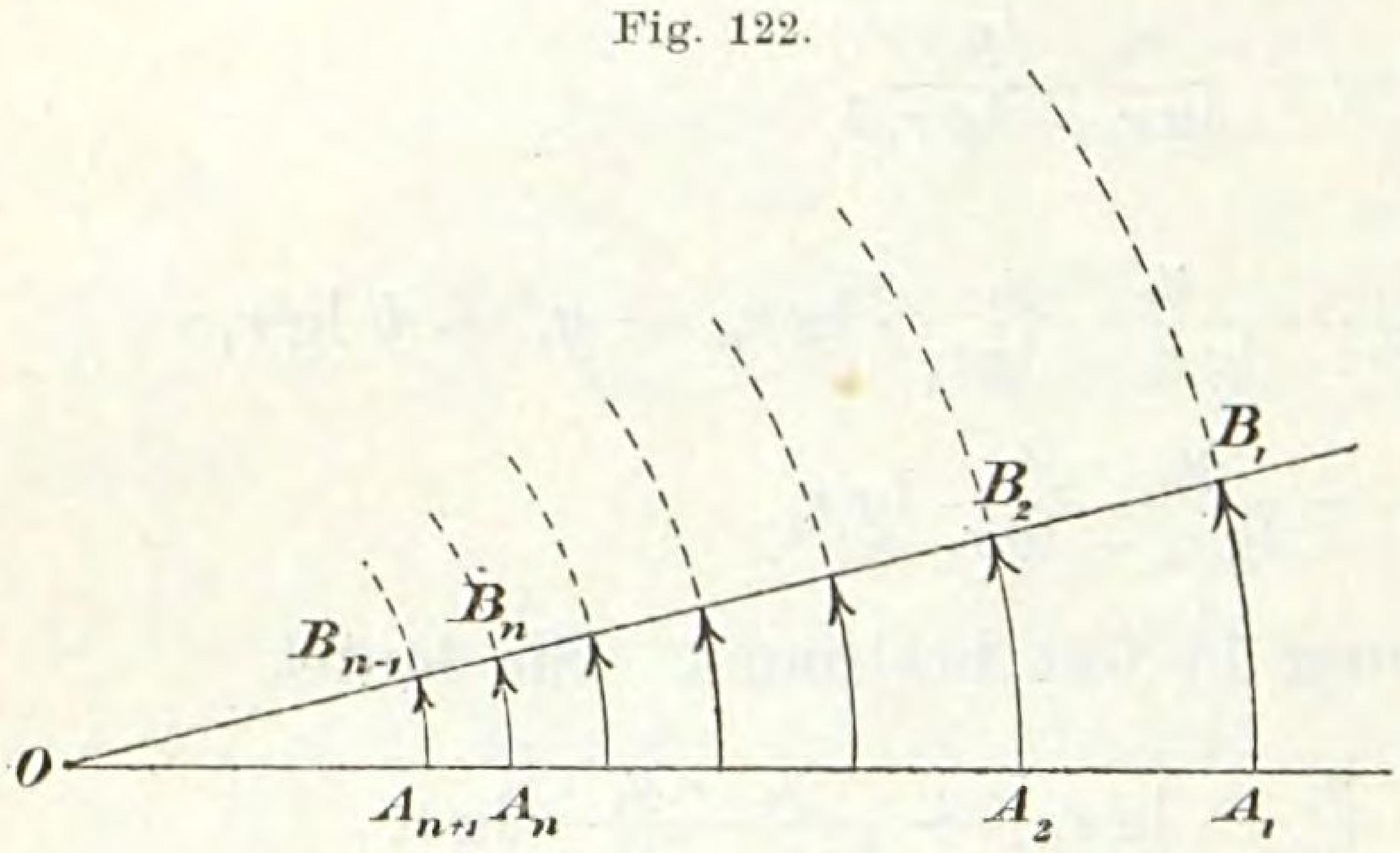
Dasselbe gilt von entsprechenden elektrischen Mengen E, nur ist dabei die Dicke der Platte als sehr klein anzunehmen. Hat man die Ebene in n Sektoren eingeteilt, so wandert durch jeden Sektorenquerschnitt, d. h. durch jede Quadratseite, die Wärmemenge

$$W = \frac{2\pi}{n} d \varkappa b.$$

Schon in Fig. 86b war die Einteilung der Ebene in potentiell gleichwertige Zellen, d. h. in Quadrate gegeben.

162) **Das Vertauschungsproblem der Radialströmung.** Für das spätere ist folgende Bemerkung von besonderer Wichtigkeit. Bei der Einteilung der Ebene in gleiche Quadrate ist es gleichgültig, welche der beiden Parallelenscharen man als Stromlinien, welche man als Niveaulinien betrachte. Da man nun hier jedes kleine quadratische Flächenstück als wirkliches Quadrat betrachten kann, so muſs es gestattet sein, die Kreise als Stromlinien, die Geraden durch O als Niveaulinien zu betrachten.

Fig. 122.



Denkt man sich z. B. bei kreisförmiger Platte den Radius OA_1 auf der Temperatur T_a, den Radius OB_1 auf der Temperatur T_b gehalten, so erhält aus Symmetriegründen die Winkelhalbierende die Temperatur $\frac{T_a + T_b}{2}$. Durch weitere Winkelhalbierung erhält man beliebig viele Isothermen, deren Temperaturen in arithmetischer Reihe aufeinander folgen. Stellt man die Temperaturen durch Lote auf der Ebene dar, so entsteht eine **Schraubenfläche** einfachster Art.

Das Temperaturgefälle auf $A_1 B_1$ ist

$$G_1 = \frac{T_a - T_b}{w_1},$$

auf $A_2 B_2$ ist es

$$G_2 = \frac{T_a - T_b}{w_2},$$

es ist also

$$G_1 : G_2 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{w_2} = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2},$$

d. h. das **Gefälle ist wiederum umgekehrt proportional dem Radius.** Dasselbe gilt von der Geschwindigkeit $v = \varkappa G$ der Wärmeströmung oder der zum Vergleich herangezogenen inkompressiblen Flüssigkeit. Nun ist aber bei unendlicher Kleinheit der Quadrate

$$\overline{A_1 A_2} : \overline{A_n A_{n+1}} = r_1 : r_n,$$

oben war

$$v_1 : v_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_n},$$

folglich ist

$$v_1 \cdot \overline{A_1 A_2} = v_n \cdot \overline{A_n A_{n+1}}.$$

Folglich: Durch alle Quadratseiten auf jedem Sektorenquerschnitt strömt sekundlich dieselbe Wärmemenge. Also ist die quadratische Einteilung auch für das Vertauschungsproblem eine potentiell gleichwertige.

Sind ferner T_α und T_β benachbarte Temperaturdifferenzen und der Abstand für die Entfernung r gleich $\frac{2r\pi}{n}$, wobei n sehr grofs ist, so ist das Gefälle nach obigem

$$G = \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}} = \frac{n}{2\pi} \cdot (T_\alpha - T_\beta)\frac{1}{r} = b\frac{1}{r},$$

die sekundlich überströmende Menge pro Flächeneinheit des Querschnitts also ist

$$W = \varkappa G = \varkappa b \frac{1}{r} = \varkappa \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}}.$$

Auf die Quadratbreite $\frac{2r\pi}{n}$ kommt also bei Dicke d der Platte die Menge

$$W = d\,\frac{2r\pi}{n} \cdot \varkappa \frac{T_\alpha - T_\beta}{\frac{2r\pi}{n}} = d\varkappa\,(T_\alpha - T_\beta) = \frac{2\pi d\varkappa b}{n},$$

was der Schlufsgleichung des vorigen Problems entspricht. Durch je n auf demselben Radius aufeinander folgende Quadratseiten strömt das n fache, also

$$W = 2\pi d\varkappa b,$$

und dies entspricht der Strömung durch jeden Vollkreis des vorigen Problems. Die Analogie ist also eine vollkommene.

In dieser Weise läfst sich zu jedem Problem ein Vertauschungsproblem aufstellen, bei dem die Strom- und Niveaulinien ihre Rollen wechseln.

Kapitel X.

Die zweidimensionalen Mehrpunkt- und Linearprobleme.

163) **Aufgabe.** In eine unbegrenzte homogene Platte ströme in zwei Punkten M_1 und M_2 unter gleichen Umständen Elektrizität ein, während die Ableitung in unendlicher Entfernung erfolgt. Die Strom- und Niveaulinien sollen ermittelt werden.

Auflösung. Die Potentialwerte $-c_1 \lg r_1$ und $-c_1 \lg r_2$ sind nach Nr. 79 für jeden Punkt der Ebene algebraisch zu summieren, so dafs es sich um

$$-c(\lg r_1 + \lg r_2) = -c_1 \lg(r_1 r_2)$$

handelt. Setzt man diesen Ausdruck gleich einer Konstanten $\varkappa$, so erhält man als Gleichung der Niveaulinien $-c_1 \lg(r_1 r_2) = \varkappa$, oder, wenn man $-\frac{\varkappa}{c_1} = c$ setzt

$$1) \qquad \lg r_1 + \lg r_2 = c, \text{ oder } \lg(r_1 r_2) = c, \text{ oder } r_1 r_2 = e^c.$$

Läfst man c die Werte einer arithmetischen Reihe annehmen, so erhält man die Einteilung in potentiell gleichwertige Ringstreifen. Es handelt sich um die in Ing.-Math. Bd. I behandelten lemniskatischen Kurven 2. Ordnung, deren Bedeutung für die Trägheits- und Centrifugalmomente (vgl. Nr. 142, 147, 218, 234, 238, 281) und für die mathematische Physik überhaupt bereits hervorgehoben worden ist. Dort war gezeigt (Nr. 234), dafs die Orthogonalkurven dieser Schar ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln bilden, deren Gleichung sich in der Form

$$2) \qquad \vartheta_1 + \vartheta_2 = c$$

schreiben läfst, wo ϑ_1 und ϑ_2 die Neigungen der Vektoren r_1 und r_2 sind. Dies geht ohne weiteres aus dem in Nr. 162 dargestellten Vertauschungsprobleme hervor, für welches $\vartheta_1 = c_1$ und $\vartheta_2 = c_2$ die Bedeutung

von Drehungspotentialen haben, die nach Analogie von Nr. 79 einfach zu summieren sind. Folgt auch hier c einer arithmetischen Reihe, so erhält man die Einteilung in potentiell gleichwertige Streifen. Für die unendlich fernen Punkte jeder Kurve sind die Vektoren parallel, so dafs dann $\vartheta_1 = \vartheta_2$ ist und Gleichung 2) in $2\vartheta = c$ oder $\vartheta = \frac{c}{2}$ übergeht. Demnach folgen bei der gleichwertigen Einteilung die Asymptoten unter gleichen Winkeln aufeinander, die halb so grofs sind, wie die Schnittwinkel der benachbarten Hyperbeln.

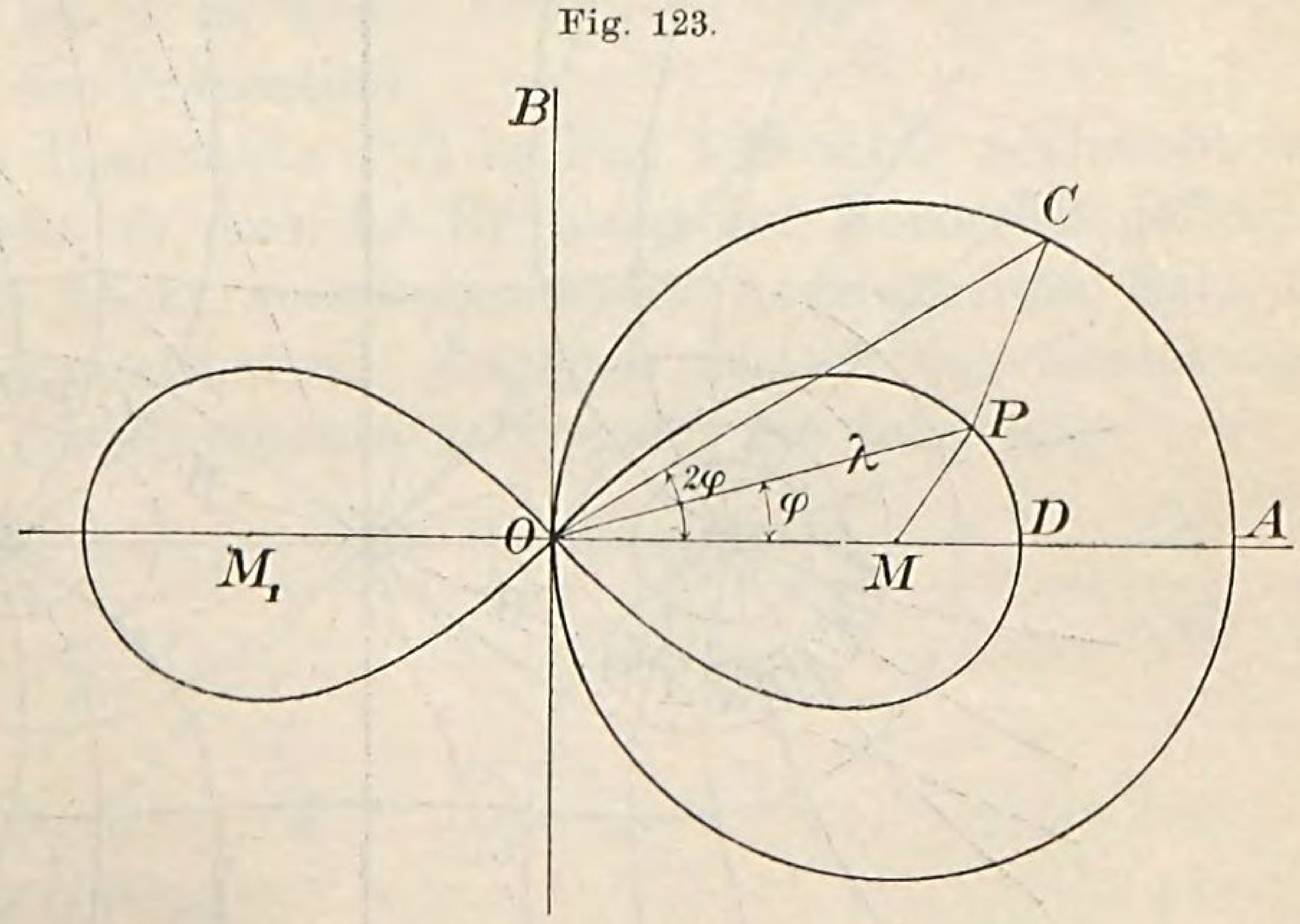
164) **Aufgabe.** Die Einteilung der Ebene in potentiell gleichwertige „Rechtecke", z. B. in kleine „Quadrate" für dieses Problem konstruktiv auszuführen.

1. **Auflösung.** Man lege durch M_1 ein Strahlenbüschel, welches lauter kongruente Sektoren giebt, durch M_2 lege man ein kongruentes Büschel. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des entstehenden Netzes von Vierecken giebt das Büschel gleichseitiger Hyperbeln. Damit ist ein einfaches Beispiel zu dem bekannten Satze gegeben, dafs die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen projektivischer Büschel auf einen Kegelschnitt führen. Die obige Gleichung 2) folgt daraus von selbst. Läfst man nämlich in $\vartheta_1 = n_1 c$ und $\vartheta_2 = n_2 c$ den Faktor n_1 um 1 zunehmen, während n_2 um 1 abnimmt, so bleibt

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = (n_1 + n_2)c$$

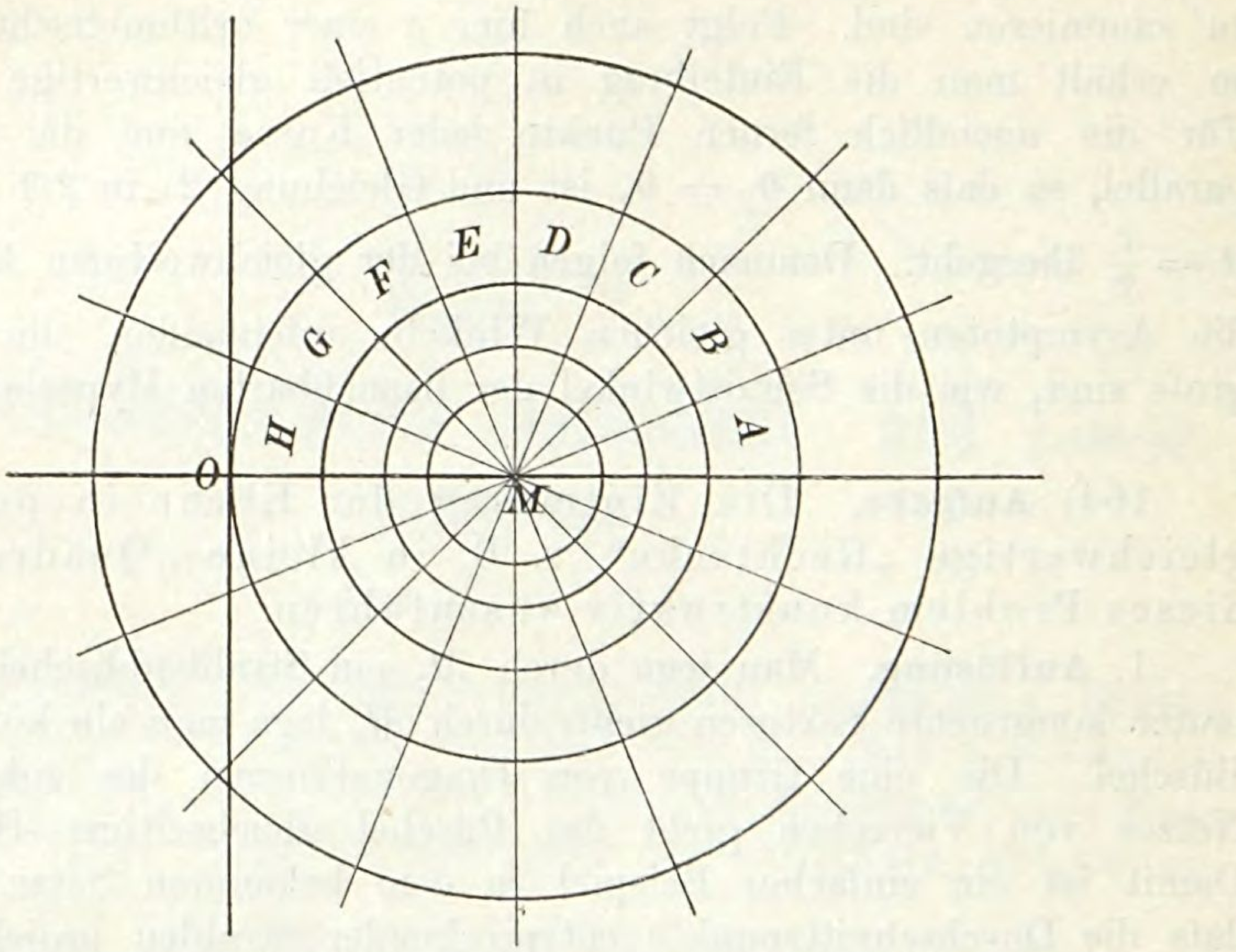
unverändert dieselbe Gröfse. Dies entspricht dem Ziehen der Diagonalkurven.

Fig. 123.



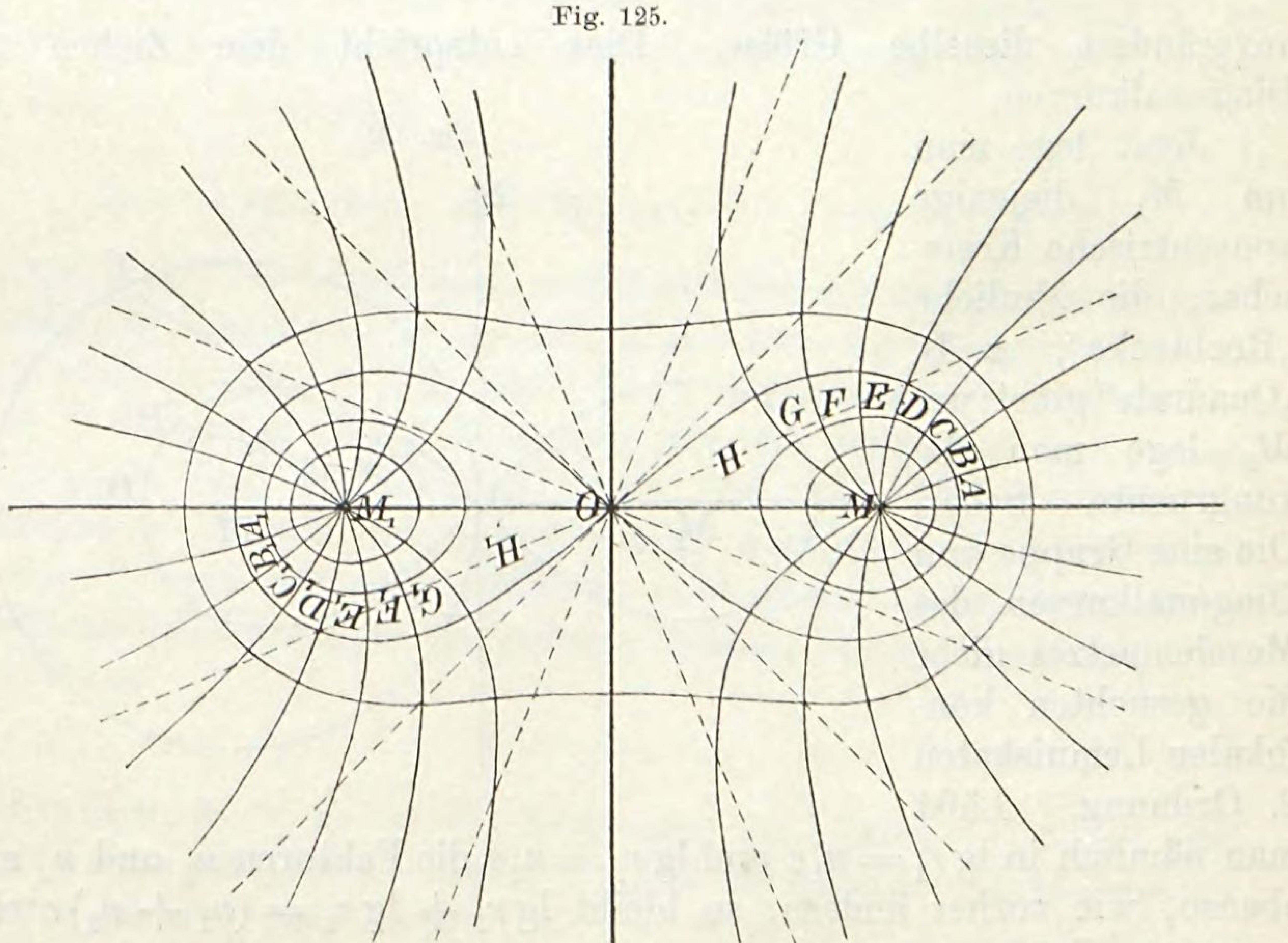
Jetzt lege man um M_1 diejenige koncentrische Kreisschar, die ähnliche „Rechtecke", z. B. „Quadrate" giebt; um M_2 lege man die kongruente Schar. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des Maschennetzes giebt die gesuchten konfokalen Lemniskaten 2. Ordnung. Läfst man nämlich in $\lg r_1 = n_1 c$ und $\lg r_2 = n_2 c$ die Faktoren n_1 und n_2 sich ebenso, wie vorher ändern, so bleibt $\lg r_1 + \lg r_2 = (n_1 + n_2)c$ eine konstante Gröfse.

Fig. 124.



2. **Auflösung.** In Abschnitt VI von Ing.-Math. Bd. I ist die lemniskatische Abbildung durchgeführt, d. h. für jeden Vektor OC ist die Winkelhalbierende OP eingeschaltet, deren Länge $= \sqrt{OM \cdot OC} = \sqrt{1 \cdot OC}$

Fig. 125.

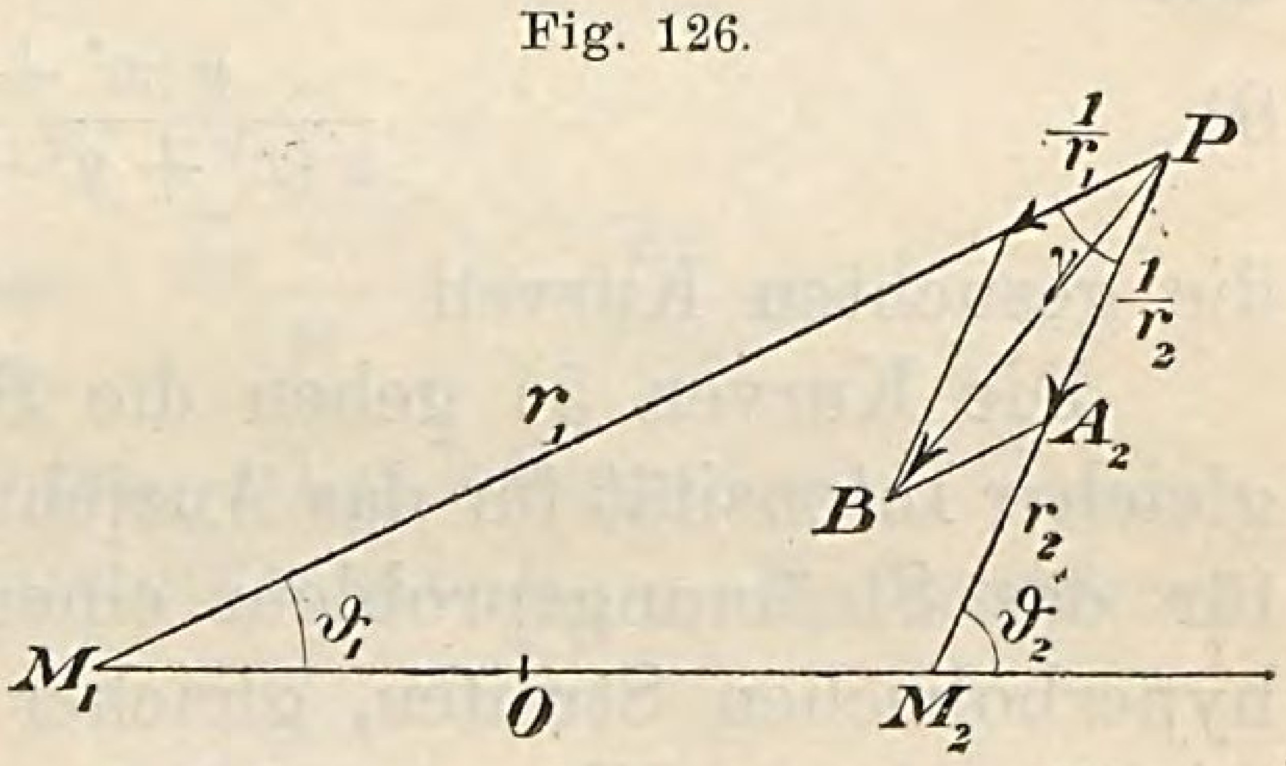


d. h. gleich der mittleren Proportionale zwischen $OM = 1$ und OC ist. Dort ist gezeigt, daſs dadurch die quadratische Einteilung der Ebene durch Strahlenbüschel und koncentrische Kreisschar in die quadratische Einteilung durch Hyperbelbüschel und konfokale Lemniskatenschar erzielt wird. Der Beweis möge dort nachgesehen werden. Durch die in die Niveaulinien fallenden Quadratseiten gehen sekundlich gleiche Mengen von Elektrizität. An jeder Stelle der Fig. 125 sind die Abstände der Niveaulinien gleich den Querlinien der Kanäle. Die Figur giebt zugleich die Niveauflächen für das Anziehungsproblem zweier paralleler homogen mit Masse belegter unbegrenzter Geraden, wobei die Dichtigkeiten für beide übereinstimmen.

165) **Aufgabe.** Für einen Punkt einer der lemniskatischen Kurven die Normale, für das eben besprochene Anziehungsproblem die Resultante nach Gröſse und Richtung zu konstruieren.

Auflösung. Man könnte die bekannte Tangentenkonstruktion für die betreffende gleichseitige Hyperbel zu Hilfe nehmen. Dies soll hier aber nicht geschehen, vielmehr soll die Mechanik herangezogen werden. Nach Nr. 112 übt die Masse 1 in M_1 auf P die Anziehung $\frac{1}{r_1} = PA_1$ aus, die Masse 1 in M_2 die Anziehung $\frac{1}{r_2} = PA_2$. Diese Strecken sind leicht zu konstruieren (mit Hilfe der Proportion $r_1 : 1 = 1 : x$). Die Resultante PB in Fig. 126 muſs senkrecht auf der Niveaulinie stehen, so daſs die Richtung der Normalen gefunden ist. (Darin liegt ein leicht auszusprechender geometrischer Satz für die Hyperbeln und Lemniskaten.) Zugleich ist für das Anziehungsproblem die Länge der Resultante gefunden. Sie folgt aus

Fig. 126.



$$p^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2\cos\gamma}{r_1 r_2} = \frac{r_2^2 + r_1^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2} = \frac{4r^2}{r_1^2 r_2^2}$$

als

3) $$p = \frac{2r}{r_1 r_2},$$

wobei r die Gerade OP ist.

Die Richtung der Resultante läſst sich mittels der Zerlegung der Einzelkräfte nach der senkrechten und wagerechten Richtung bequem ermitteln. Die Neigung α gegen die X-Achse ergiebt sich, wenn M_1 und M_2 als die Punkte $x = \pm 1$ der X-Achse betrachtet werden, aus

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2}{\frac{1}{r_1}\cos\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\cos\vartheta_2} = \frac{\frac{r_1\sin\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{r_2\sin\vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{r_1\cos\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{r_2\cos\vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{\frac{y}{r_1^2} + \frac{y}{r_2^2}}{\frac{x+1}{r_1^2} + \frac{x-1}{r_2^2}}$$

$$= \frac{y\left(r_2^2 + r_1^2\right)}{x\left(r_2^2 + r_1^2\right) + \left(r_2^2 - r_1^2\right)},$$

oder, wenn man für r_2^2 und r_1^2 die Werte $(x-1)^2 + y^2$ bezw. $(x+1)^2 + y^2$ einsetzt,

4) $$\tan\alpha = \frac{y\,(x^2 + y^2 + 1)}{x\,(x^2 + y^2 + 1) - 2\,xy}.$$

166) Linien gleicher Stromdichte und gleicher Stromrichtung für dieses Problem. Setzt man die Ausdrücke für p und $\tan\alpha$ gleich konstanten Gröfsen, so erhält man in

5) $$\frac{2\,r}{r_1\,r_2} = c$$

und

6) $$\frac{y\,(x^2 + y^2 + 1)}{x\,(x^2 + y^2 + 1) - 2\,xy} = c$$

die gesuchten Kurven.

Die Kurven 5) geben die Stellen gleichen Potentialgefälles und gleicher Intensität für das Anziehungsproblem, gleicher Geschwindigkeit für das Strömungsproblem einer inkompressiblen Flüssigkeit in den hyperbolischen Streifen, gleicher Stromdichte für die stationäre Elektrizitäts- bezw. Wärmeströmung. Sie passieren Quadrate von gleicher Gröfse in der quadratischen Einteilung.

Die Kurven 6) verbinden die Punkte gleicher Stromrichtung bezw. gleicher Anziehungsrichtung miteinander. [Beiläufig sei bemerkt, dafs ihre Gleichung sich auf $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2) = c$ zurückführen läfst, wo ϑ die Neigung des Vektors OP ist, und dafs sie die Orthogonalschar zu den Kurven 5 geben.] Sie werden konstruiert, indem man in das System der Lemniskaten oder Hyperbeln eine Parallelenschar legt und die Berührungspunkte verbindet.

167) Die Diagrammfläche des Problems. Denkt man sich auf der Ebene der Lemniskaten und Hyperbeln in jedem Punkte das Lot $z = \lg(r_1 r_2) = \lg r_1 + \lg r_2$ errichtet, so erhält man die Diagrammfläche des Potentials. Die Projektionen der Niveaulinien und Steilungslinien sind die der Lemniskaten und Hyperbeln; die der Linien gleicher Steilheit (gleichen Gefälles) sind die Kurven 5), die der gleichen

Richtung der Projektion sind die Kurven 6). Folgen die Höhen z arithmetisch aufeinander, so durchschneiden die Kurven 5) die Stellen gleichen Abstandes w der Lemniskaten.

168) Das elektrische Strömungsproblem. Die Gleichungen des elektrischen Problems sind

$$V = z = -\varkappa \lg(r_1 r_2), \quad \delta = \frac{2r}{r_1 r_2} \lambda\varkappa, \quad \varkappa = \frac{E}{2\pi d\lambda},$$

wo E die sekundlich in jedem der Punkte M_1 und M_2 einströmende Elektrizitätsmenge ist.

Sind r_1 und r_2 bezw. ϱ_1 und ϱ_2 die Abstände zweier benachbarter Punkte einer Stromlinie, deren Abstand gleich w ist, so folgt aus der Gefällgleichung

$$G = \tan\alpha = \varkappa \frac{\lg r_1 r_2 - \lg \varrho_1 \varrho_2}{w}$$

und der Geschwindigkeitsgleichung $v = \lambda \tan\alpha$ für die inkompressible Flüssigkeit, da zugleich

$$v = \frac{2r}{r_1 r_2} \lambda\varkappa$$

ist, die Beziehung

$$\frac{\lg r_1 r_2 - \lg \varrho_1 \varrho_2}{w} = \frac{2r}{r_1 r_2}, \quad \text{oder} \quad \frac{V_2 - V_1}{w} = \frac{2r}{r_1 r_2}.$$

wo r der von M ausgehende Vektor ist. Der Abstand der Niveaulinien für eine gegebene kleine Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ berechnet sich also für jede Stelle als

$$w = (V_2 - V_1) \frac{r_1 r_2}{2r}.$$

Dadurch sind die Quadratseiten für gegebene kleine Potentialdifferenz berechnet. Das Problem kann damit als erledigt betrachtet werden.

169) **Aufgabe.** In M_1 und M_2 strömen sekundlich gleiche Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten ein. Die Strom- und Niveaulinien sind zu untersuchen.

Auflösung. Nach obigem erhalten die Niveaulinien die Gleichung

$$1) \qquad \lg r_1 - \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad \lg \frac{r_1}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r_2} = e^c,$$

die Stromlinien die Gleichung

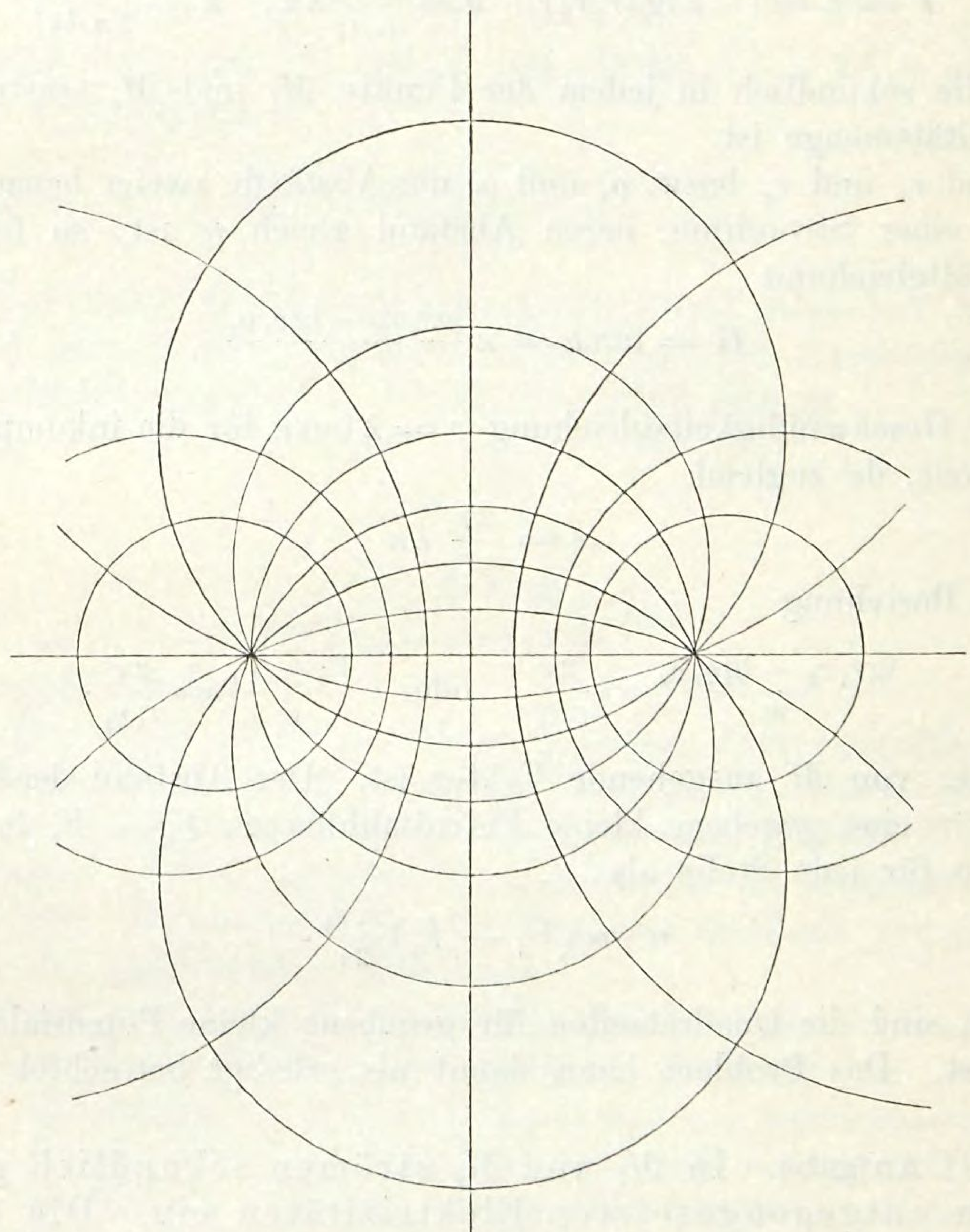
$$2) \qquad \vartheta_2 - \vartheta_1 = c.$$

Der Faktor $\varkappa$ ist als unwesentlich weggelassen. Die Schar 1) ist eine Kreisschar, die Schar 2) ein Kreisbüschel durch M_1 und M_2, beide

Scharen durchsetzen einander rechtwinklig. Nimmt c in beiden Gleichungen Werte an, die derselben arithmetischen Reihe folgen, so erhält man die Einteilung in kleine Quadrate.

Aus Figur 127 geht hervor, daſs c für jeden Büschelkreis den konstanten Peripheriewinkel über $M_1 M_2$ bedeutet, der gleich dem

Fig. 127.



Winkel ist, unter dem die X-Achse geschnitten wird. Demnach bilden die Tangenten der Büschelkreise in M_1 und M_2 reguläre Strahlenbüschel.

Konstruktiv kann man die Niveau- und Kraftlinien auf verschiedene Arten erhalten. Zunächst kann man beginnen wie beim vorigen Problem, nur hat man die andere Gruppe von Diagonalen in das Vierecksnetz einzuzeichnen. Eine zweite Art ist folgende: Man

denke sich das Quadratnetz der Strahlen und koncentrischen Kreise gezeichnet, mache einen beliebigen Punkt der Ebene zum Inversionscentrum (Abbildung $Z = \frac{1}{z}$), eine beliebige Länge wähle man als Einheit. Nach dem Method. Lehrbuch II Kap. IX gehen dabei die Kreise und die Strahlen in ein Kreisbüschel und die orthogonale Kreisschar über, und da die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen gewahrt bleibt, entsteht die quadratische Einteilung.

Selbständig läfst sich das Büschel leicht konstruieren, sobald man weifs, dafs die Tangenten in den Büschelpunkten unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Nimmt man neben der Symmetrielinie einen der Orthogonalkreise willkürlich an, so lassen sich die anderen mit Hilfe der Tangenten in den Schnittpunkten mit dem Büschel, welche Inversionscentren geben, leicht ableiten.

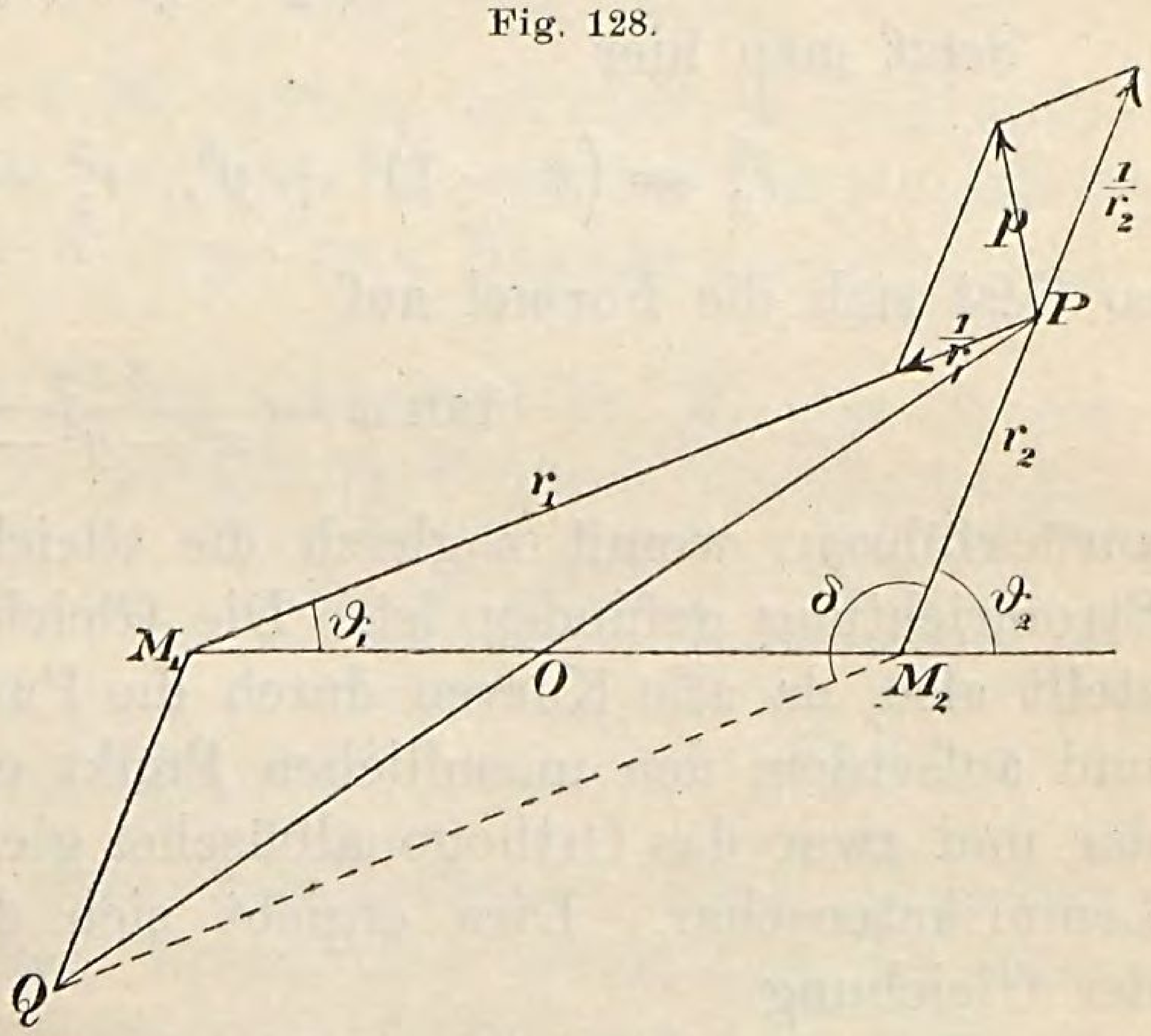
Der Übergang vom Strahlenbüschel und den koncentrischen Kreisen zum Kreisbüschel und der orthogonalen Kreisschar giebt den Zusammenhang der Polarkarte mit den Karten der östlichen und westlichen Halbkugel nach der stereographischen Projektion von Hipparch-Ptolemäus. [Nimmt man dazu die Quadrateinteilung der Ebene durch Parallelenscharen, so erhält man den Zusammenhang mit der Merkatorkarte, der durch die Abbildung $Z = \lg z$ gegeben wird.]

Zugleich ist das Newtonsche Anziehungs-Abstofsungsproblem gelöst für zwei unbegrenzte Gerade, von denen die eine mit anziehender, die andere mit abstofsender Masse homogen belegt ist.

170) **Aufgabe.** Die Resultante des letzteren Problems nach Gröfse und Richtung zu konstruieren und zu berechnen, ebenso die Linien gleicher Stromdichte und Stromrichtung.

Auflösung. Sieht man von der Konstanten ab, so handelt es sich für den Punkt P um die anziehende Kraft $\frac{1}{r_1}$ und um die abstofsende Kraft $\frac{1}{r_2}$, die beide leicht zu konstruieren sind. Die Resultante ergiebt sich nach Fig. 128 durch Zusammensetzung.

Fig. 128.



Die Gröfse der Resultante ergiebt sich, wenn $MM_2 = 1$ gesetzt wird, als

$$p^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1 r_2} \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{r_2^2 + r_1^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}$$

$$= \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos\delta}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\overline{M_1 M_2^2}}{r_1^2 r_2^2} = \frac{4}{r_1^2 r_2^2},$$

so dafs

$$p = \frac{2}{r_1 r_2}$$

ist. Die Linien gleicher Stromdichte haben also jetzt die Gleichung

$$\frac{2}{r_1 r_2} = \varkappa$$

oder

$$r_1 r_2 = \frac{2}{\varkappa} = c,$$

d. h. sie bilden ein System konfokaler Lemniskaten.

Die Richtung der Resultante ergiebt sich nach dem früheren aus

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1 - \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2}{\frac{1}{r_1}\cos\vartheta_1 - \frac{1}{r_2}\cos\vartheta_2} = \frac{\frac{r_1 \sin\vartheta_1}{r_1^2} - \frac{r_2 \sin\vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{r_1\cos\vartheta_1}{r_1^2} - \frac{r_2\cos\vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{\frac{y}{r_1^2} - \frac{y}{r_2^2}}{\frac{x+1}{r_1^2} - \frac{x-1}{r_2^2}}$$

$$= \frac{y\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{x\left(r_2^2 - r_1^2\right) + \left(r_2^2 + r_1^2\right)}.$$

Setzt man hier

$$r_2^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x+1)^2 + y^2,$$

so läfst sich die Formel auf

$$\tan\alpha = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1} = c$$

zurückführen, womit zugleich die Gleichung für die Linien gleicher Stromrichtung gefunden ist. Die Gleichung ist vom zweiten Grade, stellt also, da alle Kurven durch die Punkte ± 1 der X-Achse gehen und aufserdem den unendlichen Punkt erreichen, ein Hyperbelbüschel dar und zwar das Orthogonalbüschel gleichwertiger Hyperbeln für die Lemniskatenschar. Dies ergiebt sich durch folgende Umschreibung der Gleichung

$$\frac{[(x+1)+(x-1)]\,y}{(x+1)(x-1) - y^2} = \frac{\frac{y}{x-1} + \frac{y}{x+1}}{1 - \frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1}} = \frac{\tan\vartheta_1 + \tan\vartheta_2}{1 - \tan\vartheta_1 \tan\vartheta_2} = \tan(\vartheta_1 + \vartheta_2) = c$$

oder auch

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = c_1,$$

was nach Nr. 163 die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel ist.

Zieht man also in einem Kreisbüschel parallele Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel. Die Orthogonalkurven sind Lemniskaten 2ter Ordnung, und jede von ihnen durchschneidet bei der Quadrateinteilung der Ebene durch Kreisbüschel und Kreisschar eine Reihe gleich grofser Quadrate.

Errichtet man auf der Ebene in jedem Punkte ein Lot

$$\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \lg r_1 - \lg r_2,$$

so erhält man die Diagrammfläche des Problems, über die sich ähnliche Betrachtungen wie über die vorige anstellen lassen.

Die Gleichungen des elektrischen Problems sind

$$V = z = -\varkappa \lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right), \quad v = \frac{2}{r_1 r_2}\lambda\varkappa, \quad \varkappa = \frac{E}{2\pi d\lambda},$$

wo E die aus M_1 sekundlich hervorquellende Elektrizitätsmenge bedeutet.

Dieses Problem ist das erste, an dem Kirchhoff seine bahnbrechenden Untersuchungen über die stationäre Strömung in ebenen Platten theoretisch und experimentell prüfend durchgeführt hat. (Vgl. Poggendorfs Annalen, Bd. 64 u. 67 und die Vorlesungen Kirchhoffs über Elektrizität und Magnetismus Seite 135.)

171) **Aufgabe.** In M_1 und M_2 treten sekundlich ungleiche Mengen gleichartiger Elektrizität ein, um im Unendlichen abgeleitet zu werden. Die Strom- und Niveaulinien u. s. w. sind zu untersuchen.

Auflösung. Sind E_1 und E_2 die sekundlich in M_1 und M_2 eintretenden Elektrizitätsmengen, so handelt es sich um die Gleichungen

1) $$E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad r_1^{E_1} r_2^{E_2} = c^c$$

und

2) $$E_1\vartheta_1 + E_2\vartheta_2 = c.$$

Folgen die Werte von c einer arithmetischen Reihe, so erhält man die quadratische Einteilung. Konstruktiv erhält man das Netz, indem man in M_1 ein reguläres Strahlenbüschel von nE_1 Sektoren, in M_2 ein solches von nE_2 Sektoren zeichnet, die eine Gröfse von Diagonalkurven des Netzes giebt die Stromlinien 2), deren Gleichung daraus sofort als richtig erhellt. Dasselbe macht man mit den

quadratisch teilenden koncentrischen Kreisen der beiden Büschel, was nach Form und Gleichung auf die Kurven 1) führt. Über die Diagrammfläche, ebenso über die Kurven gleicher Intensität und gleicher Stromrichtung lassen sich dieselben Betrachtungen wie vorher anstellen, nur werden die Resultate weniger einfach. Die Zeichnung für den Fall $E_1 : E_2 = 2 : 1$ erinnert an Fig. 72.

Die Stromlinien haben Asymptoten, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen und durch den Schwerpunkt der „Massen" E_1 und E_2 gehen. Zwei dieser Asymptoten teilen den Winkel $M_2 M M_1$ im Verhältnis $E_2 : E_1$. Die zugehörigen Stromlinien grenzen die beiden Ausströmungsbereiche voneinander ab. Zu den Niveaulinien gehört ein unendlich grofser Kreis um den Schwerpunkt. [Auf die Transformation, welche das Strahlenbüschel und die koncentrische Kreisschar direkt in die vorliegenden Kurvenscharen verwandeln, kann hier nicht eingegangen werden. Dazu vergleiche man Kapitel X der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften.]

172) **Aufgabe.** In M_1 ströme die Elektrizitätsmenge E_1 ein, der Teil E_2 werde in M_2 abgeleitet, der Rest fliefse ins Unendliche ab. Die Niveau- und Stromlinien sind zu untersuchen.

Auflösung. Konstruktiv beginnt man wie vorher, nur nimmt man die andere Diagonalengruppe. Dies und die Potentialüberlegung führt auf die Niveaulinien

1) $$E_1 \lg r_1 - E_2 \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad r_1^{E_1} r_2^{-E_2} = e^c.$$

2) $$E_1 \vartheta_1 - E_2 \vartheta_2 = c.$$

Die Zeichnung für $E_1 : E_2 = 2 : 1$ erinnert an Fig. 76. Die Arme der sich selbst schneidenden Kurven schneiden einander rechtwinklig.

173) **Aufgabe.** In drei beliebig liegenden Punkten der Ebene werde Elektrizität in den sekundlichen Mengen E_1, E_2 und E_3 eingeführt, im Unendlichen abgeleitet. Das Stromnetz ist zu untersuchen.

Auflösung. Man bilde zunächst die Stromlinien für E_1 und E_2 und zwar soll die Zahl der Streifen für M_1 gleich nE_1, für M_2 gleich nE_2 sein. Darauf bilde man das regelrechte Strahlenbüschel für M_3 mit nE_3 Streifen. Die eine Gruppe von Diagonalkurven des entstehenden Maschennetzes giebt die gesuchten Stromlinien. Darauf bilde man für M_1 und M_2 die quadratisch einteilenden Niveaulinien, für M_3 die quadratisch einteilenden koncentrischen Kreise und verfahre damit ebenso.

Die Gleichungen werden

1) $$E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 + E_3 \lg r_3 = c,$$

oder

1*) $$r_1^{E_1} r_2^{E_2} r_3^{E_3} = e^c.$$

2) $$E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 + E_3 \vartheta_3 = c.$$

Die Asymptoten folgen unter gleichen Winkeln aufeinander und gehen durch den Schwerpunkt S der „Massen“ E_1, E_2, E_3. Jedem Punkte kommt ein Bereich der Ebene zu. Der unendlich grofse Kreis wird durch die trennenden Kurven bezw. ihre Asymptoten in Bereiche eingeteilt, die sich verhalten wie $E_1 : E_2 : E_3$. Dies erleichtert die Zeichnung der Kurven. Die Tangenten in M_1, M_2, M_3 bilden regelmäfsige Strahlenbüschel mit nE_1, nE_2, nE_3 Streifen.

174) **Aufgabe.** In M_1 und M_2 werde sekundlich die Strommenge E_1 und E_2 eingeleitet, in M_3 werde der Teil E_3, der Rest im Unendlichen abgeleitet. Das Stromnetz soll untersucht werden.

Auflösung. Konstruktiv beginnt man wie vorher, nur nimmt man jedesmal die andere Gruppe von Diagonalkurven. Die Gleichungen werden

1) $$E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 - E_3 \lg r_3 = c,$$

oder

1*) $$r_1^{E_1} r_2^{E_2} r_3^{-E_3} = c.$$

2) $$E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 - E_3 \vartheta_3 = c.$$

Von den $n(E_1 + E_2)$ Stromlinien, die von M_1 ausgehen, wandern nE_3 nach M_3, der Rest von $n(E_1 + E_2 - E_3)$ geht nach dem unendlichen Bereiche. Die Asymptoten der letzteren folgen unter gleichen Winkeln aufeinander und gehen durch den Schwerpunkt der Massen E_1, E_2 und $-E_3$, der mit Hilfe entsprechender Kräfte leicht konstruiert wird.

Ist $E_1 + E_2 - E_3 = 0$, so fliefst keine Elektrizität ins Unendliche ab, und alle Stromlinien, die von M_1 und M_2 ausgehen, treffen sich in M_3. Die Tangenten der Stromlinien in M_1, M_2, M_3 bilden regelmäfsige Strahlenbüschel mit nE_1, nE_2, nE_3 Streifen.

175) **Aufgabe.** In beliebigen Punkten $M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$ der Ebene strömen sekundlich die gleichartigen elektrischen Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots E_n$ ein, um im Unendlichen abgeleitet zu werden. Das Stromnetz ist zu untersuchen.

Auflösung. Die Gleichungen werden nach obigem

1) $$E_1 \lg r_1 + E_2 \lg r_2 + \cdots E_n \lg r_n = c,$$

oder

1*) $$r_1^{E_1} r_2^{E_2} r_3^{E_3} \ldots r_n^{E_n} = e^c,$$

bezw.

2) $$E_1 \vartheta_1 + E_2 \vartheta_2 + \cdots + E_n \vartheta_n = c.$$

Der konstruktive Weg ist umständlich, bietet aber keine Schwierigkeiten. Man konstruiert nach Nr. 173 das Netz für drei Punkte, nimmt das Strahlenbüschel bezw. die koncentrische Kreisschar des vierten, dazu bildet man die Diagonalkurven. Dann wird der fünfte Punkt dazugezogen. Die Asymptoten der Stromlinien gehen durch den Schwerpunkt und folgen unter gleichen Winkeln aufeinander. Von der Streifenzahl gilt dasselbe, wie vorher.

176) **Aufgabe.** In den Punkten $M_1, M_2, M_3 \ldots M_n$ mögen die Strommengen $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$ eingeleitet, in den Punkten $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_\nu$ die Mengen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ abgeleitet werden, der Rest soll ins Unendliche abfliefsen. Das Stromnetz ist zu untersuchen.

Auflösung. Die Gleichungen werden

1) $$e_1 \lg r_1 + e_2 \lg r_2 + \cdots + e_n \lg r_n - [\varepsilon_1 \lg \varrho_1 + \varepsilon_2 \lg \varrho_2 + \cdots \varepsilon_\nu \lg \varrho_\nu] = c.$$

oder

1*) $$\frac{r_1^{e_1} r_2^{e_2} \ldots r_n^{e_n}}{\varrho_1^{\varepsilon_1} \varrho_2^{\varepsilon_2} \ldots \varrho_n^{\varepsilon_n}} = \bar{c}.$$

Konstruktiv verfährt man wie vorher, nur ist bei Heranziehung der negativen Ströme die andere Diagonalgruppe zu wählen. Die Stromlinien sind

2) $$e_1 \vartheta_1 + e_2 \vartheta_2 + \cdots + e_n \vartheta_n - [\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2 + \cdots + \varepsilon_\nu \varphi_\nu] = c.$$

Die Asymptoten der Stromlinien gehen durch den Schwerpunkt der teils positiven, teils negativen Massen und folgen unter gleichen Winkeln aufeinander. Von der Streifenzahl für die einzelnen Punkte gilt dasselbe wie vorher. Ist die Summe der positiven und negativen Strommengen gleich Null, so geht nichts ins Unendliche, also sind unter den Stromlinien im allgemeinen keine asymptotischen. Nur gewisse Grenzkurven sind auszunehmen.

Als allgemeine Form der Niveau- und Stromlinien kann man einfacher schreiben

I) $$r_1^{e_1} r_2^{e_2} \dots r_3^{e_n} = e^c,$$

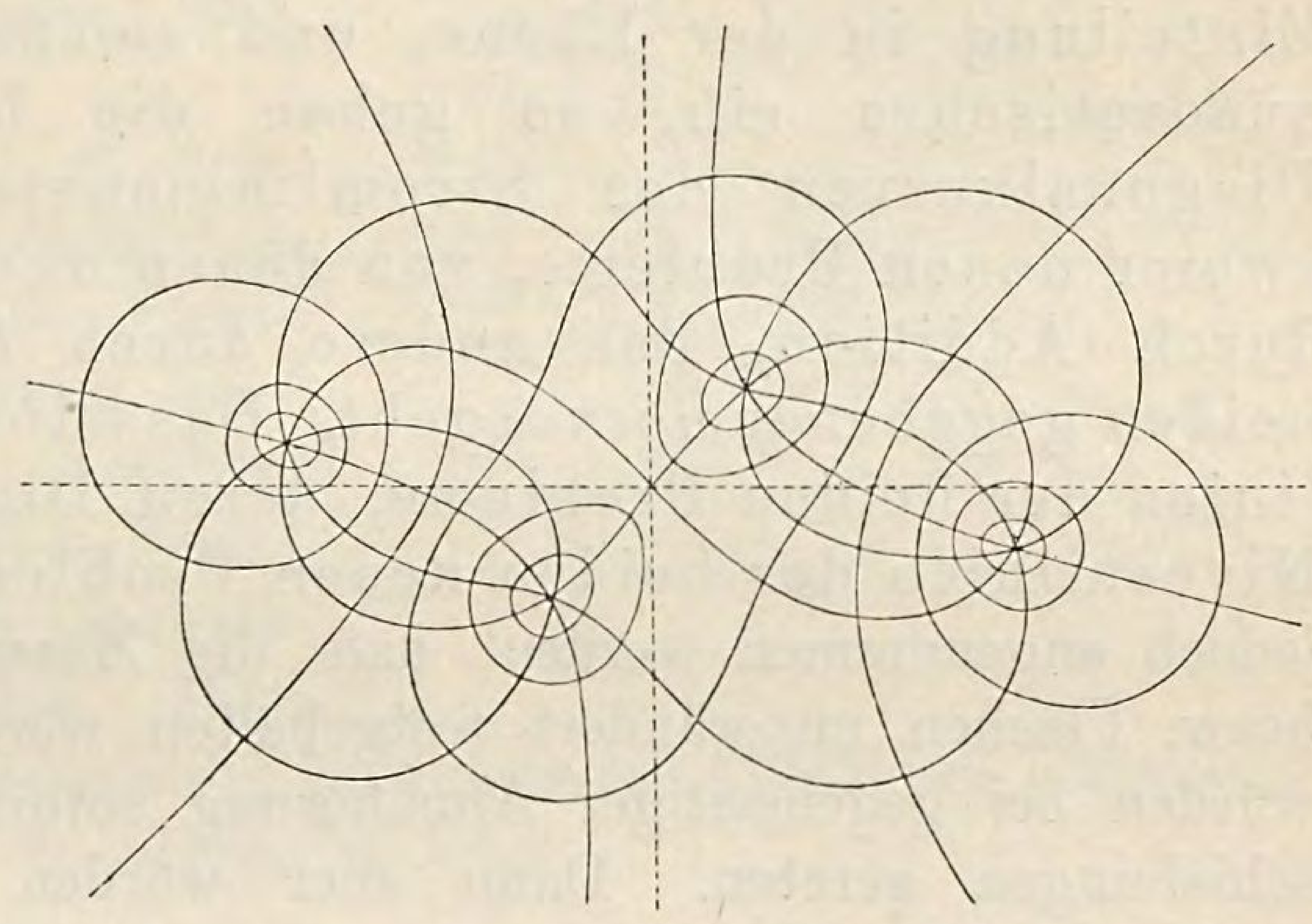
II) $$e_1 \vartheta_1 + e_2 \vartheta_2 + \cdots + e_n \vartheta_n = c,$$

wo die e teils positiv, teils negativ aufzufassen sind.

Damit sind die Punktprobleme für das logarithmische Potential erledigt.

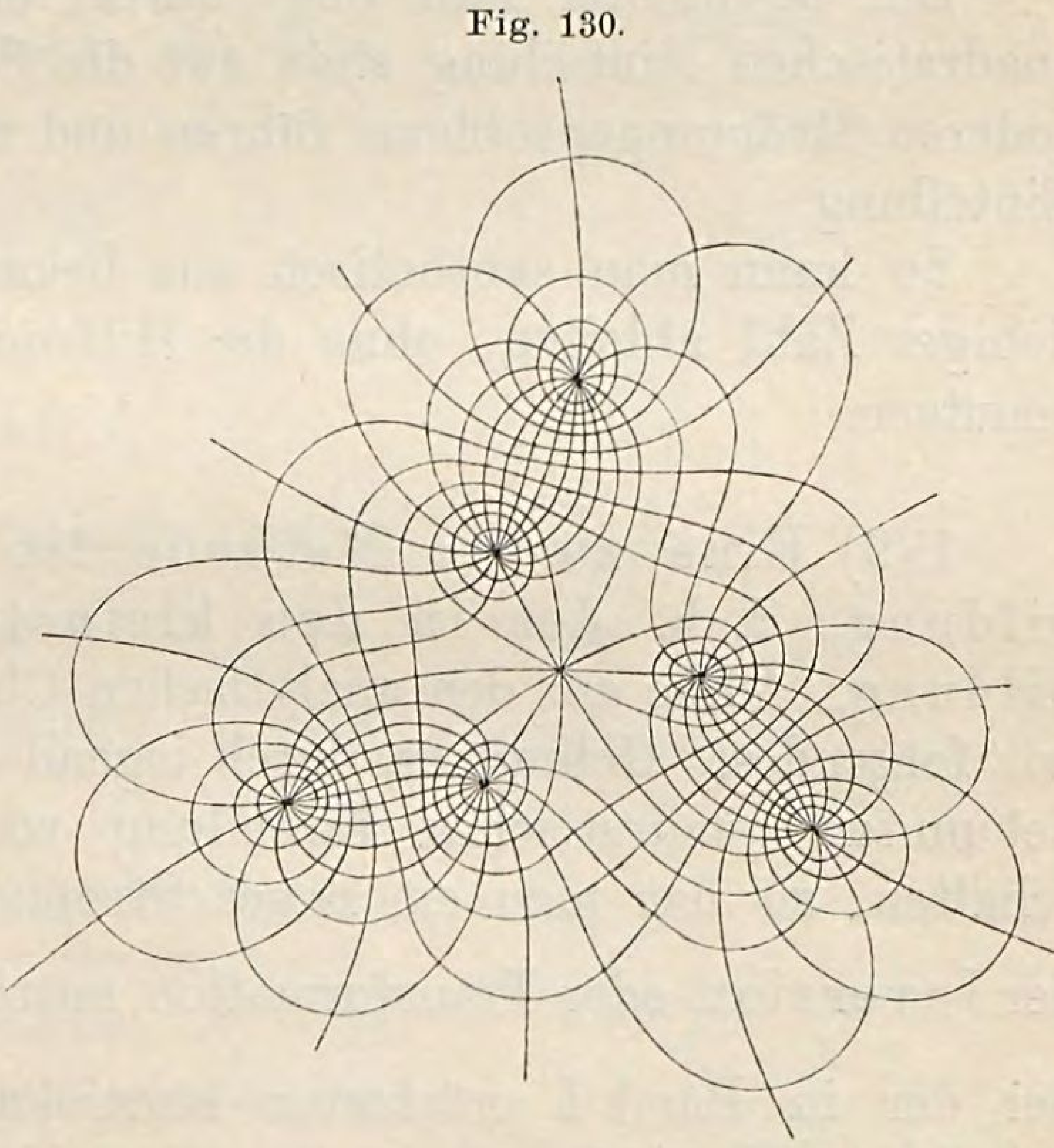
[In Kap. X und XI der Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften ist gezeigt, wie man durch eine einfache Transformation direkt vom Parallelen- oder vom Einpunktproblem zu diesem allgemeinsten Punktproblem übergehen kann.]

Fig. 129.



177) Einige Beispiele. Um einen Begriff von den hier auftretenden Kurvensystemen zu erhalten, vergleiche man die beiden beistehenden Figuren, die der Theorie der isogonalen Verwandtschaften des Verfassers entnommen sind. Bei beiden handelt es sich um gleiche Mengen einströmender und abgeleiteter Elektrizität in vier bezw. sechs Punkten, so daſs ein Abströmen ins Unendliche nicht stattfindet. Beide Zeichnungen erläutern sich selbst. An beiden läſst sich auch das Verhalten der durch Erdleitung vermittelten Rückströmungen beim Telegraphieren erläutern. Man nehme an, die drei inneren Büschelpunkte seien Telegraphenstationen, die gleichzeitig nach den drei äuſseren telegraphieren. Unter Voraussetzung homogenen Erdreichs stellt dann die Zeichnung die entstehenden Rückströme dar, wobei zu beachten

Fig. 130.



ist, dafs jede Station nicht die ganze von ihr ausgehende Elektrizität zurück erhält, sonderen nur einen Teil davon, wogegen sie den Rest anderswoher erhält.

178) Eine allgemeine Methode zur Herstellung isothermischer Einteilungen. Aus obigem ergiebt sich ganz allgemein folgendes: Hat man ein Strömungsnetz mit quadratischer Einteilung in der Ebene, und zeichnet man ein zweites quadratisches ein, so geben die beiden Gruppen von Diagonalkurven des Stromliniennetzes die Stromlinien zweier neuen Probleme, von denen das eine gewissermafsen durch Addition, das andere durch Subtraktion aus den beiden gegebenen hervorgeht. Dasselbe gilt von den Niveaulinien der beiden Probleme, deren Diagonalkurven auf die Niveaulinien der beiden neuen Probleme führen. Dabei mufs jedoch angenommen werden, dafs die Massenbelegungen der Linien bezw. Flächen unverändert festgehalten werden. Elektrizitäten z. B. würden bei gegenseitiger Annäherung sofort durch Influenz in Verschiebungen geraten. Dann aber würden die gefundenen Linien nicht mehr das Stromnetz des neuen Problems, sondern das eines gewissen anderen geben. Bei Punktproblemen tritt die genannte Störung nicht ein.

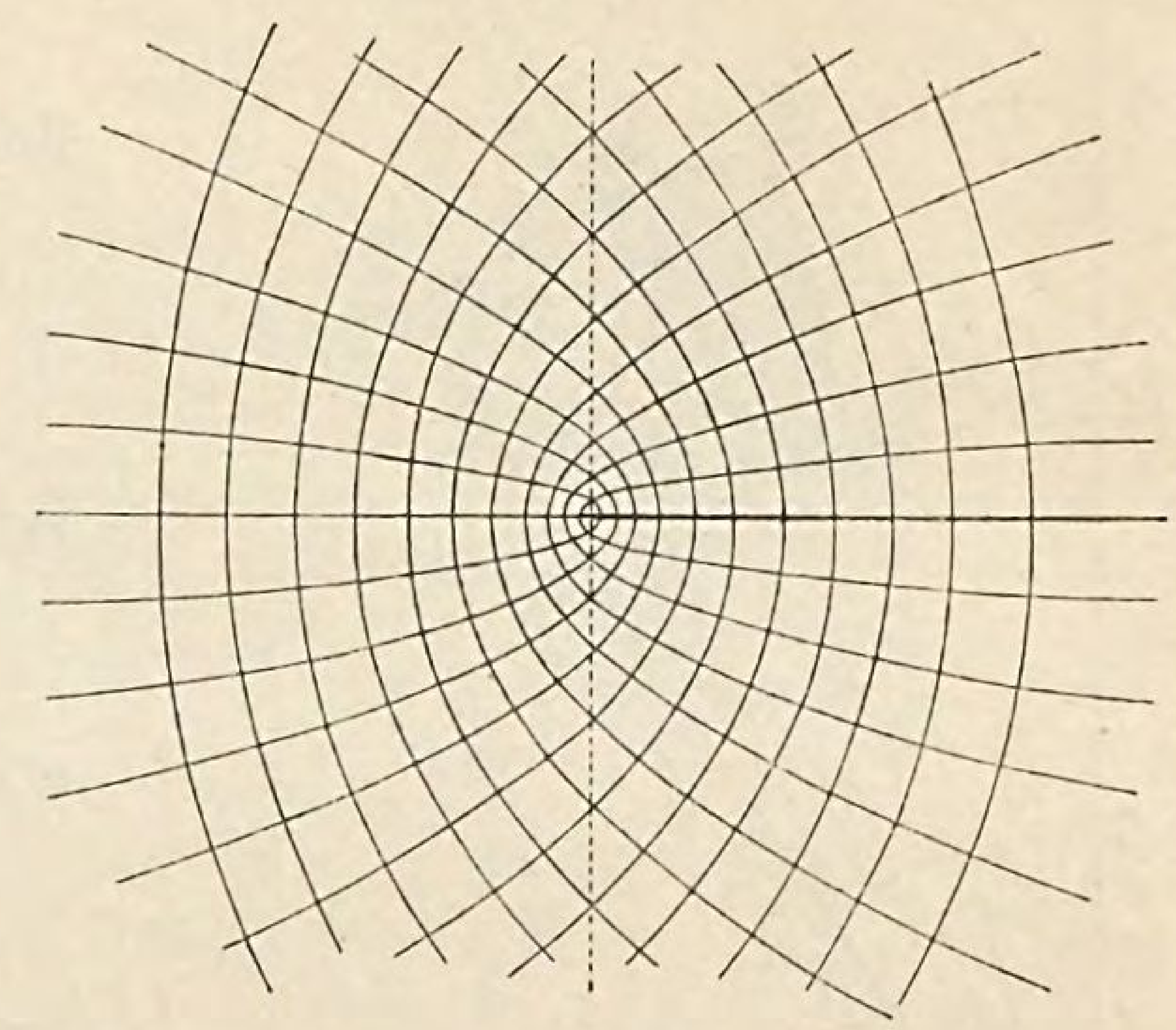
Ein besonderer Fall liegt darin, dafs die Diagonalkurven einer quadratischen Einteilung stets auf die Strom- und Niveaulinien eines anderen Strömungsproblems führen und zwar ebenfalls in quadratischer Einteilung.

So kann man synthetisch aus bekannten Problemen neue in beliebiger Zahl ableiten, ohne die Hilfsmittel der höheren Analysis zu benutzen.

179) Eine zweite Methode ist die der konformen Abbildung, d. h. der in den kleinsten Teilen ähnlichen Abbildung. Ohne auf den analytischen Charakter einzugehen, bemerken wir folgendes. Gelingt es, durch irgend eine Transformation aus einer bekannten quadratischen Einteilung wiederum eine quadratische zu erhalten, so hat man ein neues Stromnetz. Dies geschieht z. B. bei der Inversion oder Transformation mittels reciproker Radien, $Z = \frac{1}{z}$, bei der in Band I erörterten lemniskatischen Abbildung $Z = \sqrt{z}$, bei der in Nr. 115 behandelten logarithmischen Abbildung. Die Inversion verwandelt die Parallelenschar in ein System sich berührender Kreise und die orthogonale Kreisschar, das Strahlenbüschel nebst koncentrischer Kreisschar in das Kreisbüschel nebst orthogonaler

Kreisschar. Die lemniskatische Abbildung verwandelt das Strahlenbüschel nebst koncentrischer Kreisschar in das Büschel gleichseitiger Hyperbeln nebst konfokaler Lemniskatenschar, das Kreisbüschel nebst orthogonaler Kreisschar in das in Fig. 129 dargestellte Lemniskatenbüschel nebst orthogonaler Lemniskatenschar, die Parallelenscharen in Scharen gleichseitiger Hyperbeln.

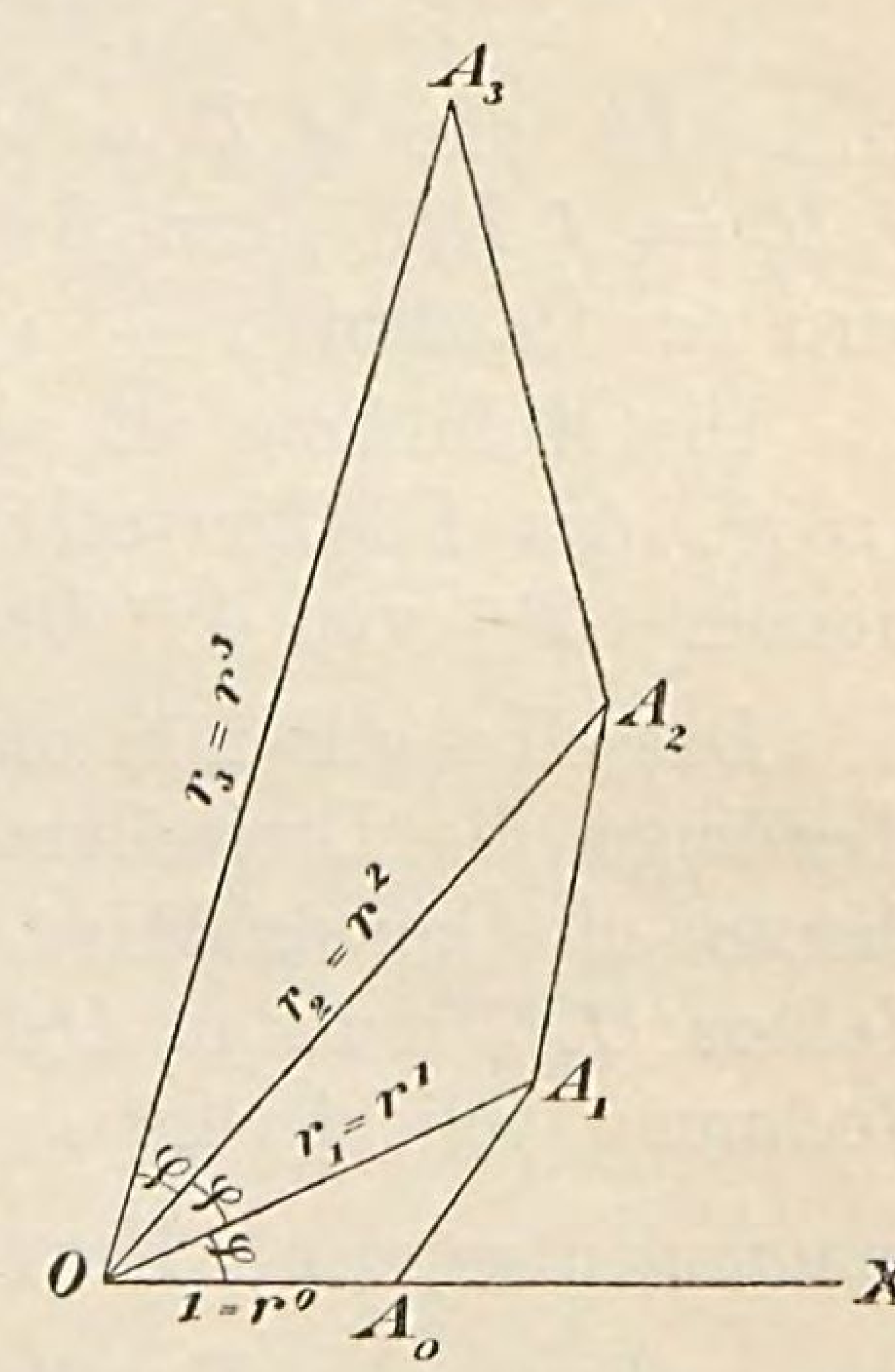
Fig. 131.



Die Abbildung $Z = z^2$, d. h. die Umkehrung der lemniskatischen Abbildung verwandelt die Parallelenscharen in ein System konfokaler Parabeln, das Strahlenbüschel nebst koncentrischer Kreisschar in ein Büschel von Parabeln nebst kardioidischer Schar. Man kann diese Transformation als die kardioidische Abbildung bezeichnen. (Vergl. Ing.-Math. Band I, Abschnitt VI.)

180) Die Abbildung $Z = z^3$ ist entsprechend zu behandeln. Ist $OA = 1$ und $OA_1 = r_1$ eine beliebige Strecke, so vollende man Dreieck OAA_1 und setze darauf ein ähnliches OA_1A_2, darauf wiederum ein ähnliches OA_2A_3. Dann ist

Fig. 132.



$$OA_2 = r_1^2,\ OA_3 = r_1^3,$$

zugleich ist

$$\sphericalangle AOA_3 = 3 \cdot \sphericalangle AOA_1.$$

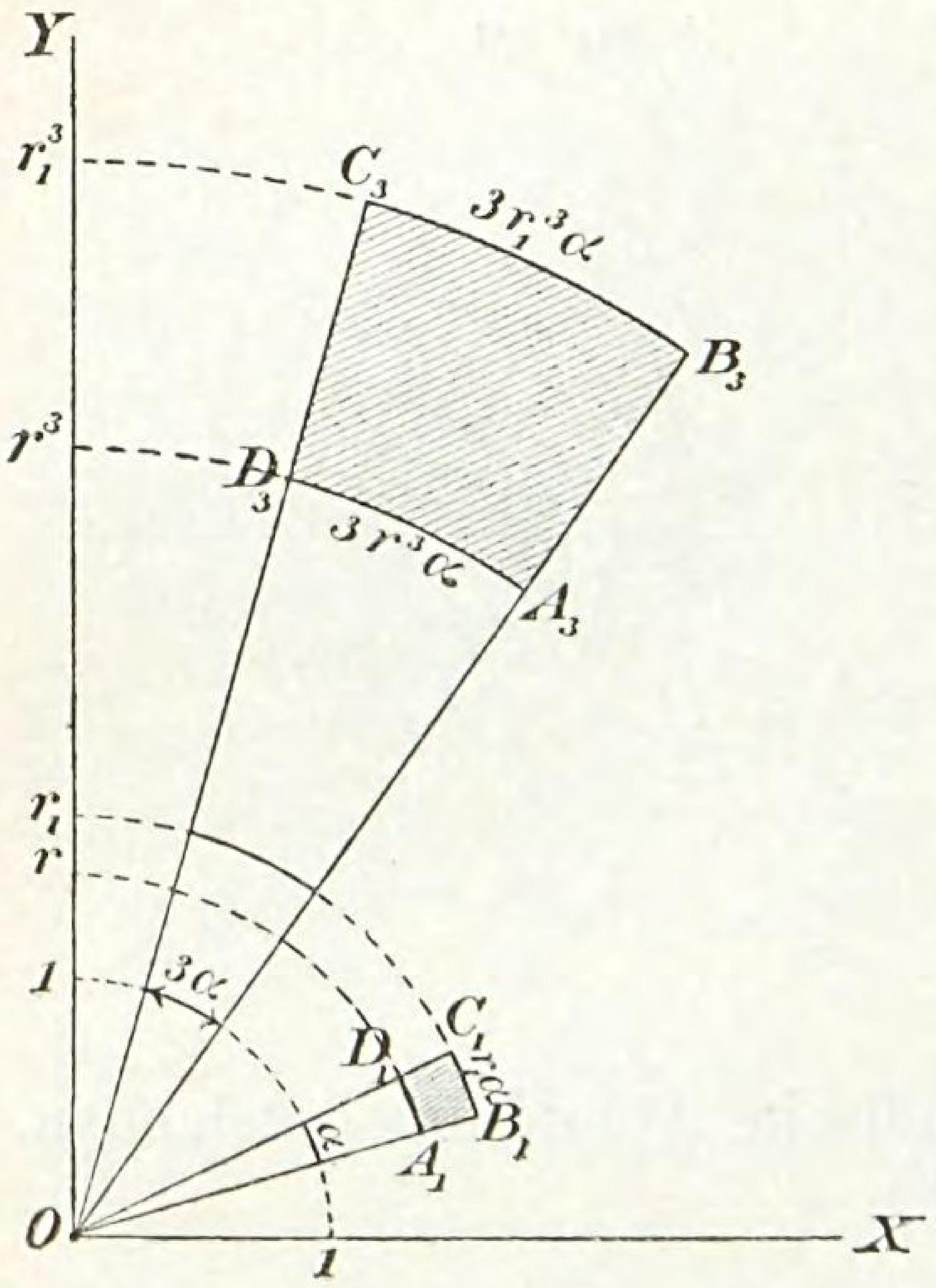
Dies entspricht der Moivreschen Formel

$$[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^3$$
$$= r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi).$$

Man nennt die Strecke OA_3 (Strecke ist die nach Länge und Richtung bestimmte Gerade) die dritte Potenz der Strecke OA_1. So kann man zu jedem Punkte A_1 den zugehörigen A_3 finden. Koncentrische Kreise um O gehen dabei wieder in solche über, Strahlen durch O wieder in Strahlen durch O. Kurven $f(R, \Phi) = 0$ gehen über in Kurven $f(r^n, n\varphi) = 0$, Kurven $f\left(\sqrt[n]{R}, \frac{\Phi}{n}\right) = 0$ in Kurven $f(r, \varphi) = 0$.

Der quadratische Charakter der Einteilung mittels Strahlenbüschel und koncentrischer Kreisschar bleibt erhalten. Das „Quadrat“ $A_1B_1C_1D_1$ verwandelt sich in einen „Rechtecksraum“ $A_3B_3C_3D_3$. Dabei sei

Fig. 133.



$$OA_1 = r, \quad A_1D_1 = r\alpha,$$

dann wird

$$OA_3 = r^3, \quad A_3D_3 = 3r^3\alpha,$$

d. h.

$$A_3D_3 = 3r^2 \cdot A_1D_1.$$

Ist nun

$$A_1B_1 = d \quad \text{also} \quad OB_1 = r + d,$$

so wird

$$OB_3 = (r+d)^3$$
$$= r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3,$$

also

$$A_3B_3 = OB_3 - OA_3$$
$$= (r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3) - r^3$$
$$= 3r^2d + 3rd^2 + d^3.$$

Ist nun d sehr klein, so kann man $3rd^2 + d^3$ als unendlich klein 2ter bezw. 3ter Ordnung gegen $3r^2d$ vernachlässigen, so dafs

$$A_3B_3 = 3r^2d = 3r^2 \cdot A_1B_1$$

wird. Ist nun $A_1B_1 = A_1D_1$ d. h. $A_1B_1C_1D_1$ ein Quadrat, so wird $A_3B_3 = A_3D_3$, (denn $3r^2 \cdot A_1B_1 = 3r^2A_1D_1$), d. h. auch $A_3B_3C_3D_3$ wird ein Quadrat.

Die Abbildung ist also eine konforme. Das Bogenverhältnis ist $1:3r^2$, das Flächenverhältnis $1:9r^4$. Die Folgerungen für Polarmomente 2ter und 4ter Ordnung liegen auf der Hand.

Dasselbe gilt nun auch von ihrer Umkehrung $Z = \sqrt[3]{z}$, bei der allerdings die Dreiteilung des Winkels vorausgesetzt werden mufs, ebenso die konstruktive Darstellung der dritten Wurzel, denn der Vektor OA_3 mufs in OA_1 verwandelt werden. Da dies mit Hilfe der Rechnung beliebig genau geschehen kann, soll diese Möglichkeit angenommen werden. Kurven $f(r, \varphi) = 0$ gehen über in $f\left(\sqrt[3]{r}, \frac{\varphi}{3}\right) = 0$. Die orthogonalen Parallelenscharen verwandeln sich in orthogonale Hyperbelscharen 3ter Ordnung, das Strahlenbüschel und die koncentrische Kreisschar um einen beliebigen Punkt in ein Hyperbelbüschel 3ter Ordnung nebst Lemniskatenschar 3ter Ordnung, wobei die 3 Brennpunkte (Wurzelpunkte) auf einem Kreise liegen und ein gleichseitiges

Dreieck bilden; das Kreisbüschel und die orthogonale Kreisschar gehen über in das Büschel der Lemniskaten 3ter Ordnung nebst Orthogonalschar, welches in Fig. 130 dargestellt ist, u. s. w. So erhält man weitere Strömungsprobleme und kann ebenso zu $Z = z^n$ und $Z = \sqrt[n]{z}$ übergehen.

181) Rückblick auf die logarithmische Abbildung.

Von besonderer Wichtigkeit ist die schon in Nr. 115 behandelte logarithmische Transformation, die darauf beruht, daſs man an Stelle von $X = a$ einsetzt $\lg r = a$ oder $r = e^a$, an Stelle von $Y = b$ dagegen den Bogen $\vartheta = b$. Dadurch wird die Parallelenschar in das System koncentrischer Kreise nebst Radien verwandelt. Aus $X_1 = a + d$ wird $\lg r_1 = a + d$, so daſs $r_1 = e^{a+d}$ wird, aus $X_1 - X = d$ also wird

$$\lg r_1 - \lg r = d \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r} = e^d,$$

so daſs

$$r_1 = re^d \quad \text{und} \quad r_1 - r = r(e^d - 1) = r\left(1 + \frac{d}{1} + \frac{d^2}{1 \cdot 2} + \dots - 1\right)$$
$$= rd\left(1 + \frac{d}{1 \cdot 2} + \frac{d^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right)$$

wird. Für unendlich kleines d wird also die eine Rechtecksseite gleich rd. Aus $Y_1 = b + d$ ergiebt sich $\vartheta_1 = b + d$, aus $Y_1 - Y = d$ also $\vartheta_1 - \vartheta = d$, für den Radius r also ebenfalls rd. Demnach geht ein kleines Quadrat in ein kleines Quadrat über. Damit ist auch dieser Übergang auf eine Transformation zurückgeführt, die mit der Formel

$$X + Yi = \lg[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta] = \lg r + \lg(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$
$$= \lg r + \lg e^{\vartheta i} = \lg r + \vartheta i$$

zusammenhängt, wobei $X = \lg r$ und $Y = \vartheta$ wird, da man die reellen Teile und ebenso die imaginären einander gleich zu setzen hat. In beiden Ebenen entsprechen einander folgende Kurven:

Z-Ebene.	z-Ebene.
1) $f(X, Y) = 0$	$f(\lg r, \vartheta) = 0$ oder $f\left(\lg\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right) = 0.$
2) $f(e^X, Y) = 0$	$f(r, \vartheta) = 0$ oder $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right) = 0.$

	Z-Ebene.	z-Ebene.
3)	$f(e^X, e^Y) = 0$	$\begin{cases} f(r, e^\vartheta) = 0 \\ \text{oder } f\left(\sqrt{x^2+y^2}, e^{\arctan\frac{y}{x}}\right) = 0. \end{cases}$
4)	$f(e^X \cos Y, e^X \sin Y) = 0$	$f(xy) = 0.$
5)	$f(R, \Theta) = 0$	$f\left[\sqrt{(\lg r)^2 + \vartheta^2}, \arctan\frac{\vartheta}{\lg r}\right] = 0.$

Aus der umgekehrten Abbildung

$$x + yi = e^{X+Yi} = e^X \cdot e^{Yi} = e^X(\cos Y + i \sin Y)$$

folgt nämlich

$$x = e^X \cos Y, \quad y = e^X \sin Y.$$

Außerdem ist nach 1)

$$R^2 = X^2 + Y^2 = (\lg r)^2 + \vartheta^2, \quad \Theta = \arctan\frac{Y}{X} = \arctan\frac{\vartheta}{\lg r}\cdot$$

Dadurch ist man imstande, aus jeder beliebigen Kurvenschar der einen Ebene die entsprechende der anderen leicht abzuleiten.

182) Ein Beispiel von praktischer Bedeutung. Das Kreisbüschel durch die Punkte $x = o$ und $x = +a$ auf der x-Achse der z-Ebene soll durch die Abbildung $Z = \lg z$ in die Z-Ebene übertragen werden. Dasselbe soll mit der orthogonalen Kreisschar geschehen.

Das Kreisbüschel hat die Gleichung

$$\vartheta_1 - \vartheta = c \quad \text{oder} \quad \arctan\frac{y}{x-a} - \arctan\frac{y}{x} = c.$$

Die linke Seite läßt sich schreiben

$$\arctan\left(\frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x}}\right) = \arctan\frac{a}{x^2 - ax + y^2} = \arctan\frac{a}{r^2 - ar\cos\vartheta}$$

Die Gleichung

$$\arctan\frac{a}{r^2 - ar\cos\vartheta} = c \quad \text{oder} \quad \frac{a}{r^2 - ar\cos\vartheta} = \tan c$$

geht über in

$$1) \qquad \frac{a}{e^{2X} - ae^X\cos Y} = \tan c \quad \text{oder} \quad \arctan\frac{a}{e^{2X} - ae^X\cos Y} = c.$$

Die Kreisschar hat die Gleichung

$$\frac{r}{r_1} = e^c \quad \text{oder} \quad \frac{r}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = e^c$$

oder endlich

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - 2\,ar\cos\vartheta + a^2}} = e^c.$$

Sie geht über in

$$2)\qquad \frac{e^X}{\sqrt{e^{2X} - 2\,a\,e^X\cos Y + a^2}} = e^c$$

oder durch Logarithmierung in

$$2^*)\qquad \lg e^X - \tfrac{1}{2}\lg\left[e^{2X} - 2\,ae^X\cos Y + a^2\right] = c.$$

Eine beliebig genaue Konstruktion der Kurven ergiebt sich folgendermaſsen. Man denke sich nach Fig. 85 die z-Ebene durch Polarkoordinaten, die Z-Ebene durch gewöhnliche Parallelenscharen in Quadrate eingeteilt. In der z-Ebene zeichne man die quadratische Einteilung durch Kreisbüschel und orthogonale Kreisschar mit den Grundpunkten $x = o$ und $x = +a$ der X-Achse mit anderer Farbe z. B. rot ein. Ist die ursprüngliche Teilung klein genug gewählt, so kann man die rote Zeichnung innerhalb jedes kleinen Quadrates der z-Ebene in das entsprechende Quadrat der Z-Ebene geometrisch ähnlich eintragen. In Fig. 134 ist das entstehende Gebilde dargestellt. Die Figur ist symmetrisch gegen AB, A_1B_1 und CD nach oben und unten fortzusetzen, so daſs unendlich viele Parallelstreifen entstehen. Die durch E und F gehenden Niveaulinien haben Asymptoten, die aus Gründen potentieller Gleichwertigkeit die beiden Halbstreifen halbieren. Die nach links fortgesetzte Figur geht allmählich in eine wirkliche Quadratteilung durch gerade Linien über.

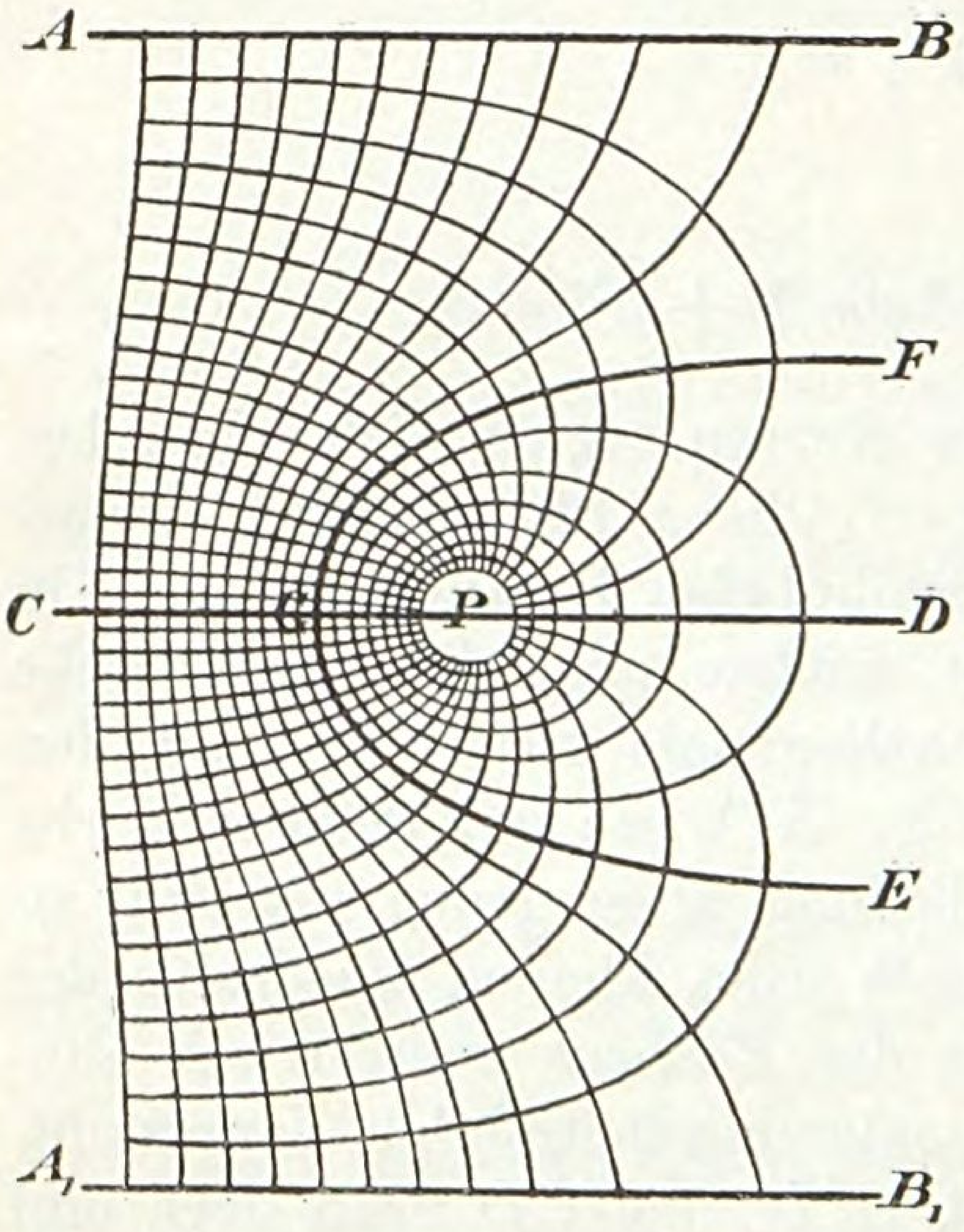
183) Deutungen der Figur. a) Man denke sich einen unbegrenzt langen Parallelstreifen von Metall, in den von links her Elektrizität einströme. Im Punkte P werde die gesamte Elektrizität abgeleitet. Die Figur stellt die Strom- und Niveaulinien des Problems und die entsprechende quadratische Einteilung dar. Die entsprechende Wärmeströmung ist mit denselben Worten darzustellen.

b) In einem flachen Kanale ströme von links her regelmäſsig Wasser heran, welches durch eine Pumpe bei P entfernt wird oder dort durch eine Bodenöffnung nach unten versinkt. Die Stromlinien und die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials sind dargestellt. Die Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate. Nach rechts hin befindet sich die Flüssigkeit in angenähertem, in sehr groſser Entfernung in absolutem Ruhezustande.

c) Der Streifen stelle nach der noch zu besprechenden Forchheimerschen Grundwassertheorie eine Grundwasser führende Sandschicht in einem Thale dar, dessen Begrenzung durch die Geraden

gegeben ist. Bei P werde der gesamte Grundwasserstrom durch eine Pumpe entfernt. Die Niveaulinien sind Linien gleichen Grundwasserstandes, bezogen auf die Neigungsebene des Thales, die anderen Linien sind Stromlinien des Grundwassers.

Fig. 134.



d) Man setze die Figur nach oben und unten durch Symmetrie periodisch fort, so daſs man beliebig viele Parallelstreifen erhält. Die kleinen Kreise bei den Punkten P sollen die Normalschnitte von sehr langen parallelen Drähten sein. Von links her nahe sich eine Induktionswirkung, die in idealer Weise von dem „Drahtgitter" vollkommen aufgesaugt werde. In dem Raume rechts von P werden die Dimensionen der „Quadrate" allmählich unendlich groſs gegen die der links davon liegenden. Die Influenzwirkungen werden also nach rechts hin allmählich unendlich schwach.

So erhält man eine Vorstellung von den Wirkungen der Schutzgitter, die folgende Bedeutung haben. Soll ein Körper, z. B. eine Magnetnadel, gegen Influenzwirkungen geschützt werden, so umschlieſst man ihn mit einem Metallgefäſse, mit dem er leitend verbunden ist. Beide haben dann gleiches Potential, z. B. durch Verbindung mit der Erde das Potential Null. Um jedoch die Nadel beobachten zu können, muſs man dem Gefäſs eine Öffnung geben. Diese Öffnung hat man jedoch mit einem Parallelgitter von Drähten zu versehen, welches die Induktionswirkungen in der oben beschriebenen Weise abhält.

184) Eine Modifikation des Beispiels. Man denke sich in der z-Ebene das Zweipunktproblem mit elektrischer Ein- und Ausströmung in denselben Punkten ($x = o$ und $x = a$), jedoch soll in $x = o$ doppelt soviel einströmen, als in $x = a$ abgeleitet wird, so daſs der Rest ins Unendliche abflieſsen muſs. Die Strom- und Niveaulinien des Problems sollen in die Z-Ebene übertragen werden.

Auflösung. Es handelt sich um die Niveaulinien

$$2\lg r - \lg r_1 = c \quad \text{oder} \quad \frac{r^2}{r_1} = e^c \quad \text{oder} \quad \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = e^c$$

und um die Stromlinien

$$2\vartheta - \vartheta_1 = c \quad \text{oder} \quad 2 \arctan \frac{y}{x} - \arctan \frac{y}{x-a} = c.$$

Die entsprechenden Kurven erhalten die Gleichungen

$$\frac{e^{2X}}{\sqrt{e^{2X} - 2ae^X \cos Y + a^2}} = e^c,$$

was rechts und links logarithmiert werden kann, und

$$2 \arctan \frac{e^X \sin Y}{e^X \cos Y} - \arctan \frac{e^X \sin Y}{e^X \cos Y - a} = c,$$

oder

$$2Y - \arctan \frac{e^X \sin Y}{e^X \cos Y - a} = c.$$

Die Zeichnung in der z-Ebene ist nach der in Nr. 182 angegebenen Methode anzufertigen und in die Z-Ebene wie dort zu übertragen. Man erhält die Strömung in einem Parallelstreifen, die bei P zur Hälfte aufgesaugt wird und zur anderen Hälfte weiter fliefst, oder die eines Schutzgitters, welches die Influenzwirkungen nur zur Hälfte aufhebt.

An Stelle des Faktors 2 kann selbstverständlich jeder andere treten, so dafs auch das allgemeinere Problem gelöst ist. Auch jedes andere Mehrpunktproblem der z-Ebene kann in die Z-Ebene übertragen werden.

Eine andere Behandlungsweise der Theorie der Schutzgitter sehe man bei Maxwell-Weinstein I Seite 323 bis 329 nach.

185) **Bemerkungen.** Kartographische Bedeutung hat diese Übertragungsweise noch dadurch, dafs man sofort die Gleichungen der Kurven aufstellen kann, die irgend welchen auf der Polarkarte oder der Kugeloberfläche gegebenen auf der Mercatorkarte entsprechen. Auch könnte man Mercatorkarten anfertigen, bei denen nicht die Pole, sondern irgend ein Punkt des Globus nebst Gegenpunkt in unendliche Entfernung fällt, so dafs z. B. ein Kontinent, wie Amerika, mit geringeren Verzerrungen dargestellt werden könnte.

Eine andere Deutung von Fig. 134 erhält man durch folgendes Vertauschungsproblem: Längs AB ströme Elektrizität ein, längs $A_1 B_1$ aus, durch einen bis ins Unendliche fortgesetzten Schnitt längs der Kurven von F über G nach E werde sie gezwungen, sich in entsprechenden Bogen zu bewegen. Die Lösung liegt vor. Auch das Problem Einströmung in PD, Ausströmung in PG ist für den Ausschnitt $\widehat{FGE}$ gelöst.

186) Newtonsches Potential gewisser Kurven. In Band I ist gezeigt, wie gewisse Flächen ein mit Hilfe der Abbildungen $Z = z^2$ und $z = \sqrt{Z}$ leicht zu bestimmendes Potential haben. Hier läfst sich entsprechendes für gewisse Kurven ableiten. Was nämlich die Gröfsenverhältnisse entsprechender Quadrate in beiden Ebenen anbetrifft, so sind die Dimensionen am Einheitskreise der Z-Ebene gleich denen des Streifens, dort also ist das Bogenelement s der einen Ebene gleich dem Elemente S der andern. In der Entfernung r vom Nullpunkte ist das Element $s_1 = s \cdot r$, also ist dort $\frac{s_1}{r} = S_1$. Für eine ganze Kurve und ihr Bild ist also

$$\sum \frac{s}{r} = \sum S.$$

Folglich: Die Länge der ganzen Kurve in der Z-Ebene ist gleich dem Newtonschen Potentialwerte der entsprechenden Kurve in der z-Ebene für den Nullpunkt.

Die den Streifen unter 45^0 schneidende Gerade z. B. hat überall die Länge $2\pi\sqrt{2}$. Ein einzelner Umgang einer unter 45^0 schneidenden logarithmischen Spirale, wo sie auch beginnen möge, hat daher im Nullpunkte den Potentialwert $2\pi\sqrt{2}$. Allgemein, bei Neigung α, handelt es sich um $\frac{2\pi}{\sin\alpha}$ für Länge bezw. Potentialwert. Ist u der Umfang eines geradlinigen Gebildes der Z-Ebene, so ist der Potentialwert des aus Bogen von logarithmischen Spiralen bestehenden entsprechenden Gebildes der Z-Ebene für den Nullpunkt ebenfalls gleich u.

Kongruente Gebilde im Streifen haben gleiche Umfänge. Ihre entsprechenden Gebilde haben im Punkte o denselben Potentialwert. Entsteht das eine Gebilde der Z-Ebene aus dem andern durch Parallelverschiebung in der Richtung des Streifens, so sind die beiden entsprechenden der Z-Ebene einander ähnlich mit O als äufserem Ähnlichkeitspunkt, sie haben aber übereinstimmende Potentialwerte in O.

(Umgekehrt ist $\sum s = \sum Sr$, also da r in e^X übergeht

$$\sum s = \sum Se^X,$$

diese Beziehung scheint aber nicht nutzbar zu sein. Die Vergleichung von Flächen führt auf $\sum \frac{f}{r^2} = \sum F$, so dafs jede Fläche der Z-Ebene gleich dem Polarmomente (-2^{ter}) Ordnung der entsprechenden Fläche der z-Ebene in Bezug auf den Nullpunkt ist.)

187) Die allgemeine isogonale Transformation.

Ganz allgemein handelt es sich um Abbildungen mittels der Funktionen komplexen Arguments

1) $$X + Yi = f(x + yi).$$

Zu jeder solchen gehört eine konjugierte Funktion

2) $$X - Yi = f_1(x - yi),$$

in der auch die komplexen Konstanten konjugiert zu nehmen sind.

Addition giebt

$$2X = f(x + yi) + f_1(x - yi),$$

Subtraktion

$$2Y = f(x + yi) - f_1(x - yi).$$

Demnach entsprechen den Parallelenscharen

$$X = a, \quad Y = b$$

die Kurvenscharen

$$\frac{f(x + yi) + f_1(x - yi)}{2} = a, \quad \frac{f(x + yi) - f_1(x - yi)}{2} = b.$$

Durch Multiplikation von 1) und 2) folgt noch

3) $$X^2 + Y^2 = f(x + yi) f_1(x - yi),$$

so daſs den koncentrischen Kreisen $R = c$ Kurven

$$\sqrt{f(x + yi) f_1(x - yi)} = c$$

entsprechen. Durch Division folgt hingegen

$$\frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{f(x + yi)}{f_1(x - yi)},$$

so daſs

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{X + Yi}{X - Yi} = \frac{1}{2i} \lg \frac{f(x + yi)}{f_1(x - yi)}$$

oder

$$\arctan \frac{Y}{X} = \frac{1}{2i} [\lg f(x + yi) - \lg f_1(x - yi)].$$

Überall hebt sich das Imaginäre weg. Den Kreisen $\lg R = c$ oder $R = e^c$ entsprechen die Kurven

$$\frac{1}{2} [\lg f(x + yi) + \lg f_1(x - yi)] = c,$$

den Geraden

$$\arctan \frac{Y}{X} = \vartheta$$

die Kurvenscharen

$$\frac{1}{2i} [\lg f(x + yi) - \lg f_1(x - yi)] = \vartheta.$$

Auch hierbei geht die quadratische Einteilung wieder in eine solche über. [Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand würde Kenntnisse aus der höheren Analysis, besonders solche über Differentialquotienten und Integrale der Funktionen komplexen Arguments beanspruchen. In des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ ist der Gegenstand möglichst elementar behandelt worden. Dort zeigt sich, dafs durch Transformation mittels der Funktionen komplexen Arguments jedes Strömungsnetz wieder in ein solches übergeht.]

Man kann aus solchen Beziehungen mancherlei Schlüsse ziehen. Liegen z. B. alle Einströmungs- bezw. Ableitungsstellen auf einer Geraden, so gehört offenbar die Gerade, gegen die Symmetrie stattfindet, zu den Stromlinien. Durch die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ geht die Gerade in einen Kreis über. Folglich: Liegen drei oder mehr Einströmungs- und auch Ausströmungspunkte auf einem Kreise (sind aber aufserdem keine vorhanden), so gehört der Kreis zu den Stromlinien. Der Symmetrie gegen die Gerade entspricht Reciprozität gegen den Kreis. Durch drei Punkte läfst sich stets ein Kreis legen, folglich gehört zu jedem Dreipunktproblem ein Kreis und gegen diesen findet Reciprozität statt, so dafs man sich nur um das Innere des Kreises zu kümmern braucht.

Liegen die Ausströmungspunkte symmetrisch gegen die Einströmungspunkte und entsprechen auch die Elektrizitätsmengen dieser Symmetrie, so gehört die Symmetrieachse zu den Niveaulinien. Liegen sie reciprok gegen jene, so gehört der Inversionskreis zu den Niveaulinien, und gegen diesen findet überhaupt Reciprozität statt. Vorausgesetzt wird dabei, dafs je zwei reciproke Punkte gleiche Mengen ein- bezw. ableiten.

188) Inversionsbeziehungen und elektrische Bilder in der Ebene. Die geometrischen und physikalischen Beziehungen sind bei den zweidimensionalen Problemen zum Teil andere, als bei den dreidimensionalen, wie sie in Kap. VII entwickelt wurden.

Jedes Bogenelement s geht nach Nr. 139 und Fig. 105 durch Inversion wieder über in

$$s_1 = s \cdot \frac{OB}{OA_1} = s \frac{OA}{OB_1}$$

oder

$$1) \qquad s_1 = s \frac{\varrho^2}{OA^2} = s \frac{OA_1^2}{\varrho^2}.$$

Denkt man sich über der Zeichnung Cylinder von unbegrenzter Höhe errichtet, so gilt diese Beziehung auch von gleich hohen Cylinderflächen, so dafs

1*) $$F_1 = F \cdot \frac{\varrho^2}{OA^2} = F \frac{OA_1^2}{\varrho^2}$$

ist.

Kleine „Quadrate" der Ebene gehen wieder in solche über, für sie ist aber

2) $$F_1 = F \frac{\varrho^4}{OA^4} = F \frac{OA_1^4}{\varrho^4},$$

ebenso für die darüber stehenden Körper gleicher Höhe

2*) $$J_1 = J \frac{\varrho^4}{OA^4} = J \frac{OA_1^4}{\varrho^4}.$$

Will man durch die Elektrizitätsbelegung E der zur Cylinderachse parallelen Geraden und die der zugeordneten Geraden E_1 den Kreis als Kurve konstanten Potentials erhalten, so mufs es sich um das symmetrische Zweipunktproblem handeln. Die beiden elektrischen Mengen sind also gleich grofs zu wählen. Folglich: Das Bild einer elektrischen Belegung ist hier eine gleich grofse Menge Elektrizität. Also

3) $$E_1 = E.$$

Aus

$$E_1 = E$$

und

$$s_1 = s \frac{\varrho^2}{OA^2} = s \frac{OA_1^2}{\varrho^2}$$

folgt durch Division

$$\frac{E_1}{s_1} = \frac{E}{s} \cdot \frac{OA^2}{\varrho^2} = \frac{E}{s} \frac{\varrho^2}{OA_1^2},$$

folglich wird das Bild einer Dichte $\delta = \frac{E}{s}$

4) $$\delta_1 = \delta \frac{OA^2}{\varrho^2} = \delta \frac{\varrho^2}{OA_1^2}.$$

Dasselbe gilt von der Dichte der Flächenbelegung eines Cylinderelements.

Dagegen wird für die Dichte der Belegung eines Flächenelements der Ebene oder eines zugehörigen Körperelements

5) $$\delta_1 = \delta \frac{OA^4}{\varrho^4} = \delta \frac{\varrho^4}{OA_1^4}.$$

189) **Aufgabe.** Das Problem des homogen belegten Cylinders abzubilden.

Auflösung. In der Schnittebene geht der Kreis in einen Kreis, die koncentrische Kreisschar in eine excentrische, das reguläre Strahlenbüschel der Kraftlinien in ein Kreisbüschel über, dessen Tangenten in den Büschelpunkten reguläre Strahlenbüschel sind. Die gleichen Bogenelemente des Kreises gehen nach 1) in solche über, die sich verhalten wie die Quadrate der Entfernungen OA (oder auch PA, wenn P der zugeordnete Punkt zu O im neuen Kreise ist). Die Dichtigkeiten der neuen Belegung sind also umgekehrt proportional diesen Entfernungsquadraten. Tritt an Stelle des Kreises eine Gerade, so ist das Gesetz leicht selbständig nachzuweisen

$$\left(p = \frac{1}{r} \cos a = \frac{1}{r} \cdot \frac{e}{r} = \frac{e}{r^2}\right).$$

Die Wirkung des so belegten Cylinders (Kreises) nach aufsen läfst sich durch die der Geraden des inneren Büschelpunktes ersetzen, wobei die Quantitäten beider Belegungen gleich sind. Die Wirkung nach innen läfst sich ebenso durch die Belegung der Geraden des äufseren Büschelpunkts ersetzen. Hier lassen sich die früheren Betrachtungen über centrobarische Belegungen wiederholen.

Für den massiven Cylinder erhält man Dichtigkeiten, die umgekehrt proportional der 4^{ten} Potenz der Entfernung sind.

190) **Bemerkung.** Bei dem dreidimensionalen Probleme stimmten die Elektrizitätsmengen der Bilder nicht mit denen der Originalpunkte überein, infolge dessen ging dort ein Teil der Elektrizität nach dem Unendlichen ab, und das Innere der Kugel hatte Niveauflächen, die dem Äufseren nicht reciprok waren. Hier fällt dieser Umstand weg, jedes E_1 wird gleich E, also gehen jetzt durch die Abbildung die Niveaulinien eines Problems in die Niveaulinien des neuen Problems über. So tritt eine wesentliche Vereinfachung ein. Im Raume findet, wenn eine Kugel zu den Niveauflächen eines Problems gehört, im allgemeinen keine Reciprozität statt, wohl aber ist dies mit dem Kreise in der Ebene der Fall. Dieser Unterschied ist von wesentlicher Bedeutung. Weiteres über die Inversion in zweidimensionalen Problemen findet man in der „Theorie der isogonalen Verwandtschaften“. Hier soll aus Raumgründen nicht näher darauf eingegangen werden.

191) Ein wichtiges Mehrpunktproblem.

Unter den Mehrpunktproblemen ist folgendes von Bedeutung. In den Punkten $y = \pm 1$ der Y-Achse ströme Elektrizität in gleichen

Mengen ein, im Nullpunkte des Koordinatensystems werde sie zur Hälfte abgeleitet, der Rest fließt nach dem unendlichen Bereiche ab. Die Gleichungen werden

1) $\lg r_1 + \lg r_{-1} - \lg r_0 = c$ oder $\lg \frac{r_1 r_2}{r_0} = c$, oder $\frac{r_1 r_2}{r_0} = e^c$.

2) $\vartheta_1 + \vartheta_{-1} - \vartheta_0 = c$.

Die Konstruktion der Kurven geschieht durch die entsprechenden Kreisscharen und Strahlenbüschel.

Bei dem Einpunktproblem war dagegen $\lg R = c$, $\Theta = c$.

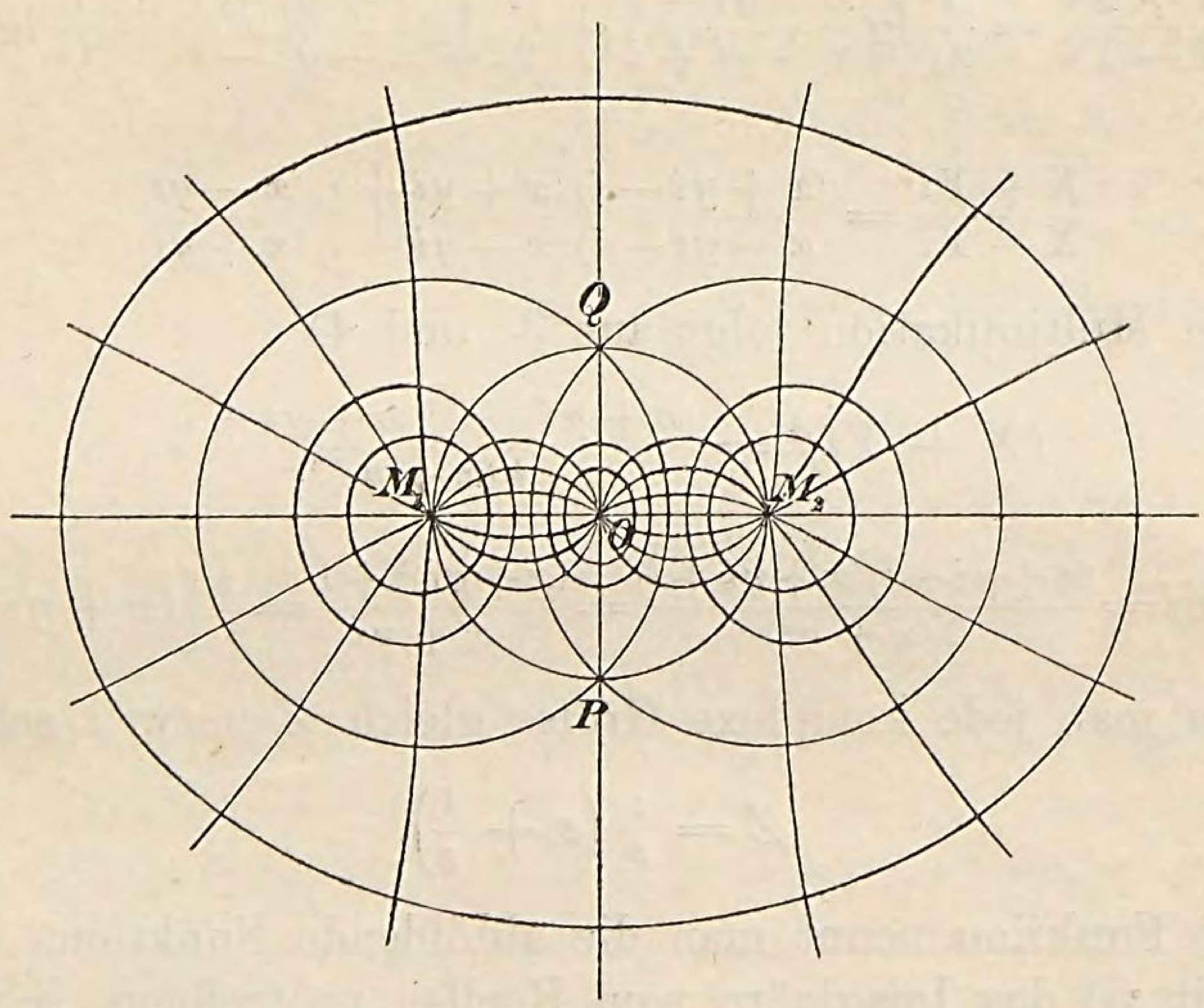
Zwischen den Polarkoordinaten der letzteren und denen der ersteren Ebenen finden also die Beziehungen

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_0} \quad \text{und} \quad \Theta = \vartheta_1 + \vartheta_{-1} - \vartheta_0$$

statt.

In Fig. 135 ist die eine Ebene dargestellt. Es werde der Bequemlichkeit halber $R = \frac{r_1 r_2}{2 r_0}$ gesetzt, was nur eine Verkleinerung des Maßstabes auf die Hälfte in der XY-Ebene bedeutet.

Fig. 135.



In gewöhnlichen Koordinaten lautet dann die Beziehung

1) $$X^2 + Y^2 = \frac{[x^2 + (y-1)^2]\,[x^2 + (y+1)^2]}{4\,(x^2 + y^2)}$$

2*) $$\arctan\frac{Y}{X} = \arctan\frac{y-1}{x} + \arctan\frac{y+1}{x} - \arctan\frac{y}{x}$$

$$= \arctan\frac{\frac{y-1}{x}+\frac{y+1}{x}}{1-\frac{y-1}{x}\cdot\frac{y+1}{x}} - \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{2xy}{x^2-y^2+1} - \arctan\frac{y}{x}$$

$$= \arctan\frac{\frac{2xy}{x^2-y^2+1}-\frac{y}{x}}{1+\frac{2xy}{x^2-y^2+1}\cdot\frac{y}{x}} = \arctan\frac{2x^2y-y(x^2-y^2+1)}{x(x^2-y^2+1)+2xy^2}$$

oder

2) $$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}\cdot\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

Will man erfahren, was den Kurven $X = a$, $Y = b$ entspricht, so hat man Y und X aus den beiden Gleichungen zu berechnen, was keine Schwierigkeiten macht.

Statt des gewöhnlichen Weges sei auf den Weg der Zerlegung in Produkte komplexer Faktoren aufmerksam gemacht. Man kann statt 1) schreiben

3) $$(X+Yi)(X-Yi) = \frac{(x+yi-i)(x-yi+i)(x+yi+i)(x-yi-i)}{4(x+yi)(x-yi)}.$$

Statt 2*) kann man schreiben

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{X+Yi}{X-Yi} = \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi-i}{x-yi+i} + \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi+i}{x-yi-i} - \frac{1}{2i}\lg\frac{x+yi}{x-yi}$$

oder

4) $$\frac{X+Yi}{X-Yi} = \frac{(x+yi-i)(x+yi+i)(x-yi)}{(x-yi-i)(x-yi+i)(x+yi)}.$$

Durch Multiplikation folgt aus 3) und 4)

$$(X+Yi)^2 = \frac{(x+yi-i)^2(x+yi+i)^2}{4(x+yi)^2}$$

oder

5) $$X+Yi = \frac{(x+yi-i)(x+yi+i)}{2(x+yi)} = \frac{(x+yi)^2+1}{2(x+yi)} = \frac{1}{2}\left[(x+yi)+\frac{1}{x+yi}\right],$$

oder wenn man jede komplexe Gröfse gleich Z bezw. z setzt,

6) $$Z = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Diese Funktion nennt man die abbildende Funktion.

Um in 5) das Imaginäre vom Reellen zu trennen, schreibe man

$$X+Yi = \frac{1}{2}\left[x+yi+\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}\right] = \frac{1}{2}\left[x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x(x^2+y^2)+x}{x^2+y^2}+\frac{y(x^2+y^2)-yi}{x^2+y^2}\right].$$

Daraus folgt

$$7)\qquad X = \frac{x}{2}\,\frac{(x^2+y^2)+1}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,$$

$$8)\qquad Y = \frac{y}{2}\,\frac{(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

So ist die Bestimmung von X und Y ohne umständliche Rechnungen erfolgt und das Resultat in die einfachste Gestalt gebracht. Die Kurven, die den Geraden $X = a$, $X = b$ der X-Ebene entsprechen, sind in der Zeichnung (Fig. 136) dargestellt. Für $Y = 0$ erhält man die Kurve

$$\frac{y}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{oder} \quad x^2+y^2-1 = 0,$$

d. h. einen Kreis mit dem Radius 1, gegen den Reciprozität stattfindet. (Die Figur findet sich auch in der Dissertation des Dr. Hans Meyer, Zürich 1879.)

192) Deutungen der Figur. a) Man denke sich die homogene Strömung eines breiten Stromes von links nach rechts gehend. In der Mitte des gezeichneten Kreises werde durch ein Schaufelrad oder durch Dampfkraft eine kräftige Gegenströmung erzeugt, die kontinuierlich Wasser nach links treibt und von rechts her ansaugt. Diese Strömung denke man sich in der ganzen Tiefe wirkend. Ein Stromfaden geht von der Mitte O nach A, spaltet sich dort in einen über B und einen über D nach C und dann nach O zurückgehenden Faden von kreisförmiger Gestalt. Innerhalb dieses Kreises spielen sich lokale Wirbelbewegungen*) von der gezeichneten Gestalt ab. Der Kreis bezw. Kreiscylinder zwingt den Strom, um ihn herumzugehen, wie um ein festes Hindernis. Alle Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der kleinen Quadrate, die durch die Stromlinien und die orthogonale Kurvenschar (Niveaulinien oder Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials) gebildet werden. Daher herrscht bei A und C Aufhebung der Geschwindigkeiten.

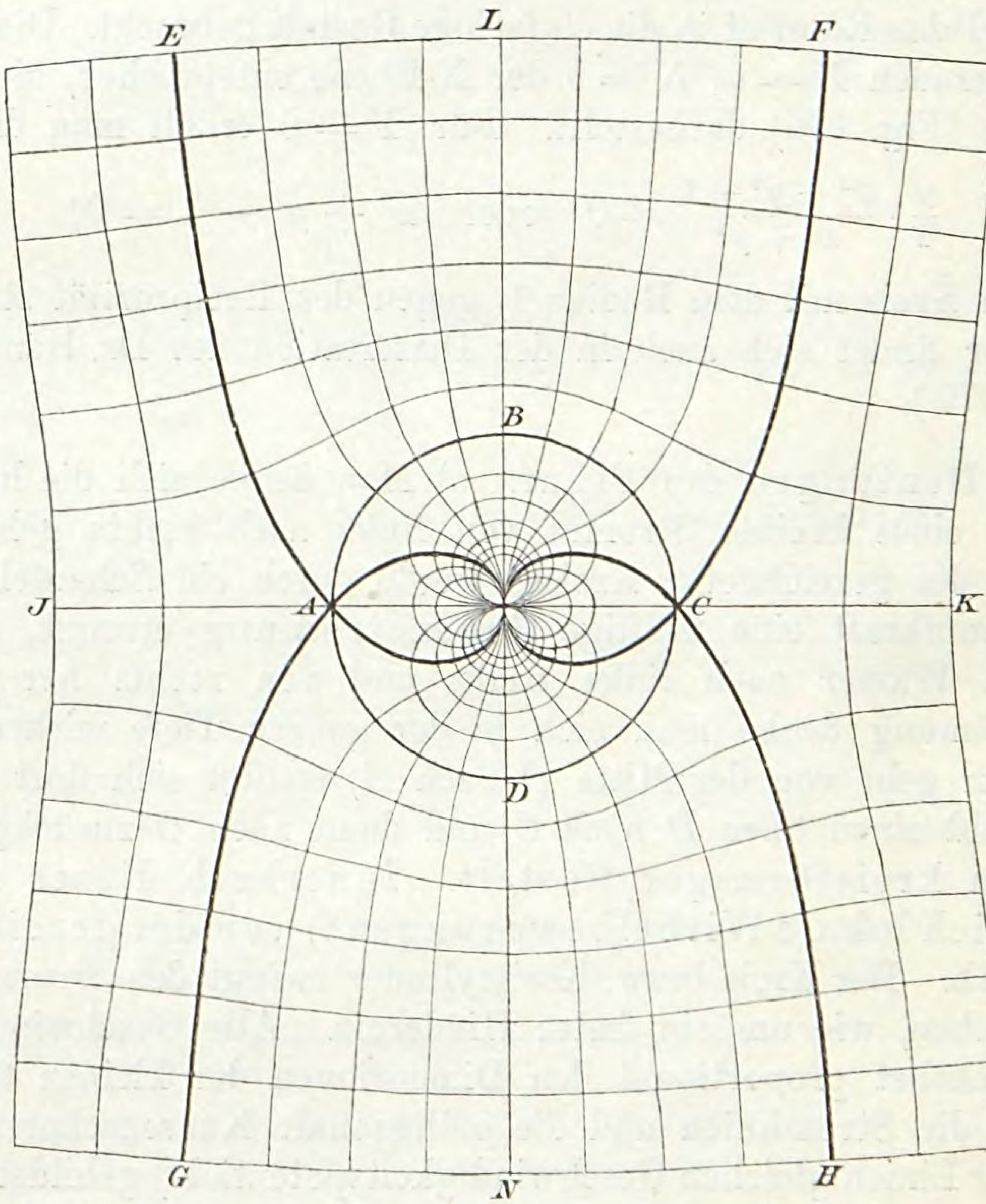
(Ein Vorlesungsversuch mit Wasser ließe sich wohl für kurze Zeit arrangieren, besonders wenn man nach Eintreten des stationären Zustandes im Wirbelraume andere Färbung hervorbringt. Selbstverständlich glückt dies nur angenähert, da hier von einer idealen Flüssigkeit ohne Reibung und ohne Molekulardrehungen die Rede ist.)

Statt der Flüssigkeitsströmung könnte man in ein breites Band, in dem Elektrizität von links nach rechts strömt, unmittelbar links von O Elektrizität einströmen, unmittelbar rechts von O abströmen lassen. Die Stromlinien sind dieselben. Auch eine entsprechende Wärmeströmung kann man sich denken.

*) Nicht im Helmholtzschen, sondern im vulgären Sinne.

Statt dessen könnte man in das homogene erdmagnetische Feld einen kleinen Magnet stellen, dessen Lage der labilen Gleichgewichtslage des Kompaſs entspricht. Dann gilt aber die Zeichnung nur angenähert, denn das Problem wird dreidimensional.

Fig. 136.



Später wird gezeigt werden, daſs man sich rechts und links von O einen auf- und einen niedergehenden elektrischen Strom in Drähten denken kann, die normal zur Zeichnungsebene stehen. Die Kraftlinien der elektromagnetischen Wirkungen geben mit denen des homogenen, erdmagnetischen Feldes die vorliegende Zeichnung.

Man denke sich um den Mittelpunkt O einen gröſseren Kreis, als den vorliegenden, geschlagen. Er soll einen diamagnetischen Cylinder bedeuten, der in ein homogenes Feld gestellt ist. Dieser zwingt die Kraftlinien des letzteren zum Abweichen von der ursprünglichen Richtung, so daſs eine geringere Anzahl horizontal durch ihn geht. Die Richtung innerhalb des Körpers ist horizontal in die

Zeichnung einzutragen. (Die entsprechende Figur befindet sich an späterer Stelle und auch in den Lehrbüchern.) Ein diamagnetischer Cylinder verhält sich also so, als ob in seinem Centrum ein kleiner Magnet in labiler Gleichgewichtslage angebracht wäre. Das Verhältnis der Anzahl von Kraftlinien, die jetzt den senkrechten Durchmesser des Kreises passieren, zu der Anzahl, die vorher durch dieselbe Linie ging, giebt den Faktor μ der magnetischen Permeabilität, der hier kleiner als 1 ist. Die Lösung des magnetischen Problems ist nur eine angenäherte, weil die Aufgabe eigentlich eine dreidimensionale ist.

b) Das Vertauschungsproblem. Man denke sich jetzt die Strömung in der Zeichnung vertikal nach unten gerichtet, und bei O eine gleichgerichtete stärkere Strömung durch Schaufelrad oder mittels eines Cylinders hervorgebracht. Der Cylinder saugt dann einen Teil der Hauptströmung in sich ein, stöfst aber nach unten hin so viel aus, dafs die Kraftlinien sich wieder Raum schaffen. Die Grenzlinien der Einsaugung gehen durch A und C, erhalten dort einen rechtwinkligen Knick und gehen im Bogen nach O. Die ausgestofsene Strömung ist durch symmetrische Linien, die ebenfalls nach A und C gehen, begrenzt. Der lokale Wirbel findet innerhalb der beiden Flächen statt, die durch die von O nach A und C gehenden Bogen begrenzt sind.

Die entsprechenden Deutungen über stationäre elektrische oder Wärmeströmung, über Kraftlinien magnetischer oder elektromagnetischer Art im homogenen Felde bei stabiler Gleichgewichtslage des Magneten lege sich der Leser selbst zurecht. Ein gröfserer um O geschlagener Kreis wird von den Kraftlinien der Hauptströmung so getroffen, dafs man das Bild der Einwirkung eines paramagnetischen Körpers erhält, der eine gröfsere Anzahl von Kraftlinien zum Durchgang zwingt, als dem entsprechenden leeren Raume zukommen würden. In ihm selbst sind die Linien vertikale Gerade. (Fall $\mu > 1$.)

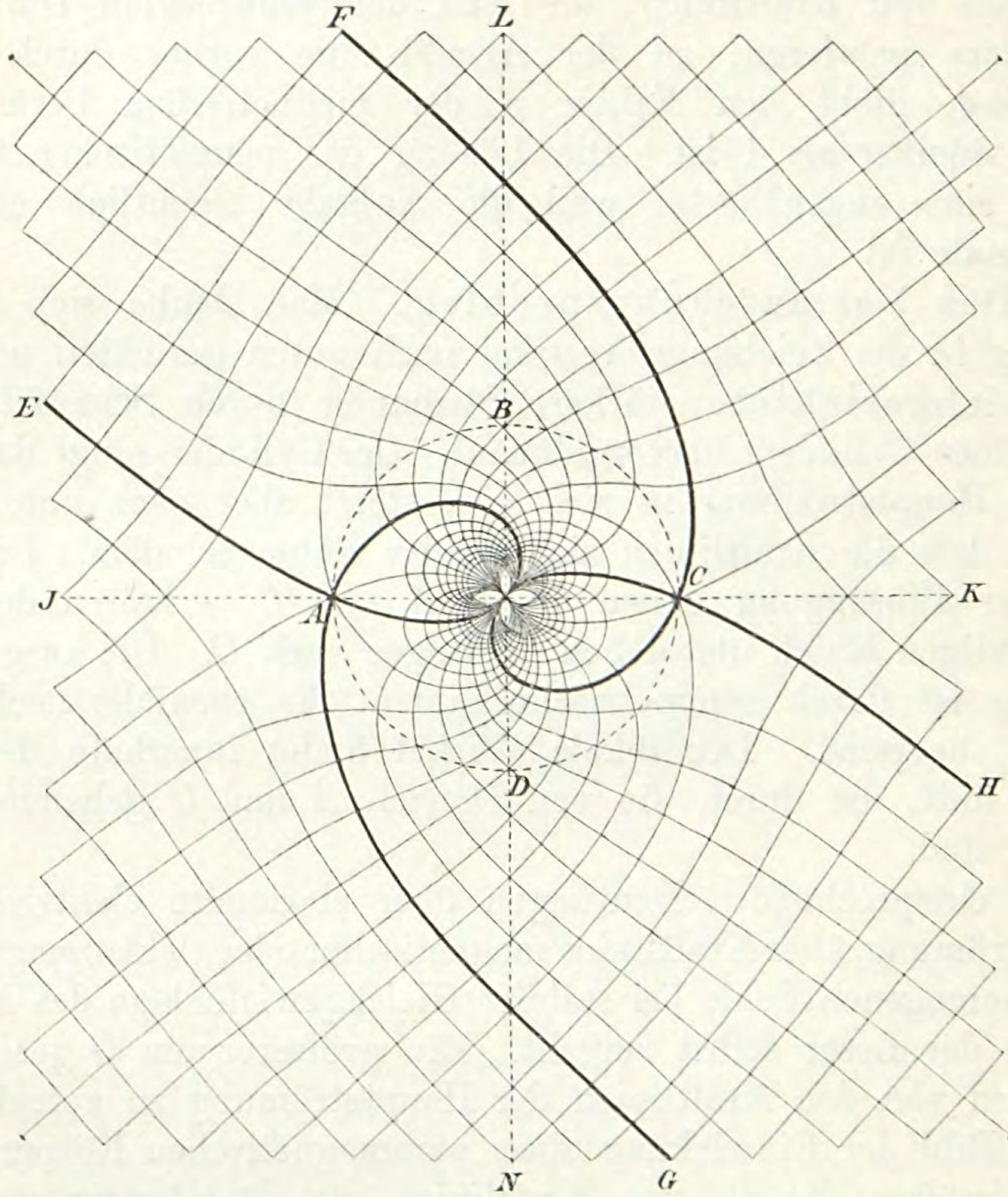
c) Das Diagonalproblem. Fig. 137 ist dadurch entstanden, dafs in das Quadratnetz der vorigen die Diagonalen eingetragen sind, die wiederum ein Quadratnetz geben.

Die neuen Deutungen ergeben sich dadurch, dafs man eine in der Zeichnung unter 45^0 geneigte homogene Hauptströmung bei O durch eine Lokalströmung stört, die senkrecht dagegen gerichtet ist. Die Grenzlinien der Ansaugung und Ausstofsung sind in der Zeichnung markiert, ebenso die Kurven, welche die lokalen Wirbel einschliefsen. Die übrigen Deutungen liegen auf der Hand.

Das Vertauschungsproblem giebt hier nichts Neues, sondern eine symmetrische Zeichnung, was im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht.

Beide Zeichnungen entsprechen den Tafeln XVI und XVII bei Maxwell-Weinstein, wo die leer gelassenen Cylinder das Verständnis erschweren.

Fig. 137.

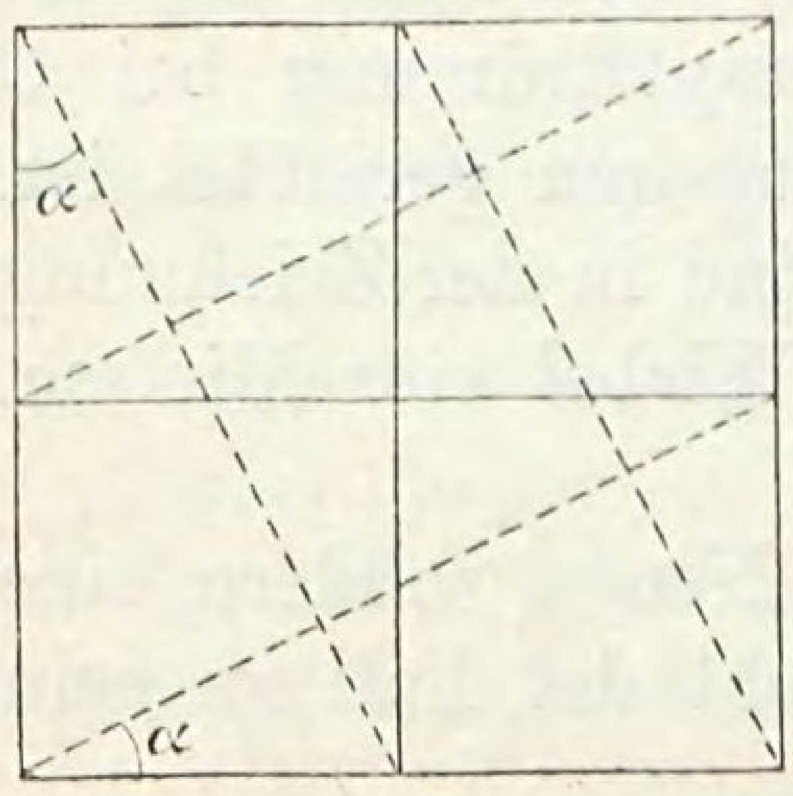


d) Andere Diagonalprobleme. In ähnlicher Weise giebt jede isothermische Quadratteilung der Ebene zu einem Strömungsproblem, einem Vertauschungsproblem und einem Diagonalproblem Anlafs. Man kann aber auch andere Diagonalprobleme ableiten, indem man z. B. in das ursprüngliche Quadratnetz orthogonale Rechtecksdiagonalen z. B. für

$$\tan \alpha = \tan \alpha_1 = \tfrac{1}{2}$$

einzeichnet, wie es Fig. 138 andeutet.

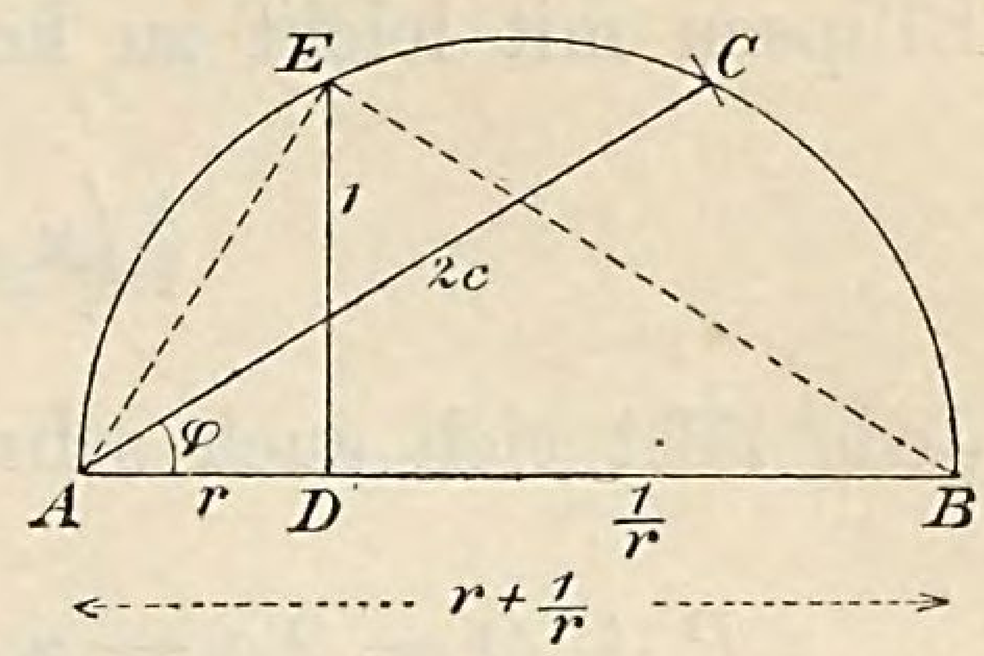
Fig. 138.



193) Die selbständige Konstruktion der Kurven in Fig. 136 kann folgendermafsen

erfolgen. Nach Festsetzung der Einheit DE bildet man zu einer beliebigen Länge r den reciproken Wert $\frac{1}{r}$ und trägt $2c$ als Sehne AC in einen Halbkreis vom Durchmesser $AB = r + \frac{1}{r}$ ein. Dies giebt einen Winkel $BAC = \varphi$, für den

Fig. 139.



$$\cos\varphi = \frac{2c}{r + \frac{1}{r}}$$

ist, was der Gleichung 7) entspricht. So erhält man für jedes r und c das zugehörige φ, und damit sind beliebig viele Punkte einer Kurve von der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi = c$$

konstruiert. Ebenso verfährt man mit $r - \frac{1}{r}$, was auf Kurven von der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\varphi = c$$

führt.

194) Übergang zu den elliptischen Koordinaten. Der Einheitskreis der z-Ebene entspricht bei vorliegender Abbildung dem horizontalen (doppelt zu denkenden) Durchmesser des Einheitskreises der Z-Ebene. So liegt es nahe zu untersuchen, welche Kurven der Z-Ebene den Polarkoordinaten der z-Ebene überhaupt entsprechen.

Man gehe aus von den aus 7) und 8) folgenden Beziehungen

$$\frac{X}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)} = \cos\varphi, \quad \frac{Y}{\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)} = \sin\varphi.$$

Um φ zu entfernen, quadriere man beide Seiten jeder Gleichung und bilde durch Addition eine neue Gleichung. Bei dieser steht rechts $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$ oder 1, so dafs man erhält

$$9)\qquad \frac{X^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{Y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2\right]} = 1.$$

Dies ist aber für gegebenes r die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad b = \tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

Da

$$a^2 - b^2 = \tfrac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 1$$

ist, so liegen die Brennpunkte an den Stellen ± 1 der X-Achse Also:

Der koncentrischen Kreisschar $r = \varkappa$ um den Nullpunkt der z-Ebene entspricht in der andern Ebene eine Schar konfokaler Ellipsen mit leicht zu konstruierenden Halbachsen

$$\tfrac{1}{2}\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{1}{\varkappa}\right).$$

Jede läſst sich auch schreiben nach der Vektorengleichung

$$P + Q = 2a = \varkappa + \frac{1}{\varkappa} \quad \text{oder} \quad \frac{P+Q}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right) = a.$$

Um aus 7) und 8) die Gröſse r zu eliminieren, gehe man aus von den Formen

$$\frac{X}{\cos\varphi} = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad \frac{Y}{\sin\varphi} = \tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right),$$

quadriere beiderseits und bilde eine neue Gleichung durch Subtraktion. Rechts steht dann

$$\tfrac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 1,$$

so daſs die Gleichung lautet

$$10)\qquad \frac{X^2}{\cos^2\varphi} - \frac{Y^2}{\sin^2\varphi} = 1.$$

Der Geraden $\varphi = \gamma$ durch den Nullpunkt der z-Ebene entspricht also in der Z-Ebene eine Hyperbel. Ihre Halbachsen a und b geben die Beziehung

$$a^2 + b^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

demnach liegen die Brennpunkte an den Stellen ± 1 der X-Achse, und γ ist zugleich die Neigung der Asymptote. Dem Strahlenbüschel $\varphi = \gamma$ durch den Nullpunkt der z-Ebene entspricht also eine Schar konfokaler Hyperbeln. Jede davon läſst sich nach der Vektorengleichung schreiben in der Form

$$P - Q = 2a = 2\cos\gamma \quad \text{oder} \quad \frac{P-Q}{2} = \cos\gamma.$$

Aus

$$\frac{P+Q}{2} = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{und} \quad \frac{P-Q}{2} = \cos\varphi$$

folgt

$$r = \frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1} \quad \text{und} \quad \varphi = \arccos\frac{P-Q}{2}.$$

Jeder Kurve $f(r, \varphi) = o$ der z-Ebene entspricht also eine Kurve

$$f\left[\left(\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1}\right),\ \arccos\frac{P-Q}{2}\right] = o$$

der Z-Ebene, jeder Kurve

$$f\left[\tfrac{1}{2}\left(r + \tfrac{1}{r}\right),\ \cos\varphi\right] = o$$

der z-Ebene eine Kurve

$$f\left[\frac{P+Q}{2},\ \frac{P-Q}{2}\right] = o$$

der Z-Ebene. Setzt man die Halbachse $\frac{P+Q}{2}$ gleich einem Parameter a, die der Hyperbel gleich einem Parameter α, so würde es sich handeln um $f(a, \alpha) = o$.

Fig. 140.

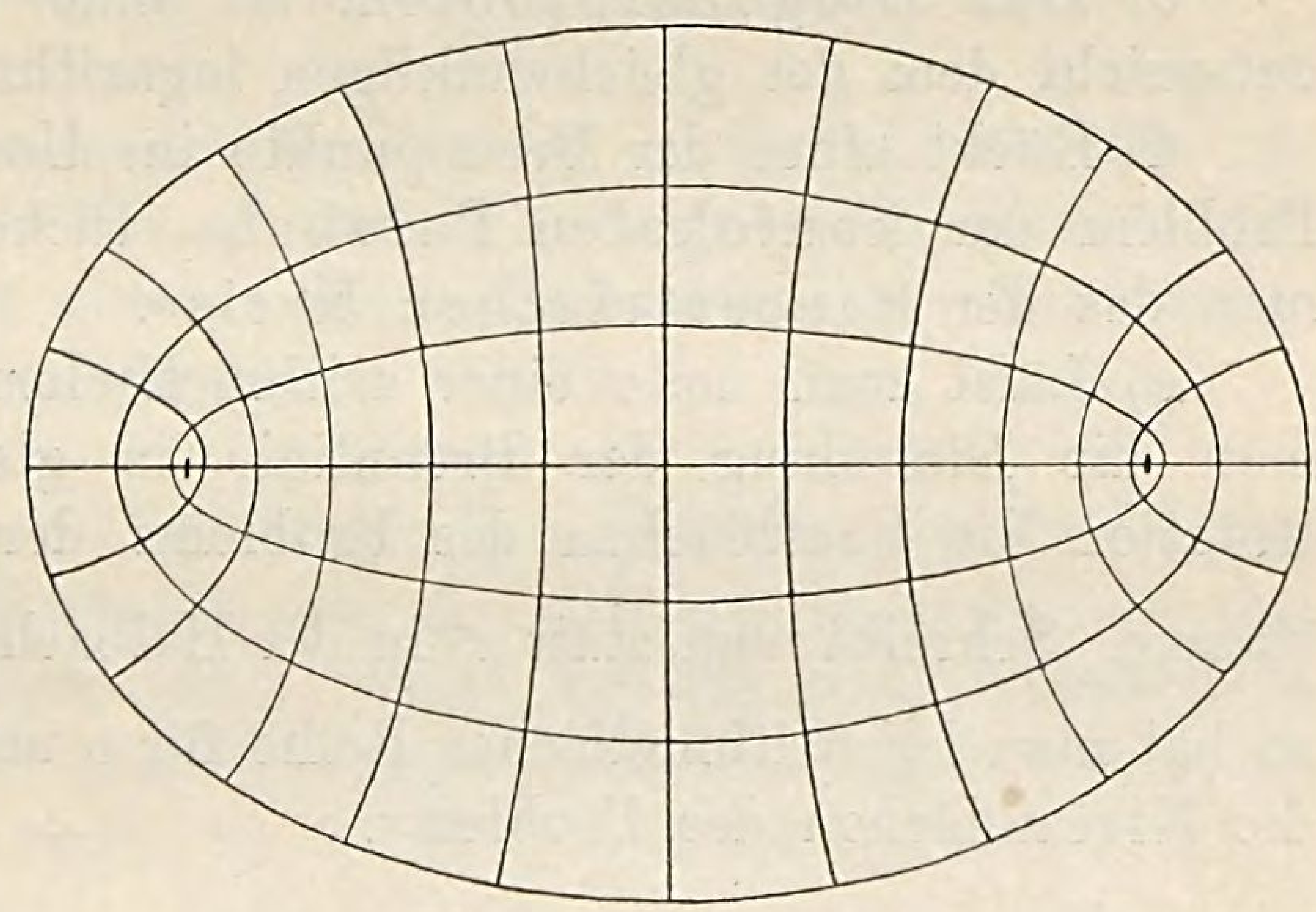


Fig. 140 stellt die Quadratteilung durch konfokale Ellipsen und Hyperbeln dar. Die Asymptoten der Hyperbeln folgen unter gleichen Winkeln aufeinander, genau so wie die Geraden der z-Ebene. Quadratteilung entsteht, wenn in

$$\frac{P+Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + 1} = e^c \quad \text{oder} \quad \frac{P+Q}{2} = \frac{e^c + e^{-c}}{2} \text{ (Halbachse } a\text{)},$$

ebenso in

$$\arccos\frac{P-Q}{2} = c$$

oder

$$\frac{P-Q}{2} = \cos c \text{ (Halbachse bezw. Asymptotenneigung } c\text{)}$$

der Parameter c einer arithmetischen Reihe folgt, z. B der Reihe

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \ldots$$

195) Deutungen der Figur. a) In die Ebene strömt längs der Brennlinie $F_1 F_2$ Elektrizität ein und wird nach dem Unendlichen abgeleitet. Dasselbe gilt von der Wärmeströmung. Die Hyperbeln sind

Strom-, die Ellipsen Niveaulinien. In den hyperbolischen Kanälen strömt gleich viel Fluidum. Oder aus einem flachen See von konstanter Tiefe wird längs der Linie F_1F_2 Wasser entfernt. Oder mit Hilfe des Sickerschlitzes F_1F_2 wird aus homogener Grundwasserschicht Wasser ausgepumpt. Oder FF_1 stellt eine unbegrenzte Ebene dar, die so mit Masse belegt ist, dafs auf die Abschnitte der Brennlinie gleich viel Masse kommt. Dabei handelt es sich um die Newtonschen Kraft- und Niveaulinien. Die Belegung dieser Ebene bezw. eines der Cylinder entspricht der elektrischen Verteilung bei Ladung und Influenz.

b) Vertauschungsproblem. Man denke sich aus der X-Achse die Brennlinie F_1F_2 entfernt. In dem stehenbleibenden Teile der positiven Achse lasse man Elektrizität ein, in dem der negativen ausströmen. Die Ellipsen werden Strom-, die Hyperbeln Niveaulinien. Ebenso ist es mit den anderen Deutungen.

c) Das Diagonalproblem ist ohne besondere Bedeutung, es entspricht dem der gleichwinkligen logarithmischen Spiralen.

d) Rückt einer der Brennpunkte ins Unendliche, so hat man das Problem der konfokalen Parabeln, rücken beide nach O, so hat man das der koncentrischen Kreise.

e) Läfst man $\cos c$ einer arithmetischen Reihe folgen, so erhält man die Einteilung der Brennlinie in gleiche Stücke und durch Rotation die Kraftflächen des Problems der homogenen Geraden im Raume. Schreibt man statt e^c in der Halbachsenformel der Ellipsen $\frac{1}{c}$, so hat man bei arithmetischer Reihe für c und nach erfolgter Rotation die Niveauflächen des Problems.

196) Zusammenstellung der gegenseitigen Beziehungen beider Ebenen.

In beiden Ebenen entsprechen einander folgende Kurvenscharen:

Z-Ebene.	z-Ebene.
1) $f[X,\ Y] = 0$	1*) $f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\ \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right]$.
2) $f[a,\ \alpha] = 0$	2*) $f\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),\ \cos\varphi\right] = 0$.
3) $f[R,\ \Phi] = 0$	3*) $f\left[\frac{pq}{2r},\ \varphi + \chi - \vartheta\right] = 0$.
4) $f[(a + \sqrt{a^2+1}),\ \arccos\alpha] = 0$	4*) $f[r,\ \varphi] = 0$.
5) $f[(a + \sqrt{a^2-1})\sqrt{1-\alpha^2},\ \alpha(a + \sqrt{a^2-1})] = 0$	5*) $f(xy) = 0$.
6) $f\left[\frac{P}{Q},\ (\Phi - X)\right] = 0$	6*) $f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2,\ 2(\varphi - \chi)\right] = 0$.

Hier bedeuten a und α die Ausdrücke $\frac{P+Q}{2}$ und $\frac{P-Q}{2}$. In 3*) gehen p, q und r von den Punkten $+i$, $-i$ und 0 aus, die Relation 5) ergiebt sich durch Berechnung von x und y aus den Gleichungen

$$r + \frac{1}{r} = 2a \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \alpha$$

oder aus

$$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2a \quad \text{und} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \alpha.$$

Führt man statt a und α die Koordinaten X und Y ein, so entsteht die kompliziertere Formel

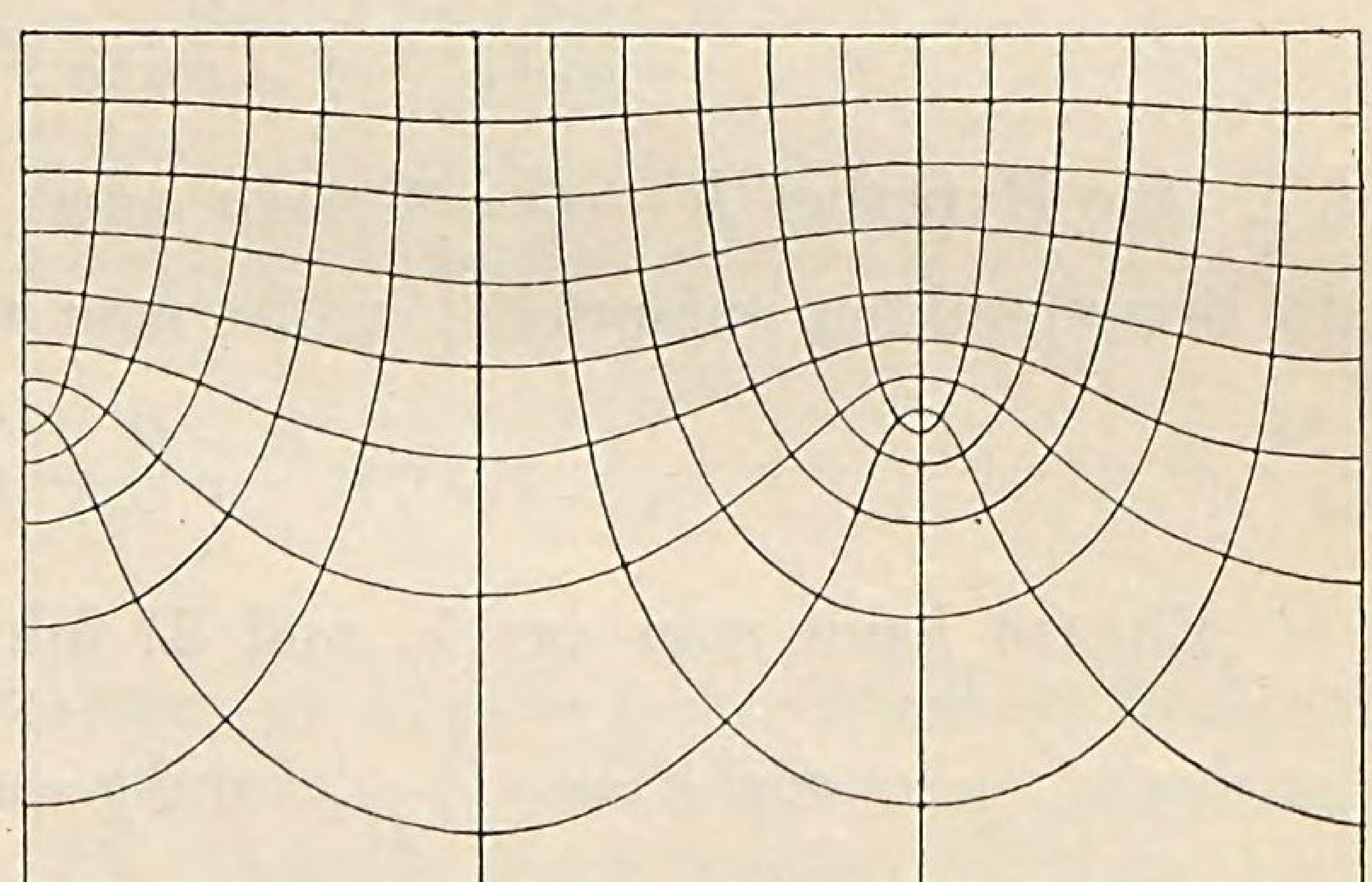
$$x = X + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2-Y^2-1)^2-4X^2Y^2}+(X^2-Y^2-1)}{2}}$$

$$y = Y + \sqrt{\frac{\sqrt{(X^2-Y^2-1)^2-4X^2Y^2}-(X^2-Y^2-1)}{2}}.$$

Über 6) vergleiche man die Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Die P und Q bezw. p und q gehen dabei von -1 aus. Es handelt sich um Bicircularkoordinaten. Dort findet man noch anderweitige Beziehungen.

197) Bemerkungen. Die elliptischen Koordinaten für Ebene und Raum sind für die Mechanik und die mathematische Physik von hervorragender Bedeutung geworden. Durch Abbildung des betreffenden Quadratnetzes der Ellipsen und Hyperbeln kann man zahlreiche komplizierte Linearprobleme lösen, z. B. über sternförmig angeordnete Sickerschlitze und dgl. Man versuche z. B. die Abbildungen $Z = \sqrt{z}$, $Z = \sqrt[n]{z}$ darauf anzuwenden.

Fig. 141.



So kann man z. B. durch $Z = \sqrt{z}$ das Problem der Geraden F_1F_2 in das Problem zweier Geraden auf derselben Linie verwandeln, wobei eine Normale als Symmetrieachse auftritt. Man kann jetzt die Betrachtung auf die Halbebenen beschränken und diese durch die Abbildung $Z = z^2$ in eine aufgeschnittene Vollebene ver-

wandeln. Durch die Abbildung $Z = \lg z$ erhält man dann eine Abbildung auf Parallelstreifen, durch die man die Maxwellsche Fig. 141 erhält, die nach rechts und nach oben und unten durch Symmetrie fortgesetzt gewisse Probleme über begrenzte und unbegrenzte Platten löst.

198) Abbildung $Z = \cos z$.

Auch die Parallelströmung in einem Streifen von der Breite 2π läfst sich direkt in die elliptisch-hyperbolische übertragen. Setzt man nämlich

$$X + Yi = \cos(x + yi) = \cos x \cos yi - \sin x \sin yi,$$

so folgt

$$X - Yi = \cos(x - yi) = \cos x \cos yi + \sin x \sin yi,$$

durch Addition folgt

$$X = \cos x \cos yi, \tag{1}$$

$$Y = \frac{\sin x \sin yi}{i}. \tag{2}$$

Aus 1) folgt

$$\cos^2 yi = \frac{X^2}{\cos^2 x}, \quad \text{aus 2)} \quad \sin^2 yi = -\frac{Y^2}{\sin^2 x},$$

da aber

$$\cos^2 yi + \sin^2 yi = 1,$$

so folgt

$$\frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1, \tag{3}$$

so dafs den Geraden $x = a$ die Kurve

$$\frac{X^2}{\cos^2 a} - \frac{Y^2}{1 - \cos^2 a} = 1,$$

d. h. eine Hyperbel $P - Q = 2 \cos a$ oder $\frac{P - Q}{2} = \cos a$ mit $x = \pm 1$ als Brennpunkten entspricht, wofür man noch schreiben kann

$$\arccos \frac{P - Q}{2} = a.$$

Ebenso kann man aus 1) und 2) folgern

$$\cos^2 x = \frac{X^2}{\cos^2 yi}, \quad \sin^2 y = -\frac{Y^2}{\sin^2 yi},$$

so dafs aus $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$ folgt

$$\frac{X^2}{\cos^2 yi} - \frac{Y^2}{\sin^2 yi} = 1. \tag{4}$$

Nun ist aber

$$\cos yi + i \sin yi = e^{i(yi)} = e^{-y}$$

also

$$\cos yi - i \sin yi = e^{-i(yi)} = e^{y},$$

folglich ist

$$\cos yi = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}),$$

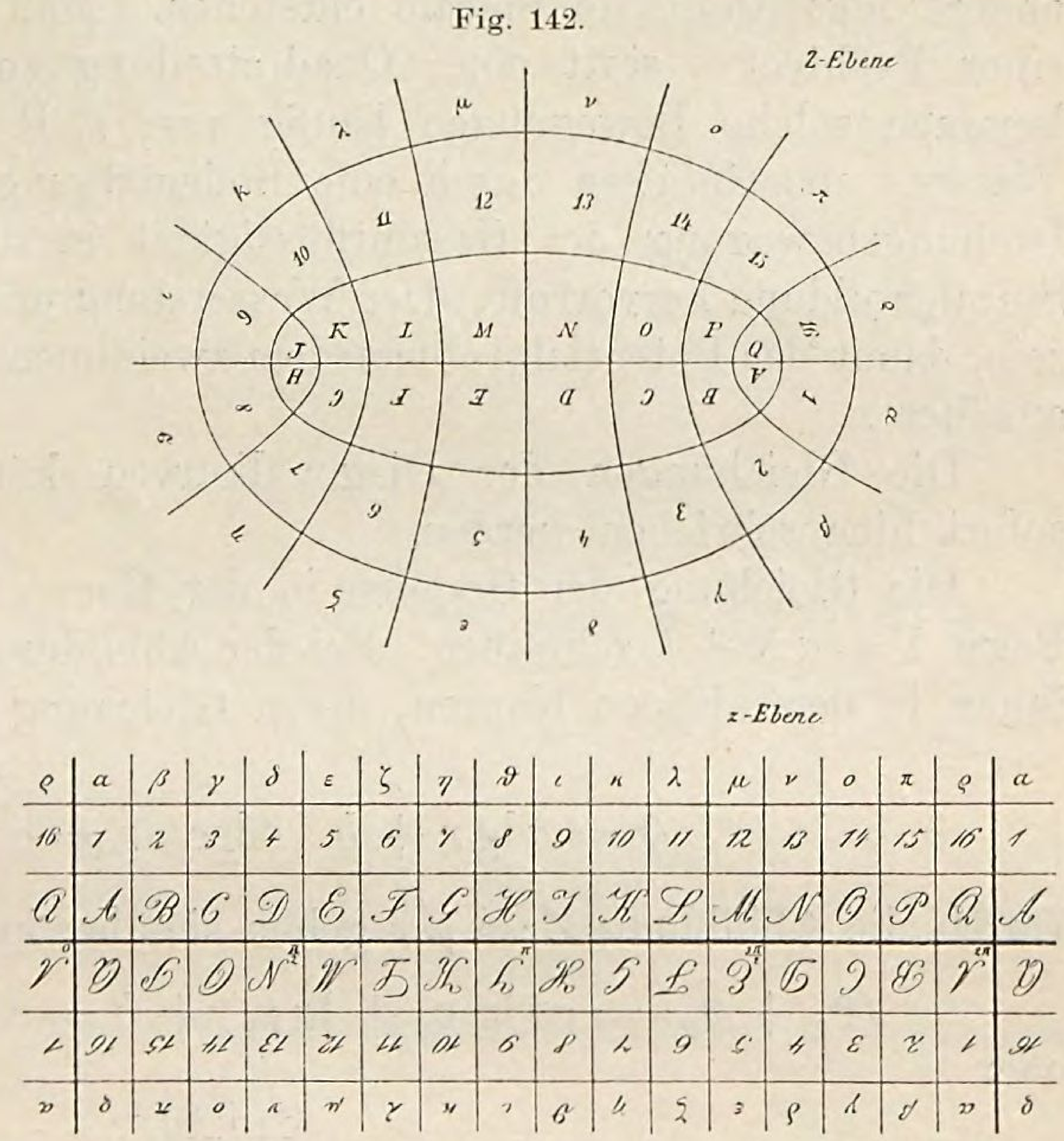
$$\sin yi = -\frac{1}{2i}(e^y - e^{-y}) = \frac{i}{2}(e^y - e^{-y}),$$

Gleichung 4) läfst sich also schreiben in der Form

$$5) \qquad \frac{X^2}{\left[\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\right]^2} + \frac{Y^2}{\left[\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\right]^2} = 1,$$

so dafs es sich um die konfokale Ellipsenschar handelt, die den Geraden $y = b$ entspricht. Fig. 142 zeigt, dafs ein unendlicher senkrechter Streifen von der Breite 2π auf der elliptisch-hyperbolischen Ebene dargestellt ist, woraus sich neue Beziehungen ergeben. Der Periodizität des Streifens entspricht die der elliptischen Strömung und die der abbildenden Funktion $Z = \cos z$.

Fig. 142.



199) **Bemerkungen über Diagonalprobleme und über graphische Addition von Problemen.** Bildet man die Diagonalkurven einer quadratischen isothermischen Einteilung, so werden gewissermafsen Problem und Vertauschungsproblem in den Gesamtwirkungen graphisch addiert. Man denke sich die Potentialwerte beider Probleme auf den beiderseitigen Niveaulinien als Normalen auf der Ebene errichtet, nach oben, wenn sie positiv, nach unten, wenn sie negativ sind. Die Lote sind algebraisch zu addieren. Da nun die Teilung

quadratisch war, so folgt der Parameter c in beiden Problemen derselben arithmetischen Reihe. Beide Reihen sind entgegengesetzt, die eine zunehmend, die andere abnehmend zu denken, und so bleibt auf den Diagonalkurven die Summe konstant, sie werden die neuen Niveaulinien. Die Kraftlinien stehen von selbst senkrecht dagegen und fallen in die andere Diagonalrichtung. Man kann die Sache auch rein kinematisch deuten. Denkt man sich z. B. die Radialbewegung einer Flüssigkeit in früher besprochenen Linien und zugleich die Kreisbewegung des Vertauschungsproblems, und ist in beiden die Geschwindigkeit proportional $\frac{1}{r}$ (dem Reciproken des Abstandes vom Centrum), so findet die Bewegung auf der logarithmischen Spirale statt, die unter 45^0 schneidet. Wären beide Potentialwirkungen von ungleicher Intensität in dem Sinne, dafs z. B. die eine Geschwindigkeit proportional $\frac{1}{r}$, die andere proportional $\frac{2}{r}$ wäre, so würde eine andere logarithmische Spirale entstehen. Man hätte die Diagonalen einer Rechtecks- statt einer Quadratteilung zu ziehen. Angenähert kommen solche Bewegungen häufig vor, z. B. beim Ausfliefsen des Wassers aus Gefäfsen durch eine Bodenöffnung, wobei die geringste Drehungsbewegung der Gesamtflüssigkeit in den Stromlinien sofort Spiralenbildung hervorruft. Der Wasserstand mufs bereits ein niedriger sein, damit das Potentialproblem dem zweidimensionalen sich möglichst annähere.

Die Gleichungen der Diagonalkurven können in allen Fällen sofort hingeschrieben werden.

Die Gleichung der Geraden in der Ebene läfst sich stets in der Form $Y = aX + b$ schreiben. Bei der Abbildung $Z = \lg z$ entsprechen ihnen in der z-Ebene Kurven, deren Gleichung nach Nr. 181 ist

$$\vartheta = a \lg r + b \quad \text{oder} \quad r = e^{\frac{\vartheta - b}{a}}$$

Durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ gehen sie über in Kurven von der Form

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) = a(\lg p_1 + \lg p_2) + b = a \lg(p_1 p_2) + b$$

oder

$$p_1 p_2 = e^{\frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2) - b}{a}}.$$

Dies sind die Gleichungen der lemniskatischen Spiralen. Dagegen würden sie durch die Abbildung $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ übergegangen sein in Kurven von der Gleichung

$$\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1} = e^{\frac{\arccos\frac{p-q}{2} - b}{a}}.$$

Dies würden die elliptischen Spiralen, d. h. die Diagonalkurven der elliptischen Koordinaten sein. Bei der Quadratteilung vereinfacht sich die Formel, da man von den Gleichungen $Y = \pm X + b$ der zwei unter $\pm 45^0$ geneigten Linien ausgeht, was sofort beide Gruppen giebt. Es ist dann $a = 1$ zu setzen.

Denkt man sich bei dem einfachen Radialproblem eine magnetische Wirkung mit einer elektromagnetischen langer Drahtströme kombiniert, derart, dafs die eine Radien, die andere Kreise als Kraftlinien giebt, so würden die Kraftlinien des Gesamtproblems mit den entsprechenden Diagonalkurven zusammenfallen.

Der Satz von der algebraischen Addition der Potentialwerte gestattet überall, bei gleichen Potentialdifferenzen zwischen den Niveaulinien zweier Probleme aus den Kraftlinien beider die Kraftlinien des Gesamtproblems graphisch abzuleiten, indem man die Diagonalkurven zieht. Ebenso kann man aus den Niveaulinien beider die des Gesamtproblems bilden. (Weil dies richtig ist für die einfachsten Fälle, so mufs es durch konforme Abbildung mittels komplexer Funktionen auch für kompliziertere Fälle gelten.)

Es ist eine nützliche Übung, sämtliche Figuren, die man kennt, auf alle Art zu deuten und so einen klaren Einblick in die Idealprobleme der verschiedenen physikalischen Theorien zu erhalten. So kann man z. B. die Lemniskaten des Zweipunktproblems deuten als die Zusammensetzung zweier festgehaltener Wirbel von gleichem Drehungssinne, über deren gegenseitige Einwirkung für den Fall der Beweglichkeit wir später sprechen werden. Die Schar der sich nicht schneidenden Kreise in Fig. 127 kann aufgefafst werden als die Kombination zweier entgegengesetzt drehender und festgehaltener Wirbel. Fig. 135 kann gelten als die Kombination dreier gleichwertiger Wirbel, von denen der mittlere entgegengesetzten Drehungssinn hat, als die beiden andern.

In Fig. 130 z. B. handelt es sich um 6 gleichwertige Wirbel mit festgehaltenem Centrum, von denen die drei inneren entgegengesetzten Drehungssinn haben, wie die äufseren.

Auf die entsprechenden elektromagnetischen Deutungen kommen wir noch ausführlicher zu sprechen.

200) Übergang von den Mehrpunktproblemen durch das Vertauschungsproblem zu den Fourierschen Wärmeproblemen. Liegen mehrere punktförmige Elektroden auf einer Geraden, so gehört die Gerade selbst zu den Stromlinien. Diese Zusammengehörigkeit bleibt bei jeder konformen Abbildung, z. B. bei der durch Inversion geschehenden, erhalten. Bei letzterer geht die Gerade z. B. in einen im Endlichen liegenden Kreis über. Folglich:

Liegen sämtliche Elektroden, die positiven wie die negativen, auf einem Kreise, so gehört dieser zu den Stromlinien. Damit neben dem Kreise nicht auch noch der unendlich ferne Punkt Elektrode sei, mufs die Summe der einströmenden Elektrizitäten gleich Null sein. Während gegen die obige Gerade Symmetrie der Strom- und Niveaulinien stattfindet, ergiebt sich hier Reciprozität des Kreisinnern und des Kreisäufsern. Man braucht sich also nur mit dem Kreisinnern zu beschäftigen und darf die Kreisscheibe ausschneiden, ohne dafs sich etwas ändert.

Ein Blick auf die nachstehende Figur zeigt nun, dafs sich das Vertauschungsproblem folgendermafsen formulieren läfst: Als Elektroden mit der Einströmungssumme Null betrachte man die aufeinanderfolgenden Teile des Kreisumfangs. Dabei werden sich weder die Strom- noch die Niveaulinien ändern. Nur die Vertauschung beider Gruppen findet statt.

Hierbei wird allerdings fingiert, dafs jede bandförmige Elektrode in ihrem ganzen Verlaufe konstantes Potential habe, was nach Margules (Bericht der Wiener Akademie vom 11. Mai 1877) nicht absolut genau sein wird, jedoch kann das ideale mathematische Problem die betreffende Voraussetzung machen. Dasselbe gilt auch von Wärmeeinströmungen in dem Sinne, dafs die einzelnen Kreisbogen auf konstanten Temperaturen gehalten werden, wobei die Isothermen und Stromlinien dieselbe Gestalt behalten, wie vorher.

Damit gelangt man wiederum auf die Fourierschen Probleme mit Randbedingungen, und zwar auf solche, die mit elementaren Hilfsmitteln vollständig lösbar sind. Dabei soll von einer speziellen Aufgabe ausgegangen werden, die sich leicht verallgemeinern läfst. Wenn den Punkten dabei eine regelmäfsige Lage gegeben wird, so geschieht dies nur, um das Zeichnen der beiden Kurvensysteme zu erleichtern. Da übrigens durch drei Punkte stets ein Kreis gelegt werden kann, ist bei dieser Anzahl der Kreis stets Stromlinie.

201) **Aufgabe.** Drei Punkte A_1, A_2, A_3 einer Ebene mögen ein gleichseitiges Dreieck bilden. In A_1 ströme Wärme oder Elektrizität ein, in A_2 und A_3 ströme sie in gleichen Teilen aus. Das Stromnetz soll untersucht werden.

Auflösung. Nach Nr. 175 werden, da die ein- und ausströmenden Massen sich wie $2:-1:-1$ verhalten, die Gleichungen der Niveaulinien von der Form

$$1)\qquad 2 \lg r_1 - \lg r_2 - \lg r_3 = c,$$

oder

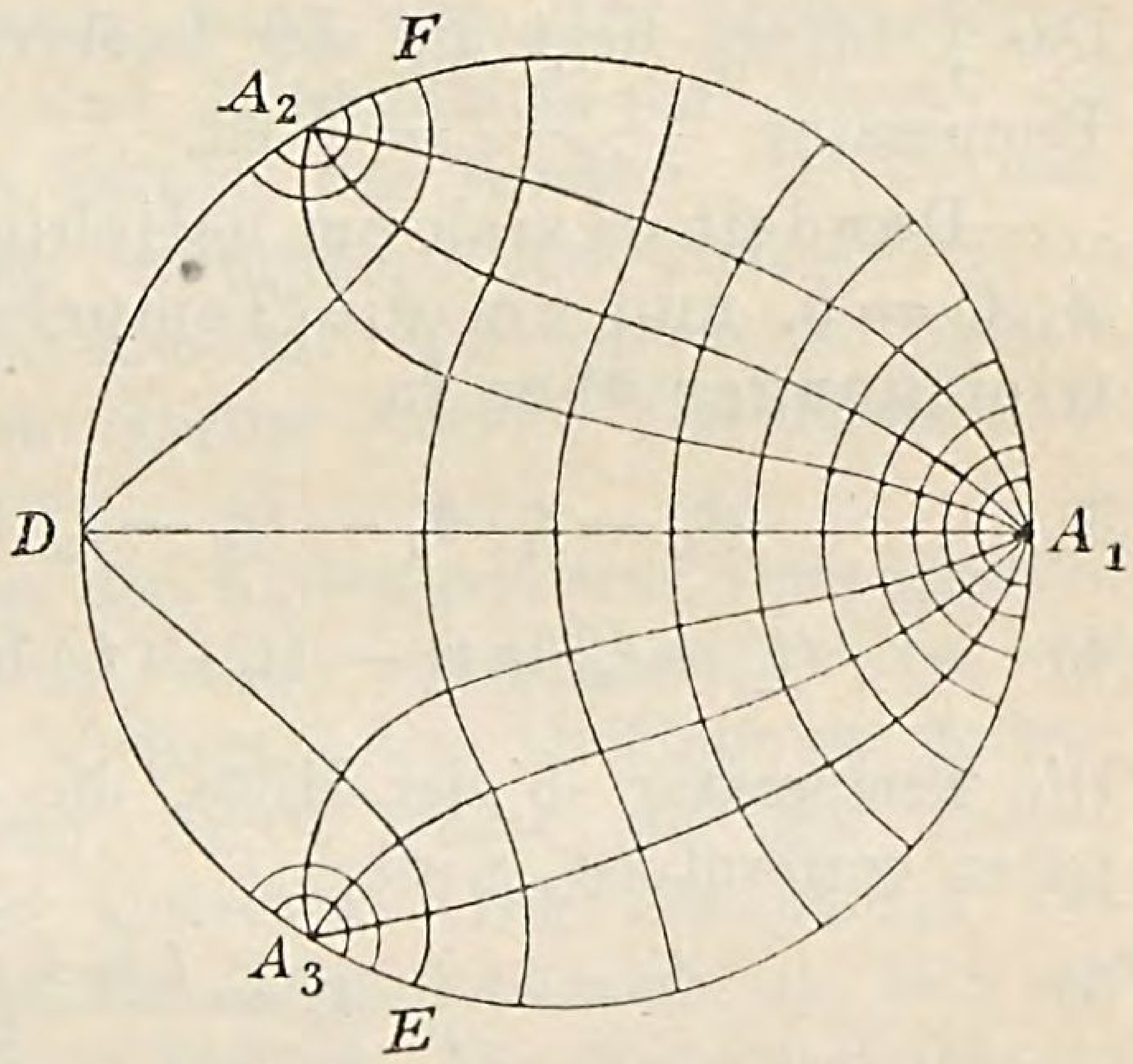
1*) $$\frac{r_1^2}{r_2\, r_3} = e^c,$$

die der Stromlinien von der Form

2) $$2\,\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 = \gamma.$$

Die Zahl der von A_1 ausgehenden Stromkanäle ist doppelt so grofs, wie die der in A_2 oder A_3 endenden. Aus Symmetriegründen gehört der Durchmesser AD zu den Stromlinien. Unter den Niveaulinien spielen die Kurven DF und DE, durch welche die rechten Winkel bei D halbiert werden, eine Ausnahmerolle.

Fig. 143.



202) Das zugehörige Vertauschungsproblem. Der Bogen $A_1 A_2$ werde durch Wärmezufuhr auf konstanter Temperatur t_1 gehalten, $A_2 A_3$ auf t_2, $A_3 A_1$ auf t_3. In der Figur ist die Zahl der zwischen $A_1 A_2$ und $A_3 A_1$ liegenden Niveaustreifen doppelt so grofs, als die der zwischen $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ bezw. zwischen $A_2 A_3$ und $A_3 A_1$ liegenden. Dasselbe gilt von der Anzahl der Wärmeabstufungen oder Potentialdifferenzen. Der Wärmeunterschied zwischen $A_3 A_1$ und $A_1 A_2$ mufs also (absolut genommen) doppelt so grofs sein, als der Wärmeunterschied zwischen $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ bezw. zwischen $A_2 A_3$ und $A_3 A_1$, wenn die beiden Probleme identisch bleiben sollen.

Dem wird genügt, wenn man

$$t_1 - t_2 = +\varkappa, \quad t_2 - t_3 = +\varkappa, \quad t_3 - t_1 = -2\varkappa$$

oder noch einfacher

$$t_1 - t_2 = 1, \quad t_2 - t_3 = 1, \quad t_3 - t_1 = -2$$

setzt. Die letzte Gleichung ist jedesmal eine Folge der beiden ersten, und es ist in jedem Falle

$$(t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) + (t_3 - t_1) = 0.$$

Dem genügen z. B. die Temperaturen 2^0, 1^0, 0^0, ebenso die Temperaturen 16^0, 8^0, 0^0.

Jetzt erhalten die Niveaulinien (Isothermen) die Gleichung

1) $$2\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 = \gamma,$$

die Stromlinien die Gleichung

2) $$2\lg r_1 - \lg r_2 - \lg r_3 = c.$$

Man beachte, wie in der Zeichnung der Bogen A_1F seine Wärme nach EA_1 schickt, der Bogen FA_2 nach A_2D, der Bogen DA_3 nach A_3E, so dafs die geknickte Kurve FDE die einzelnen Bereiche voneinander scheidet. Die Isothermen haben von A_1A_2 aus gezählt z. B. die Temperaturen 16°, 14°, 12°, 10°, 8°, 6°, 4°, 2°, 0°. Das Centrum liegt auf der Isotherme A_1D von 8°, was die mittlere Temperatur $\frac{16+8+0}{3} = \frac{24}{3}$ ist.

Handelt es sich um beliebige Bogen $A_1A_2 = b_1$, $A_2A_3 = b_2$, $A_3A_1 = b_3$ und um die Temperaturen t_1, t_2, t_3, so gehen die Gleichungen über in

3) $$(t_1 - t_3)\,\vartheta_1 - (t_2 - t_1)\,\vartheta_2 - (t_3 - t_2)\,\vartheta_3 = \gamma,$$

4) $$(t_1 - t_3)\lg r_1 - (t_2 - t_1)\lg r_2 - (t_3 - t_2)\lg r_3 = c$$

Die Temperatur in der Mitte, die gleichweit von sämtlichen Bogenteilen entfernt ist, wird

5) $$t_\mu = \frac{t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3}{2 r \pi}.$$

Handelt es sich um n Bogen b_1, b_2, b_3, ..., b_n und um konstante Temperaturen t_1, t_2, t_3, ..., t_n im obigen Sinne, so gehen die Gleichungen über in

6) $$(t_1 - t_n)\,\vartheta_1 - (t_2 - t_1)\,\vartheta_2 + \ldots + (t_n - t_{n-1})\,\vartheta_n = \gamma$$

6) $$(t_1 - t_n)\lg r_1 + (t_2 - t_1)\lg r_2 + \ldots + (t_n - t_{n-1})\lg r_n = c,$$

8) $$t_\mu = \frac{t_1 b_1 + t_2 b_2 + \ldots + t_n b_n}{2 r \pi}.$$

Durch Abbildung mittels irgend welcher Funktionen komplexen Arguments, z. B. durch die lemniskatische Abbildung $Z = \sqrt{z}$ (vgl. Ingenieur-Mathematik I Seite 175) kann man von den Randproblemen des Kreises zu anderen, z. B. zu denen der Lemniskate übergehen. An Stelle der Bogen mit konstanten Temperaturen kann man Elektroden von konstantem Potential und konstanter Ergiebigkeit t_1, t_2, ... t_n setzen, wobei die Gleichungen dieselben bleiben. [In der Zeitschrift für Math. u. Phys. Jahrgang 1897, Seite 218 bis 246 ist das betreffende Problem vom Verfasser ausführlicher behandelt und mit anderen Gebieten der math. Physik in Beziehung gesetzt worden.]

203) Andere Fouriersche Probleme. Handelt es sich um eine endliche Anzahl von Kreisbogen auf konstant gehaltener Temperatur, so gehen die Stromlinien überall, mit Ausnahme der Grenzpunkte, senkrecht von der Kreisperipherie aus, die selbst zu den Niveaulinien gehört.

Anders ist es, wenn die einzelnen Bogen unendlich klein sind, selbst wenn die Änderungen der Temperatur von einer Randstelle zur andern stetig vor sich gehen. (Es ist der Fall unendlich vieler Elektroden.)

Um dies zu verstehen, schlage man z. B. im lemniskatischen Zweipunktprobleme der Ebene einen Kreis, der die beiden Quellpunkte ausschliefst. Die Strom- und Niveaulinien sind überall die des Zweipunktproblems, auch im Innern des Kreises. Denkt man sich jetzt diesen aus der Umgebung herausgelöst, hält man aber jeden Punkt des Randes auf der ihm zukommenden Temperatur, so bleiben die Niveaulinien dieselben, die sie vorher waren. Der Kreis aber gehört nicht zu ihnen.

In ähnlicher Weise kann man der Kreisperipherie Temperaturen geben, die jedem beliebigen anderen Punkt- oder Linearproblem entsprechen, dessen Lösung bereits vorliegt. Die Quellpunkte mögen dabei vorläufig ausgeschlossen sein, damit weder auf dem Rande, noch im Innern Diskontinuitäten auftreten. Die Behandlung der letzteren ist nicht ohne Schwierigkeiten, besonders wenn sie sich auf endlichem Raum zu unendlicher Zahl häufen. Die Untersuchung gehört dann nicht mehr der Elementarmathematik an.

Wir können hier nur Probleme besprechen, deren Lösungen nach der früheren Betrachtung bereits bekannt sind. Die allgemeinste Fouriersche Aufgabe kann allerdings grundsätzlich als bereits gelöst betrachtet werden, jedoch sind geschlossene Lösungen, bei denen nicht erst noch unendliche Reihen summiert werden müssen, nur in einer Anzahl von Fällen vorhanden, die im wesentlichen mit den hier synthetisch als lösbar angedeuteten zusammenfallen. (Zu den letzteren sind auch die mit den elliptischen Funktionen zusammenhängenden zu rechnen.)

204) Bemerkungen über Periodizität.

a) Mit Hilfe zweier orthogonaler Parallelenscharen kann man die Ebene in ∞^2 Quadrate von endlichen Dimensionen einteilen. Jede Abbildung mit Hilfe algebraischer Funktionen verwandelt ein solche Einteilung wiederum in eine solche, bei der die Anzahl der Quadrate unendlich grofs 2^{ter} Ordnung ist. Soll die Abbildung auf ∞^1 Quadrate führen, so sind transscendente Funktionen nötig, die einfache Periodizität besitzen. Soll nur eine endliche An-

zahl von Quadraten entstehen, so sind doppeltperiodische Funktionen erforderlich.

b) Mit Hilfe des Strahlenbüschels durch einen Punkt der koncentrischen Kreisschar erhält man ∞^1 „Quadrate“ von endlichen Dimensionen. Durch algebraische Abbildung der Zeichnung ergeben sich Isothermenscharen, die ebenfalls ∞^1 Quadrate geben. Zum Übergange von Gruppe a) nach Gruppe b) dient z. B. die Abbildung $Z = e^z$, oder auch

$$Z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z, \quad Z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \sin z,$$

u. s. w. Diese Abbildungen müssen wegen des Überganges von ∞^2 zu ∞^1 Quadraten einfach periodisch sein, ihre Umkehrungen unendlich vieldeutig. Bei $Z = e^z$ ist die Periode imaginär, nämlich gleich $2\pi i$, bei $Z = \cos z$ und $Z = \sin z$ ist sie reell, gleich 2π. Auch Kombinationen von transscendenten und algebraischen Funktionen, wie die unten zu behandelnde $Z = z + e^z$, ebenso algebraische Funktionen von transscendenten Funktionen teilen die Eigenschaft der einfachen Periodizität bezw. einfach unendlichen Vieldeutigkeit.

Auch bei algebraischen Funktionen, z. B. bei den irrationalen, kommt Vieldeutigkeit vor, diese ist aber im allgemeinen eine endliche. Den Übergang bilden Wurzeln mit irrationalem Exponenten, der ebenfalls auf unendliche Vieldeutigkeit führt.

Will man also die Einteilung der Ebene in eine endliche Anzahl von Quadraten ermöglichen, so mufs man zu den doppeltperiodischen Funktionen übergehen, welche die reelle Periode der goniometrischen Funktionen und die imaginäre Periode der Exponentialfunktion in sich vereinigen. Die wichtigsten und einfachsten der damit zusammenhängenden Isothermenscharen findet man nebst Litteraturangaben in des Verfassers „Theorie der isogonalen Verwandtschaften“. Die dortigen Figuren klären über das Notwendigste auf. Sie stehen nicht nur in Beziehungen zur Potentialtheorie, sondern auch zur Festigkeitslehre und sonstigen Gebieten. Einige Bemerkungen dazu sind schon in Bd. I der Ing.-Mathematik Seite 199 gemacht worden. Sie schliefsen sich an den Fall des Quadrates und der quadratischen Weltkarte von Peirce an.

205) Grenzlinien für den elementaren Ausbau der Ingenieur-Mathematik und Potentialtheorie. Zur Behandlung der Gruppen a) und b) ist höhere Mathematik im allgemeinen zu entbehren, obwohl die elementare Behandlung unbequem werden kann. Aber schon die Behandlung der Kurven gleicher Intensität und gleicher Stromrichtung macht die Anwendung der höheren Analysis wünschens-

wert. Gruppe c) aber tritt vollständig aus der Möglichkeit elementarer Behandlung heraus. Die Grenzlinie der letzteren ist also festgelegt durch die einfacheren transscendenten Funktionen, die als goniometrische und Exponentialfunktionen bezw. cyclometrische und logarithmische Funktionen auftreten. So grofse Fortschritte durch die höheren Funktionen auch erzielt werden können, man bleibt nach einem Ausspruche von Dubois-Reymond doch auf das Strandwasser des Ozeans der Funktionentheorie beschränkt.

Als Beispiele von Problemen, die sich an jener Grenzlinie befinden, sind im folgenden einige herausgegriffen. Obwohl die höhere Analysis vermieden ist, sind sie doch nur für vorgeschrittene Leser bestimmt. Andere mögen sie überschlagen. Aufgenommen wurden sie aus dem Grunde, weil durch sie die Theorie der Kondensatoren und der Schutzringe verfeinert wird, und weil sie zweitens in die berühmten Arbeiten von Helmholtz und Kirchhoff über die Theorie der freien Ausflufsstrahlen einführen und ein neues Licht auf die schon vielfach besprochenen hydrodynamischen Analogien werfen. Man wird daraus entnehmen, von welcher Bedeutung die Methode der konformen Abbildung für viele Teile der mathematischen Physik ist. Auf diesem Gebiete findet sich noch mancherlei lohnende Arbeit für den angehenden Forscher.

206) Die Abbildung $Z = z + e^z$. Diese Abbildung ist zuerst von Helmholtz für hydrodynamische Zwecke behandelt worden. Sie giebt aber auch die Theorie der ebenen Kondensatoren und des Schutzringes am Thomsonschen Elektrometer. Sie soll hier ganz elementar behandelt werden.

Aus

$$Z = z + e^z$$

oder

$$X + Yi = (x + yi) + e^{(x+yi)} = x + yi + e^x e^{yi} = x + yi + e^x(\cos y + i \sin y)$$

folgt durch Gleichsetzung der reellen und ebenso der imaginären Teile

1) $$X = x + e^x \cos y,$$

2) $$Y = y + e^x \sin y.$$

Für jeden Punkt x, y der z-Ebene kann man also die Koordinaten X, Y des ihm entsprechenden der Z-Ebene berechnen und so durch Rechnung die Abbildung ausführen.

Es fragt sich, was für Kurven den Geraden $x = a$ und $y = b$ in der Z-Ebene entsprechen. Setzt man in beiden Gleichungen $x = a$, so erhält man

$$X = a + e^a \cos y, \quad Y = y + e^a \sin y.$$

Aus der ersteren kann man $\cos y$ berechnen, daraus y und $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ bestimmen und beides in die zweite einsetzen. Man erhält als Gleichung der den Graden $x = a$ entsprechenden Kurven

$$Y = \arccos\frac{X-a}{e^a} + e^a\sqrt{1-\left(\frac{X-a}{e^a}\right)^2}$$

oder

3) $$Y = \arccos\frac{X-a}{e^a} + \sqrt{e^{2a}-(X-a)^2}.$$

Dafür kann man auch schreiben

3*) $$X = e^a\cos\left[Y-\sqrt{e^{2a}-(X-a)^2}\right] + a.$$

Der Geraden $x = o$ z. B. entspricht die Kurve

4) $$Y = \arccos X + \sqrt{1-X^2}$$

4*) $$X = \cos\left[Y-\sqrt{1-X^2}\right].$$

Setzt man dagegen $y = b$ in die Gleichungen 1) und 2) ein, so entsteht

$$X = x + e^x\cos b, \quad Y = b + e^x\sin b.$$

Aus der zweiten kann man e^x, also auch x berechnen und beides in die erste einsetzen. Man erhält als Gleichung der den Geraden $y = b$ entsprechenden Kurven

$$X = \lg\frac{Y-b}{\sin b} + \frac{Y-b}{\sin b}\cos b$$

oder

5) $$X = \lg\frac{Y-b}{\sin b} + \frac{Y-b}{\tan b},$$

wofür man auch schreiben kann

5*) $$Y = \sin b\left[e^{X-\frac{Y-b}{\tan b}}\right] + b.$$

Ist z. B. $b = o$, so ist auch $Y = o$, d. h. die X-Achsen beider Ebenen entsprechen einander. Ist ferner $b = \pm\pi$, so ist auch $Y = \pm\pi$, so dafs auch die Geraden $y = \pm\pi$ und $Y = \pm\pi$ einander entsprechen.

Man hat nun zu untersuchen, auf welche Strecken hin dieses gegenseitige Entsprechen der Geraden stattfindet.

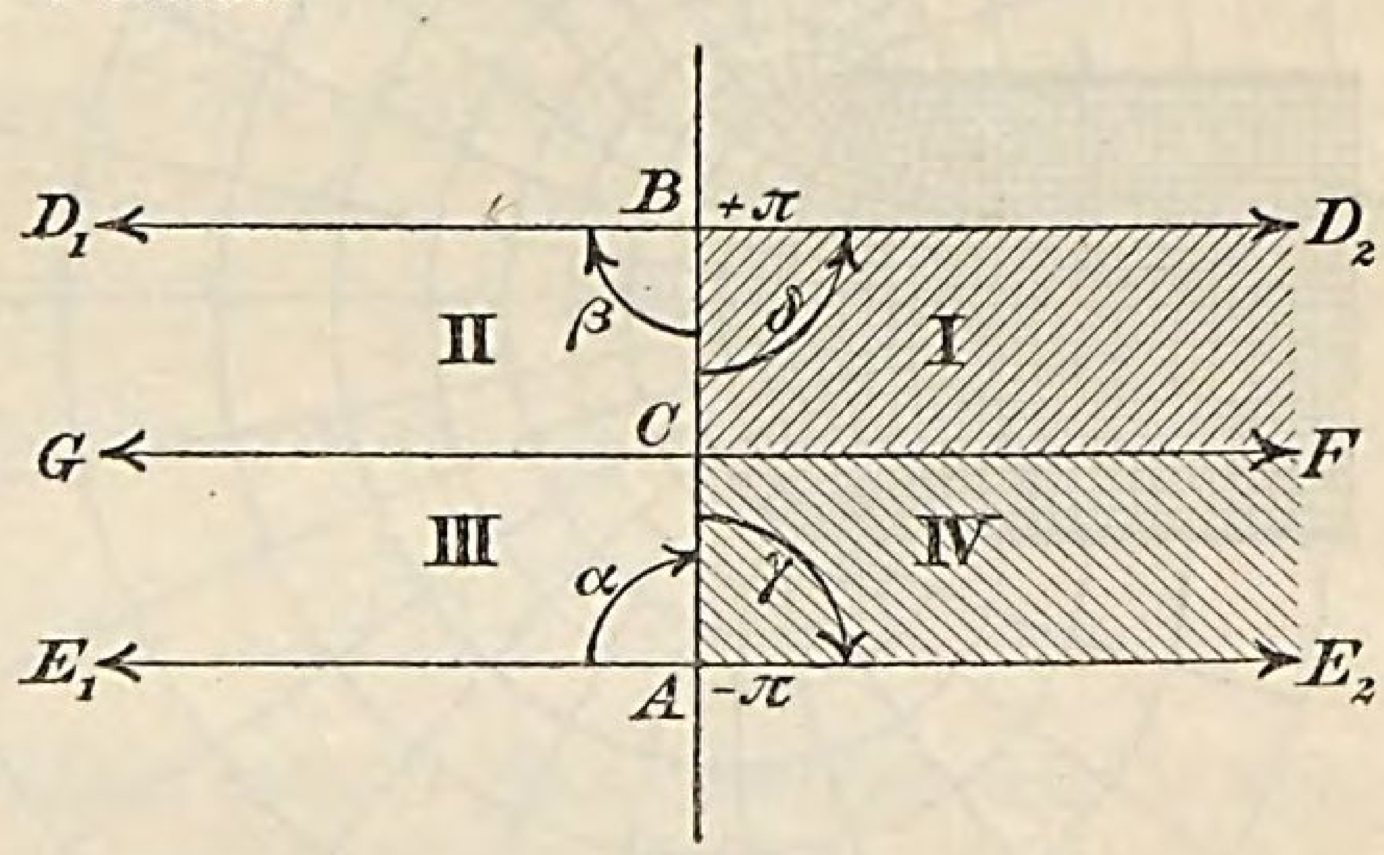
Setzt man $y = o$ und geht man dann in der z-Ebene von $x = -\infty$ bis $x = o$ und von da nach $x = +\infty$, so geht man nach 1) in der Z-Ebene von $-\infty + e^{-\infty}\cos o$ oder $-\infty$ nach $o + e^o\cos y = +1$ und von da nach $\infty + e^{\infty}\cos o = +\infty$. Beide Geraden entsprechen einander in ihrer ganzen Länge, nur entspricht dem Punkte $x = o$ der Punkt $X = +1$.

Setzt man dagegen $y = \pi$ und macht man in der z-Ebene wieder den Weg von $x = -\infty$ über $x = o$ nach $x = +\infty$ auf dieser Linie, so geht man in der Z-Ebene auf der Geraden $Y = \pi$ von $X = -\infty + e^{-\infty} \cdot \cos\pi = -\infty$ nach $o + e^o \cdot \cos\pi = -1$ und dann nach $\infty + e^{\infty} \cdot \cos\pi = \infty - e^{\infty} = \infty - \left(1 + \frac{\infty}{1} + \frac{\infty^2}{1\cdot 2} + \frac{\infty^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right) = -\infty$. Dem Wege von $-\infty$ über o nach $+\infty$ in der z-Ebene entspricht also jetzt der Weg von $-\infty$ nach -1 und von da zurück nach $-\infty$. Der Punkt mit den Koordinaten $Y = \pi$ und $X = -1$ ist also eine singuläre Stelle, deren Bedeutung noch näher auseinander zu setzen ist.

Ebenso ist es aus Symmetriegründen mit den Geraden $y = -\pi$ bezw. $Y = -\pi$, so dafs auch der Punkt $Y = -\pi$, $X = -1$ von singulärer Bedeutung ist.

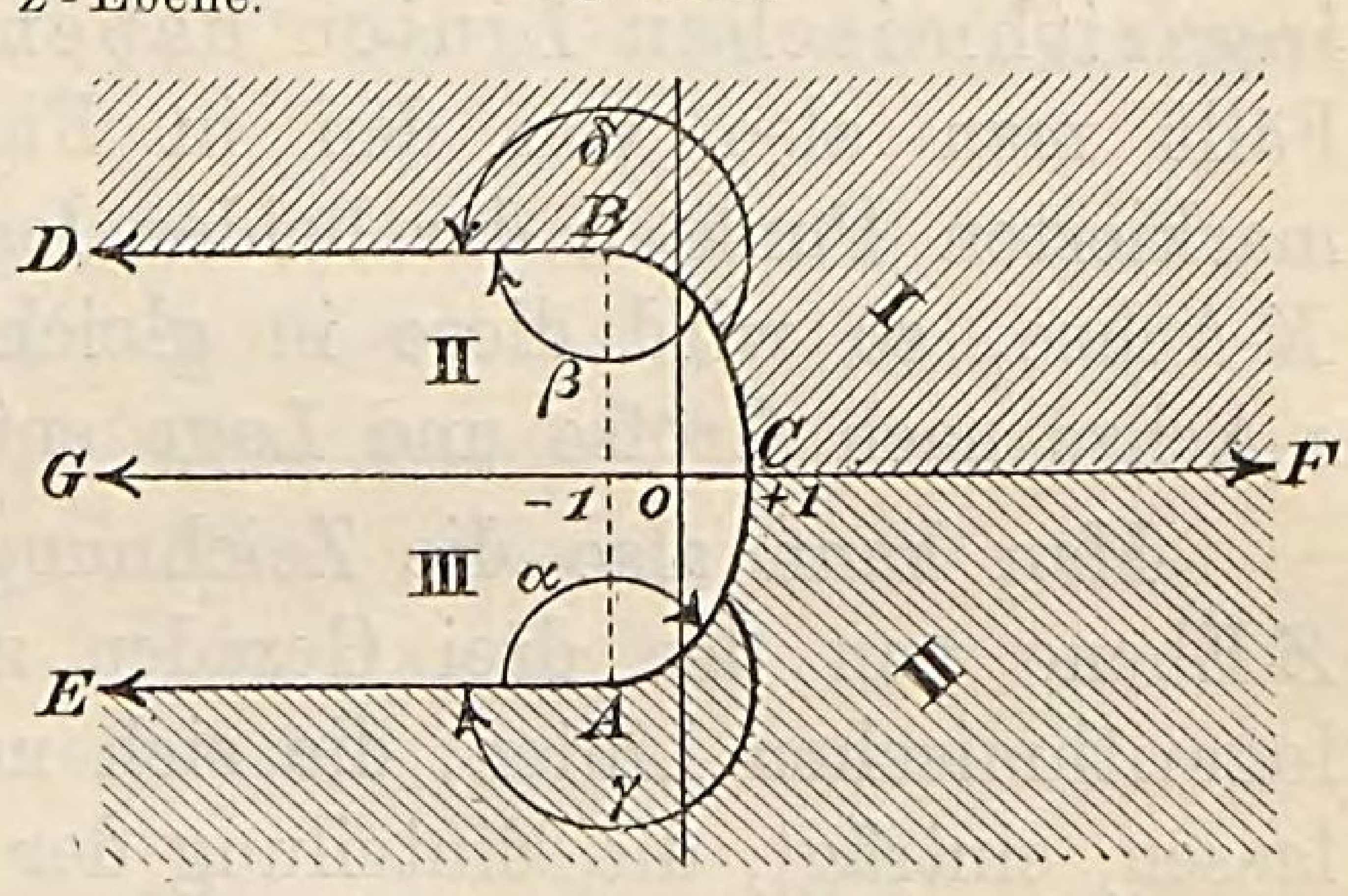
Man beschränke die Betrachtung in der z-Ebene zunächst auf einen horizontalen Streifen von der Breite 2π, der von den Geraden $y = \pm\pi$ eingeschlossen, aber im übrigen unbegrenzt ist.

Fig. 144 a.



Wie die Abbildung $Z = e^z$ diesen Streifen auf die gesamte Z-Ebene überträgt, ist dies auch bei unserer Abbildung $Z = z + e^z$ der Fall, aber in anderer Weise. In Fig. 144 ist das gegenseitige Entsprechen für die vier Quadranten des Streifens zunächst ganz roh dargestellt, wobei die Pfeile andeuten, dafs die Linien sich bis ins Unendliche erstrecken. In der Z-Ebene ist die Schraffierung nach aufsen bis ins Unendliche fortzusetzen, der weifs gelassene Streifen ist jedoch von der Kurve BCA begrenzt, deren Gleichung in Nr. 4 gegeben war.

Fig. 144 b.



Denkt man sich den Streifen der z-Ebene in 24 horizontale Parallelstreifen zerlegt und dann von $x = o$ aus durch Senkrechte in regelrechte Quadrate eingeteilt, so giebt die Berechnung der den Eckpunkten der Quadrate in der andern Ebene entsprechenden Punkte die Fig. 144c.

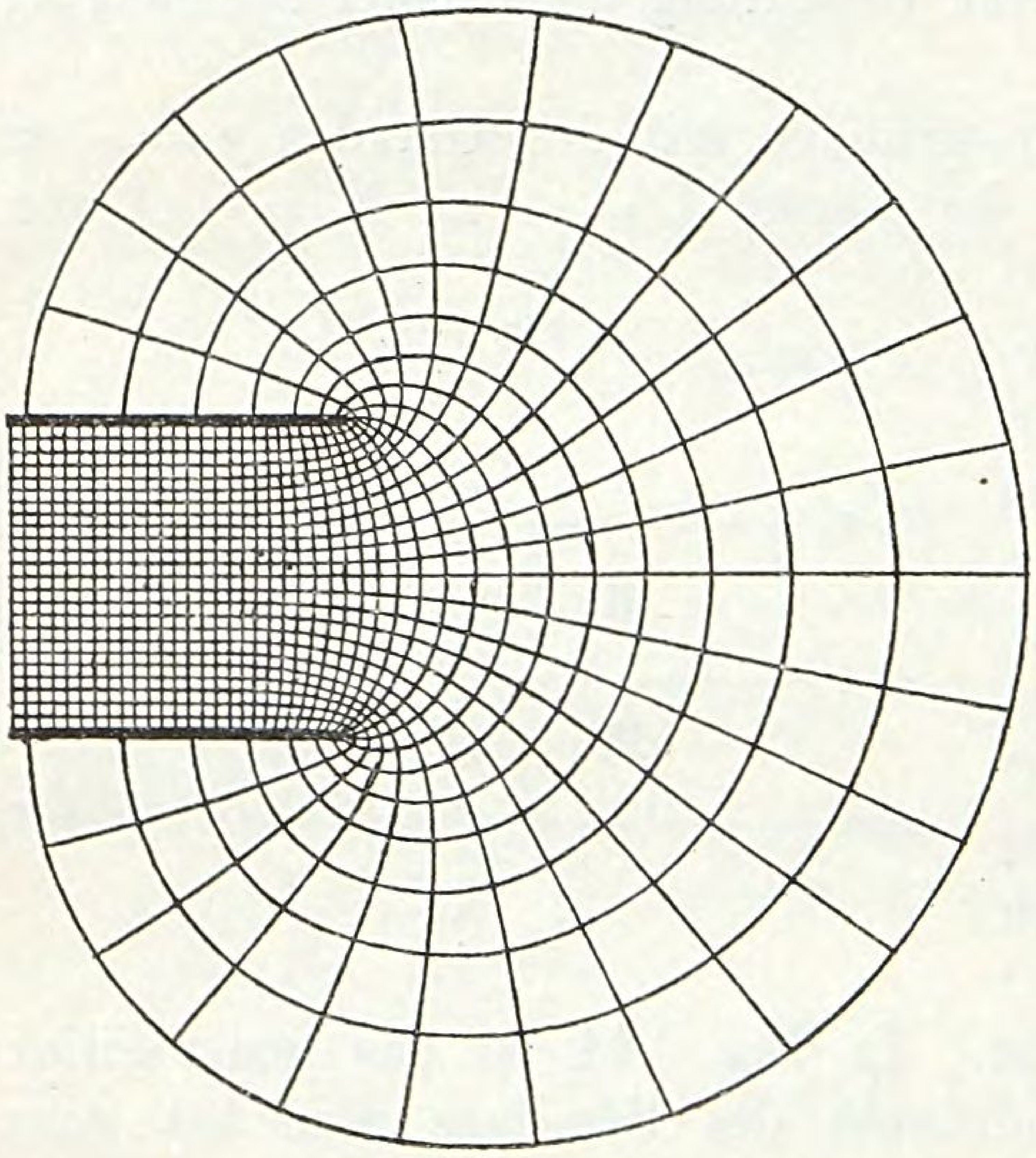
Unter den Kurven, die den horizontalen Parallelen entsprechen, sind zwei von besonderer Bedeutung, die den Parallelen $y = \pm\frac{\pi}{2}$

entsprechenden. Setzt man diesen Wert ein, so geht Gleichung 5*) über in

6) $$Y = e^X + \frac{\pi}{2}, \quad \text{bezw.} \quad Y = -e^X - \frac{\pi}{2}.$$

Dies sind die Gleichungen zweier logarithmischen Linien. (Rechts von der X-Achse aus nach oben und unten gezählt handelt es sich um die $\pm$ 6te Kurve.) Die erstere unterscheidet sich nur dadurch von der Kurve $Y = e^X$, daſs sie um $\frac{\pi}{2}$ nach oben verschoben ist. Die andere ist das Spiegelbild der verschobenen Kurve in Bezug auf die X-Achse. Setzt man aber $y = \pm \frac{\pi}{2}$, so geht die Gleichung 1) über in $X = x + e^x \cdot \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ oder in

Fig. 144c.



$$X = x,$$

d. h. die Punkte auf den Geraden $y = \pm \frac{\pi}{2}$ und die entsprechenden auf den durch 6) dargestellten logarithmischen Linien haben übereinstimmende Abscissen. Fällt man also von den in Fig. 144c durch die Quadratteilung markierten Punkten der beiden logarithmischen Linien Lote auf die X-Achse, so wird diese in gleiche Stücke eingeteilt, die denen der x-Achse nach Gröſse und Lage entsprechen.

Man kann also die Zeichnung vereinfachen, indem man in der Z-Ebene von den drei Geraden ausgeht, die beiden symmetrischen logarithmischen Linien, die sich nach Nr. 161 elementar konstruieren lassen, einträgt, die Einteilung der x-Achse hilfsweise auf die X-Achse überträgt, Lote errichtet und so auf den logarithmischen Linien die Schnittpunkte der den Linien $x = a$ entsprechenden Kurven aufträgt, die eine quadratische Einteilung geben.

Die Funktion $Z = z + e^z$ ist eine einfach periodische mit der Periode 2π, ihre Umkehrung also unendlich vieldeutig. Es fragt sich, was den sich anschlieſsenden Parallelstreifen der z-Ebene entspricht. Die Antwort ergiebt sich, sobald man y z. B. gleich $c + 2\pi$, $\pi + 2\pi$,

$-\pi+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$ setzt. Dem nächsten oberen Streifen der z-Ebene von Breite 2π entspricht dieselbe Figur noch einmal, jedoch um 2π nach oben verschoben. Man kann sich diese zweite Ebene mit ihrer Zeichnung als eine zweite Schicht denken, die über der andern liegt. Dasselbe kann man mit der Verschiebung um -2π machen und diese Schicht unter der ursprünglichen denken, und so kann man mit $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, $\pm 8\pi \ldots$ fortfahren. Dadurch erhalten sämtliche an den horizontalen Grenzlinien scheinbar unterbrochenen Kurven ihre Fortsetzungen. Zeichnet man diese, so sind sämtliche Geraden $Y=\pm n\pi$ Symmetrieachsen der Gesamtzeichnung.

Die Kurve, die der Geraden $x=o$ entspricht, geht dann ähnlich, wie die als Cykloide bezeichnete Rollkurve des Einheitskreises auf der Linie $X=-1$ nach oben. Sie ist in der That eine Cykloide. Die Gleichung einer solchen wird in den Lehrbüchern mit Hilfe einer dritten Variabelen w in der Regel durch die Gleichungen $x=w-\sin w$ und $y=1-\cos w$ dargestellt. Elimination von w giebt dort als Gleichung $x=\arccos(1-y)-\sqrt{1-(1-y)^2}$. Wegen der Drehung um 90^0 ist hier x und y zu vertauschen, was

$$y=\arccos(1-x)-\sqrt{1-(1-x)^2}$$

giebt. Das Koordinatensystem ist aber gegen das unsrige um 1 verschoben. Setzt man $x=X+1$, so wird die Gleichung

$$Y=\arccos X-\sqrt{1-X^2}, \quad \text{oder} \quad X=\cos(Y+\sqrt{1-X^2}),$$

was mit 6) bis auf das unwesentliche Wurzelzeichen (beide Zeichen sind richtig) übereinstimmt. Die Kurve ABC ist also in der That eine Cykloide.

In gleicher Weise sind die übrigen Wellenlinien und Ovale gedehnte bezw. verschlungene Cykloiden. Die Gleichung der letzteren wird in der Regel durch

$$x=w-c\sin w$$
$$y=1-c\cos w$$

dargestellt. Elimination von w ergiebt als Gleichung

$$x=\arccos\frac{1-y}{c}-c\sqrt{1-\left(\frac{1-y}{c}\right)^2}.$$

oder bei Vertauschung von x und y

$$y=\arccos\frac{1-x}{c}-c\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{c}\right)^2}.$$

Setzt man $1 - x = X - a$, also $x = 1 + a - X$ ein, so wird die Gleichung

$$Y = \arccos \frac{X-a}{c} - c\sqrt{1 - \left(\frac{X-a}{c}\right)^2}.$$

Man hat nur noch $c = e^a$ zu setzen, um die Übereinstimmung mit Gleichung 3) bezw. 3*) herbeizuführen. Folglich: Sämtliche Niveaulinien sind gedehnte bezw. verschlungene Cykloiden, deren Rollkreis den Radius 1 hat, so dafs ihre Periode gleich 2π wird.

Hieraus ergiebt sich eine Fülle von geometrischen Beziehungen, auf die nicht näher eingegangen werden soll. Wir gehen vielmehr vor weiteren Untersuchungen zu physikalischen Deutungen über.

207) Hydrodynamische Deutung. Man denke sich einen überall gleich tiefen langsam fliefsenden Strom zwischen parallelen Molen weit in einen überall gleich tiefen See geleitet. Reibungs- und Beharrungsstörungen werden als nicht vorhanden angenommen, so dafs die Strombewegung etwa der verlangsamten des elektrischen Fluidums entspricht. Die Zeichnung stellt die Stromlinien und die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials dar. Die Geschwindigkeiten sind umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate. An jeder Stelle der Molen herrscht innen eine gröfsere Geschwindigkeit, aufsen eine weit kleinere. Dem Innen- und Aufsenpunkte jeder Stelle entsprechen zwei getrennte Stellen der Grenzlinie des Streifens der z-Ebenen, die man durch einfaches Abzählen der Stromlinien bis zur Cykloide hin bestimmen kann. Man kann auch die betreffenden Niveaulinien bis zur logarithmischen Linie verfolgen und dann die Schnittpunkte aut die X-Achse projizieren, was ebenfalls die beiden Abscissen giebt. Dadurch hat man gewissermafsen eine graphische Lösungsmethode der transscendenten Gleichung

$$X = x + e^x \cos\pi \quad \text{oder} \quad X = x - e^x,$$

wobei X gegeben, x berechnet werden soll. Diese Methode ist ebenso genau wie die übliche arithmetische Annäherungsmethode, nach welcher man zur Auffindung des ersten Wertes zu schreiben hat

1) $$x_1 = X + e^{x_1} = X + e^{X + e^{x_1}} = X + e^{X + e^{X_1} + e^{x_1}} = \cdots$$

Den zweiten Wert findet man mit Hilfe der Gleichung $e^{x_2} = -X + x_2$ oder

2) $$x_2 = \lg(-X + x_2) = \lg[-X + \lg(-X + x_2)]$$
$$= \lg\{-X + \lg[-X + \lg(-X + x_2)]\} = \cdots$$

Damit ist zugleich die Frage nach der Umkehrung der Abbildung $Z = z + e^z$ beantwortet, bei der analoge Gleichungen, wie 1) und 2), jedoch für z aufzustellen sind. Sind Z_1 und Z_2, ebenso z_1 und z_2 unendlich benachbarte zusammengehörige Werte, so findet man für

$$\frac{Z_1 - Z_2}{z_1 - z_2} = \frac{(z_1 + e^{z_1}) - (z_2 + e^{z_2})}{z_1 - z_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2} + \frac{e^{z_1} - e^{z_2}}{z_1 - z_2} = 1 + e^z$$

$$= 1 + e^{x+yi} = 1 + e^x(\cos y + i \sin y),$$

wo $z = x + yi$ der Mittelpunkt der unendlich benachbarten z_1 und z_2 ist. Statt $(Z_1 - Z_2) = (z_1 - z_2)(1 + e^z)$ kann man, wenn die Punkte Z_1 und Z_2 auf dem Molenrande liegen, schreiben

$$(X_1 + \pi i) - (X_2 + \pi i) = [(x_1 + \pi i) - (x_2 + \pi i)] \cdot [1 + e^x(\cos \pi + i \sin \pi)],$$

oder einfacher

$$(X_1 - X_2) = (x_1 - x_2) \cdot [1 - e^x].$$

So erkennt man, dafs die kleine Molenstrecke $(X_1 - X_2)$ das $(1 - e^x)$fache der entsprechenden kleinen Strecke der Streifengrenze ist. Mit anderen Worten: Man hat das Vergröfserungsverhältnis $(1 - e^x)$ zwischen den an den Molo anstofsenden Quadraten und den zugehörigen des Streifens der z-Ebene gefunden.

Für $x = -\infty$ handelt es sich um $1 - \frac{1}{e^\infty} = 1$. D. h. je gröfser der negative Abstand vom Nullpunkte der z-Ebene ist, um so mehr stimmen die Quadrate in der Gröfse überein. Für $x = o$ ist das Vergröfserungsverhältnis das $(1 - e^o) = (1 - 1) = o$fache, d. h. an den kritischen Stellen A und B werden die Quadrate der Z-Ebene unendlich klein gegen die der z-Ebene. Auf der Aufsenseite nehmen dann nach links hin die Quadrate schnell zu, z. B. gilt für $x = 1$ der absolut zu nehmende Betrag des Ausdrucks $(1 - e^1)$ als Vergröfserungsverhältnis, so dafs es sich um das $(e^1 - 1) = 1{,}718\ldots$fache handelt, bei $x = 10$ um das $(e^{10} - 1)$fache, bei $x = \infty$ um das $(e^\infty - 1)$ oder ∞fache. Durch die reciproken Werte sind die Geschwindigkeiten bestimmt. An den Stellen A und B wird die Geschwindigkeit unendlich grofs, was bei gewöhnlichen Flüssigkeiten ohne ein Zerreifsen des Zusammenhangs nicht denkbar ist. Der Molo ist übrigens keine mathematische Linie, sondern ein Körper. Abrundung hebt diese Schwierigkeit auf. Für Helmholtz war die Bemerkung über die unendliche Geschwindigkeit der Anlafs, seine Theorie diskontinuierlicher Flüssigkeitsbewegungen und die der freien Ausflufsstrahlen im zweidimensionalen Raume anzubahnen, worin ihm dann Kirchhoff gefolgt ist.

208) Elektrostatische Deutungen für zwei Halbebenen als Kondensatoren. Der eine Molo stellt eine normal zur Zeichnungsebene stehende Platte dar, also eine Halbebene, die im übrigen unbegrenzt ist, der andere eine parallele Halbebene. Ladet man die eine mit positiver Elektrizität, so entsteht auf der anderen nach Ableitung zur Erde dieselbe Menge negativer Influenzelektrizität. (Vgl. Nr. 74 und 75.) Nach den früheren Betrachtungen sind die elektrischen Belegungen derartig angeordnet, dafs auf die an den Kondensator anstofsenden Quadrate der Zeichnung gleiche Mengen kommen, d. h. die Dichtigkeit der Belegungen ist umgekehrt proportional den Dimensionen der Quadrate.

Daraus geht hervor, dafs nicht nur die Innenseite, sondern auch die Aufsenseite der oberen Kondensatorplatte mit positiver Elektrizität belegt ist. Nach links hin wird die Belegung im Innern sehr bald homogen, im Aufsern nimmt die Dichtigkeit allmählich zu Null ab. In den kritischen Punkten A und B aber wird, wenn die Platte unendlich dünn ist, die Dichte unendlich grofs. Da aber in Wirklichkeit die Platte eine endliche Dicke hat und bei A und B abgerundet sein kann, ist man imstande, die daraus folgenden übergrofsen Spannungen und Büschelentladungen zu vermeiden.

Der Schwerpunkt für je zwei gegenüberliegende elektrische Teilchen beider Platten liegt in unendlicher Entfernung. Dasselbe gilt also überhaupt von den Belegungen jedes Doppelstreifens des Kondensators. Folglich: Die Asymptoten der einen Kurvengruppe schneiden die X-Achse in unendlicher Entfernung. Von denen der beiden logarithmischen Linien ist dies bekannt.

Entfernt man die Platten weit voneinander, wobei sich nur die Ordinaten ihrer Punkte ändern sollen, so erhält man an jeder Platte Kraft- und Niveaulinien, die zwei Scharen konfokaler Parabeln darstellen. Da dieses Symmetrie giebt, ist allmählich die Belegung auf beiden Seiten gleich grofs geworden. Dies giebt einen Einblick in die Influenzbewegungen der Elektrizität beim Nähern oder Entfernen der einen Platte von der ruhenden anderen.

209) Thomsonscher Schutzring. Man bringe die Platten in die alte Lage zurück, denke sich aber in der einen irgendwo links von A eine durchgehende kleine Unterbrechung, wobei jedoch eine leitende Verbindung bestehen bleiben soll, dann tritt nur ein sehr kleines Bündel von Niveaulinien durch die Unterbrechung hindurch, im übrigen aber bleibt alles unverändert, d. h. die quadratische Einteilung bleibt im wesentlichen dieselbe, insbesondere bleibt die Belegung links von der Unterbrechung fast vollständig homogen. So erkennt man die Ein-

wirkung des Thomsonschen Schutzringes zunächst für unendlich grofse Kondensatorplatten bezüglich der Festhaltung der Homogenität des zwischen den Platten liegenden Feldes. Die Deformationen der Geraden nehmen erst in gröfserer Entfernung rechts von der Unterbrechung wahrnehmbare Gröfse an. Vgl. Nr. 76.

210) Die Cylinder der logarithmischen und anderer Linien als Kondensatorplatten. Da nach obigem auf Linienstücke (bezw. Flächenstücke), deren Projektionen auf die X-Achse gleich lang sind, gleiche Belegungen kommen, so ist das entsprechende Problem als vollständig gelöst zu betrachten, sowohl für die beiden logarithmischen Linien, als auch für eine von ihnen und eine der drei Geraden der Figur. Auch das Influenzproblem zwischen Halbebene und ganzer Ebene (X-Achse) ist gelöst. Auch mit den übrigen Kurven kann man entsprechendes leisten.

Auf Wärme-, Elektrizitätsströmungen u. dgl. soll jetzt nicht eingegangen werden, auch nicht auf die nahe liegenden Vertauschungsprobleme bezw. die etwas unbequemer zu behandelnden Diagonalprobleme. Sämtliche Aufgaben bieten instruktives Übungsmaterial.

[211) Beispiel zur Theorie der freien Ausflufsstrahlen von Helmholtz und Kirchhoff. Vorgeschrittenere Leser mögen ihre Kraft an einer ebenfalls elementar zu behandelnden Abbildungsaufgabe versuchen, von der nur die Resultate der Einzelrechnungen angegeben werden sollen. An dieser soll die neuere Theorie der freien Ausflufsstrahlen erläutert werden.

Es sei wiederum $Z = X + Yi$ und $z = x + yi$. Die abbildende Funktion ist

1) $$Z = 1 - e^{-z} - \sqrt{e^{-2z} - 1} + \operatorname{arctan} \sqrt{e^{-2z} - 1}.$$

Es soll untersucht werden, welches Flächengebiet der Z-Ebene einem unbegrenzten horizontalen Parallelstreifen der z-Ebene von der Breite π entspricht, z. B. dem von den Linien $y = o$ und $y = \pi$ begrenzten, und zwar soll der negative (linke) Teil des Streifens zuerst, der positive (rechte) Teil zuletzt betrachtet werden.

Setzt man $y = o$, so geht 1) über in

2) $$X = 1 - e^{-x} - \sqrt{e^{-2x} - 1} + \operatorname{arctan} \sqrt{e^{-2x} - 1}.$$

Von $x = -\infty$ bis $x = o$ bleibt der Ausdruck reell, so dafs der imaginäre Teil von Z für diese Strecke

2*) $$Y = o$$

ist. Die Strecke von A über C bis $-\infty$ der z-Ebene entspricht also der Strecke von A über C bis $-\infty$ der Z-Ebene.

Wird aber x positiv, so treten in 2) imaginäre Teile auf. Dabei ist zu beachten, dafs

$$\arctan ia = \frac{i}{2} \lg \frac{1+a}{1-a}$$

ist. Trennung der reellen und imaginären Teile giebt

3) $$X = 1 - e^{-x}$$

3*) $$Y = \sqrt{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2x}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}}.$$

Durch 2, 2*) und 3, 3*) ist es möglich, für jeden Punkt der x-Achse in der z-Ebene die Koordinaten der entsprechenden Punkte der Z-Ebene zu finden. Der Strecke $-\infty$, C, A, H, $+\infty$ in der z-Ebene entspricht in der Z-Ebene die Gerade $-\infty$, C, A und die Kurve AH u. s. w. Für $x = +\infty$ folgt aus 3) $X = 1$, $Y = -\infty$, so dafs die Gerade $X = 1$ die senkrechte Asymptote der Kurve AH wird.

Setzt man dagegen $y = \pi$, so geht 1) über in

$$Z = 1 - e^{-(x+\pi i)} - \sqrt{e^{-2(x+\pi i)} - 1} + \arctan \sqrt{e^{-2(x+\pi i)} - 1}$$

oder

$$Z = 1 - e^{-x}(\cos\pi - i\sin\pi) - \sqrt{e^{-2x}(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) - 1}$$
$$+ \arctan \sqrt{e^{-2x}(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) - 1}.$$

Für die Strecke von o bis $-\infty$ giebt die Zerlegung in den reellen und imaginären Teil

4) $$X = 1 + e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1} + \pi - \arctan \sqrt{e^{-2x} - 1},$$

4*) $$Y = o,$$

insbesondere entsprechen einander $x = -\infty$ und $X = +\infty$, $x = o$ und $X = 2 + \pi$.

Da jedoch für positives x die Wurzeln imaginär werden, so ist für solches eine andere Zerlegung gültig. Man erhält

5) $$X = 1 + e^{-x} + \pi,$$

6) $$Y = \sqrt{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2x}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2x}}},$$

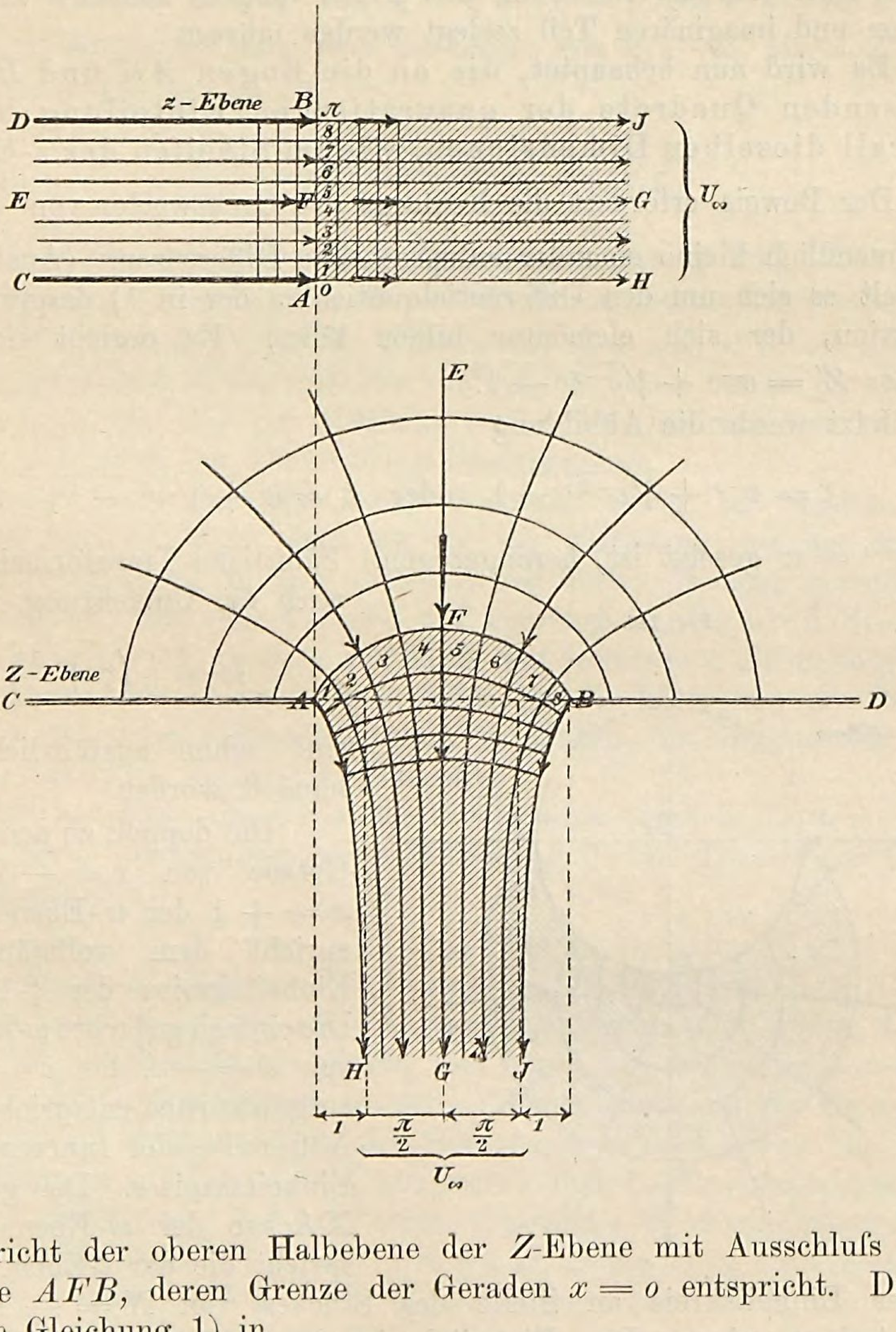
wobei wiederum die Formel für $\arctan ia$ Anwendung gefunden hat.

Der Geraden $y = \pi$ von $-\infty$ über D, B, J nach $+\infty$ entspricht also die X-Achse von $+\infty$ über D nach B, wo $X = 2 + \pi$

ist, dann kommt eine Kurve von B über J nach dem unendlichen Bereiche mit der Asymptote $X = 1 + \pi$.

Der symmetrisch teilenden Geraden $y = \frac{\pi}{2}$ entspricht die Symmetrieachse $X = 1 + \frac{\pi}{2}\cdot$ Fig. 145 erläutert diese Beziehungen in hinreichender Weise. Die linke Hälfte des Streifens der z-Ebene

Fig. 145.



entspricht der oberen Halbebene der Z-Ebene mit Ausschlufs einer Fläche AFB, deren Grenze der Geraden $x = o$ entspricht. Da für $x = o$ Gleichung 1) in

$$Z = 1 - e^{-yi} - \sqrt{e^{-2yi} - 1} + \operatorname{arctan} \sqrt{e^{-2yi} - 1}$$

oder in

$$X + Yi = 1 - (\cos y - i \sin y) - \sqrt{(\cos 2y - i \sin 2y) - 1}$$
$$+ \operatorname{arctan} \sqrt{(\cos 2y - i \sin 2y) - 1}$$

übergeht, so bestimmen sich die Koordinaten der Punkte jener Grenzkurven aus der Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile, wobei die Wurzel und der Ausdruck mit Arcus tangens zunächst in einen reellen und imaginären Teil zerlegt werden müssen.

Es wird nun behauptet, die an die Bogen AH und BJ anstofsenden Quadrate der quadratischen Einteilung hätten überall dieselben Dimensionen, wie im Streifen der z-Ebene.

Der Beweis erfordert die Kenntnis des Grenzwertes von $\frac{Z_1 - Z_2}{z_1 - z_2}$ für unendlich kleine einander entsprechende Differenzen. (Analytisch handelt es sich um den Differentialquotienten der in 1) dargestellten Funktion, der sich elementar bilden läfst.) Es ergiebt sich als solcher $Z' = e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - 1}$.

Jetzt werde die Abbildung

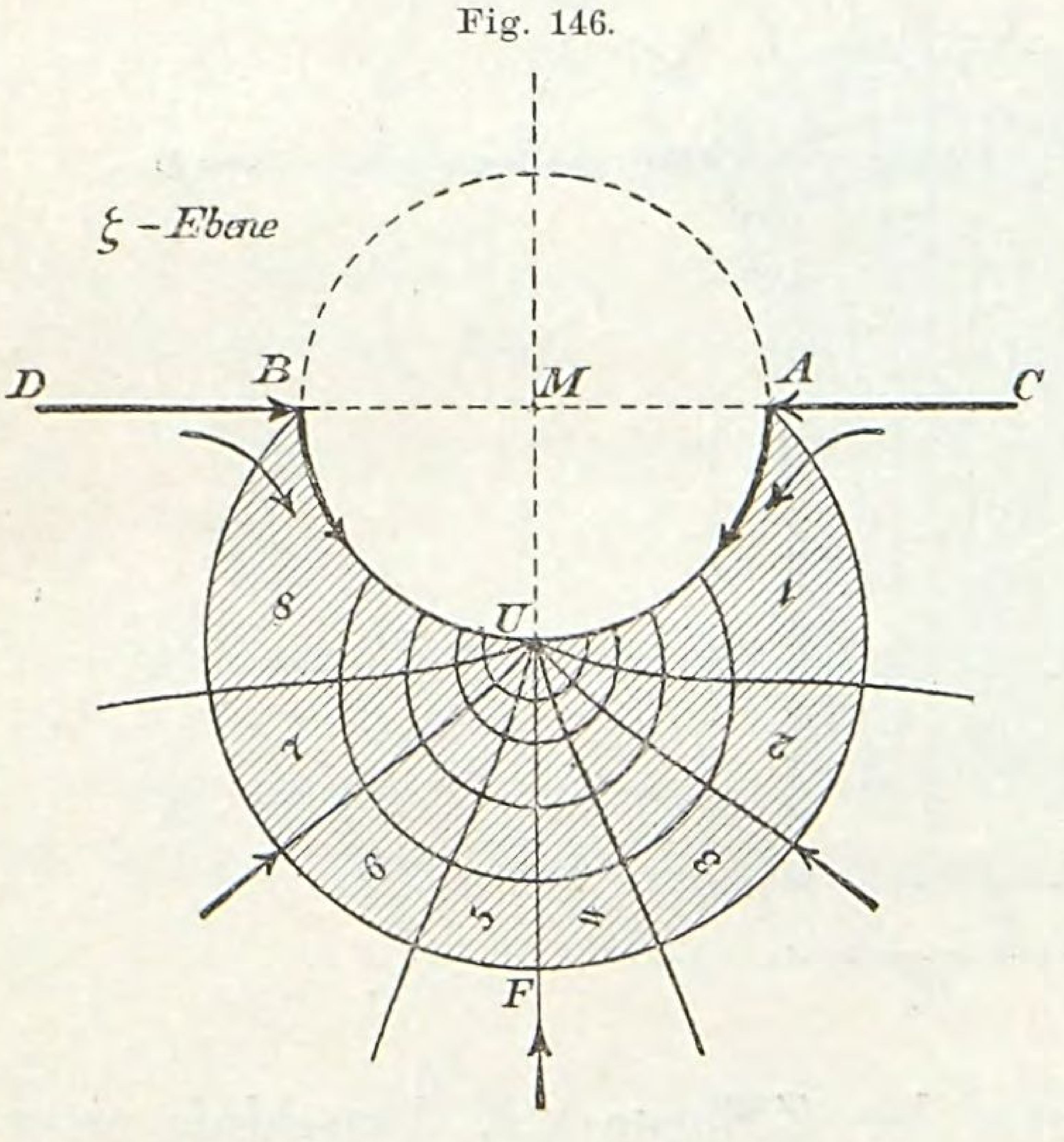
$$\zeta = e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - 1} \quad \text{oder} \quad \zeta = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

wo $e^{-z} = w$ gesetzt ist, herangezogen. Sämtliche Transformationen, auch die Umkehrung

$$w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

sind schon ausführlich behandelt worden.

Fig. 146.



Die doppelt zu denkende Gerade von $x = -1$ bis $x = +1$ der w-Ebene entspricht dem vollständigen Einheitskreise der ζ-Ebene. Die einfach gedachte w-Ebene, von $x = -1$ bis $x = +1$ aufgeschnitten, entspricht dem Äufseren (oder Inneren) des Einheitskreises. Der ganzen X-Achse der w-Ebene entspricht die der ζ-Ebene, nur ist der Einheitskreis an Stelle des Stückes von $X = -1$ bis $X = +1$ zu setzen. Dem Einheitskreise der w-Ebene entspricht ein durch $x = \pm 1$ gehender Kreis der ζ-Ebene auf zweierlei Art. Uns

interessiert nur die in Fig. 146 hervorgehobene Sichel. Durch die Abbildung $w = e^{-z}$ geht die einfach gedachte w-Ebene in einen Parallelstreifen von der Breite 2π über, die Halbebene in den hier untersuchten Parallelstreifen von Breite π. Durch Buchstaben und Zahlen ist das gegenseitige Entsprechen der Z-Ebene, der z-Ebene und der ζ-Ebene hinreichend klargelegt, das Strömen ist durch Pfeile angedeutet.

Der absolute Betrag von $\zeta = \xi + i\eta = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ ist gleich ϱ. Bezeichnet man also die Länge von $Z_1 - Z_2$ als $\overline{Z_1Z_2}$, die von $z_1 - z_2$ als $\overline{z_1z_2}$, so ist

$$\frac{\overline{Z_1Z_2}}{\overline{z_1z_2}} = \varrho \quad \text{oder} \quad \overline{Z_1Z_2} = \varrho \cdot \overline{z_1z_2}.$$

(Vgl. Einf. in die isogonalen Verwandtschaften § 39.) Für den Einheitskreis ist aber $\varrho = 1$, also ist für diesen und die entsprechenden Punkte der Grenzkurve in der Z-Ebene $\overline{Z_1Z_2} = \overline{z_1z_2}$, d. h. die Längen der Quadratseiten in der z-Ebene sind gleich denen der an die Grenzkurven AH und BJ der Z-Ebene stofsenden Quadratseiten. Damit ist die Gleichheit der Dimensionen nachgewiesen.

Denkt man sich also eine Wasserströmung im Streifen der z-Ebene und vergleicht man sie mit der Strömung aus der oberen Hälfte der Z-Ebene in den zunächst mit festen Wänden versehenen Ausflufskanal, der von AH und BJ begrenzt ist, so sind die Geschwindigkeiten an den Wänden des letzteren eben so grofs wie an der Streifengrenze. Dabei ist die Figur nur als Grundrifsfigur der entsprechenden Ebenen zu denken, die Öffnung AB also als ein unendlich langer Parallelschlitz.

Der konstante Charakter der Randgeschwindigkeit ist, wie § 212 zeigen wird, von hervorragender Bedeutung für die Theorie der freien Ausflufsstrahlen.]

[212) Deutung des Problems im Helmholtzschen Sinne. Man denke sich in der z-Ebene parallele Wände DB und CA, die links bis ins Unendliche reichen und darin ein Strömung von links nach rechts in den übrigen wassererfüllten Raum. Ist die Bewegung langsam und sieht man von der Beharrung ab, so würde Fig. 144c mafsgebend sein. Bei dieser Figur wurde darauf aufmerksam gemacht, dafs an der Grenze des Ausflusses unendliche Geschwindigkeiten erforderlich sein würden, so dafs dort der Zusammenhang der Flüssigkeit gestört werden müfste. Die Beobachtung zeigt daher auch ganz anderes. Der Strahl schiefst zunächst kompakt in die ruhende Flüssigkeit des Gesamtraums hinein, um sich um so später und in um

so gröſserer Entfernung in Wirbeln aufzulösen, je gröſser die Geschwindigkeit ist. Man hat also dann auf eine längere Strecke bewegte und ruhende Flüssigkeit nebeneinander, beide durch scheinbar feste Wände begrenzt. Dazu ist aber nötig, daſs die Differenz zwischen v und O groſs genug ist, den Zusammenhang zwischen der ruhenden und bewegten Flüssigkeit aufzuheben bezw. unmöglich zu machen. Jetzt möge v gerade die Grenzgeschwindigkeit sein.

In der Z-Ebene handelt es sich dann um folgendes: Man denke sich zwei Gefäſse, die durch die Ebenen CA und BD begrenzt sind, so daſs aus dem oberen in das untere durch den Schlitz AB Wasser überströmen kann. Die Theorie verlangt, daſs den Strom- und Niveaulinien der z-Ebene solche der Z-Ebene entsprechen. Da aber der Zusammenhang zwischen der ruhenden und bewegten Flüssigkeit bei einer bestimmten Geschwindigkeit v aufgehoben wird, so muſs die Grenzlinie des Strahles so beschaffen sein, daſs sie erstens eine Stromlinie ist, die auf die ruhende Flüssigkeit keinen Druck ausübt, daſs zweitens die Geschwindigkeit in ihr überall gleich jenem v ist. Änderte sich nämlich in der die Grenze bildenden Kraftlinie die Geschwindigkeit, so würde eine Einengung oder Verbreiterung stattfinden wollen, was einen negativen oder positiven Druck auf die ruhende Flüssigkeit geben würde. — Die Abbildung $z = f(z)$ hat also so zu geschehen, daſs der absolute Betrag ϱ von $\frac{Z_2 - Z_1}{z_2 - z_1}$ gleich 1 ist. Dies war im obigen Beispiele der Fall. Jene Aufgabe ist also als gelöst zu betrachten. Wichtig ist bei dieser Theorie, daſs man das wirkliche Maſs der Kontraktion des Strahles erhält.]

[213) Andere Beispiele freier Ausfluſsstrahlen. Gelingt es, einen unbegrenzten Parallelstreifen so auf eine Fläche eindeutig abzubilden, daſs ein Teil der Begrenzung der letzteren in den Dimensionen der anstoſsenden Quadrate mit denen der Quadrate des Streifens übereinstimmt, so ist im allgemeinen ein Problem für freie Ausfluſsstrahlen gelöst. (In der Sprache der Analysis würde die Methode folgendermaſsen zu charakterisieren sein: Man bildet den Streifen der z-Ebene eindeutig auf eine Fläche der ζ-Ebene ab, zu deren Grenzen ein Stück des Einheitskreises gehört. Darauf sucht man das Integral Z der Funktion $\zeta = f(z)$. Die Funktion Z löst dann das Problem.) In der 22. Vorlesung von Kirchhoffs Mechanik findet man mehrere Beispiele. Hat z. B. ein sehr tiefes Gefäſs einen der Fig. 147 entsprechenden Ausfluſsschlitz, der weit höher liegt, als der Boden, so geschieht der Ausfluſs nicht direkt an den inneren Wänden,

sondern so, daſs die gezeichneten Kurven die freien Grenzen sind. Der schräg schraffierte Raum kann ruhende Flüssigkeit enthalten. Die lösende Funktion

$$Z = - i(e^{-2z} + z - 1 + e^{-z}\sqrt{e^{-2z} - 1} - \lg(e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - 1})$$

ist von Helmholtz als erstes Beispiel für diese Theorie bestimmt worden. Liegen die Grenzen (Fig. 148) nicht in gleicher Höhe, so

Fig. 147.

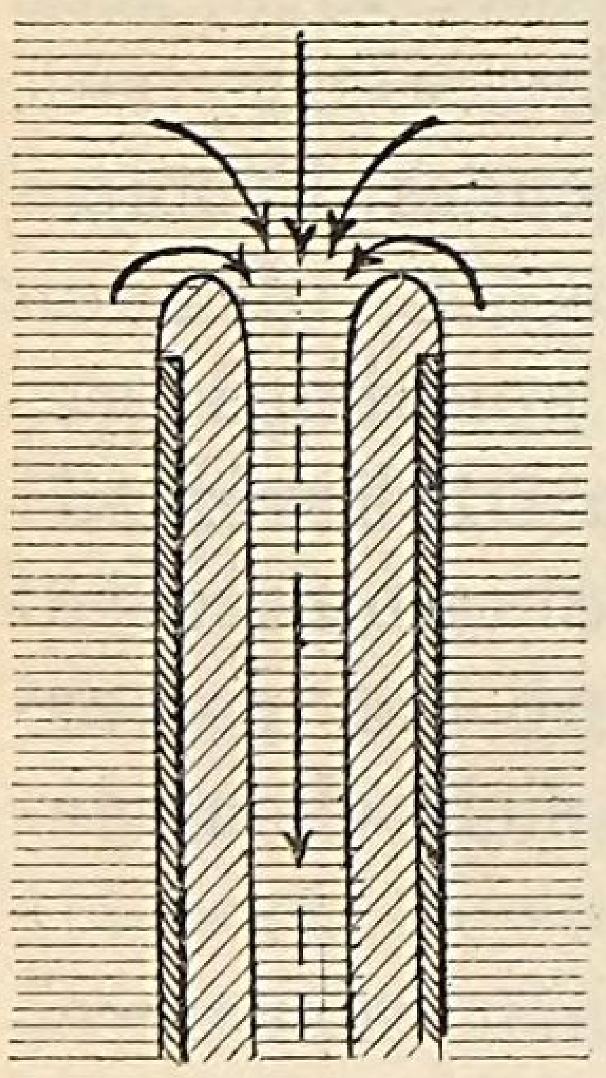


Fig. 148.

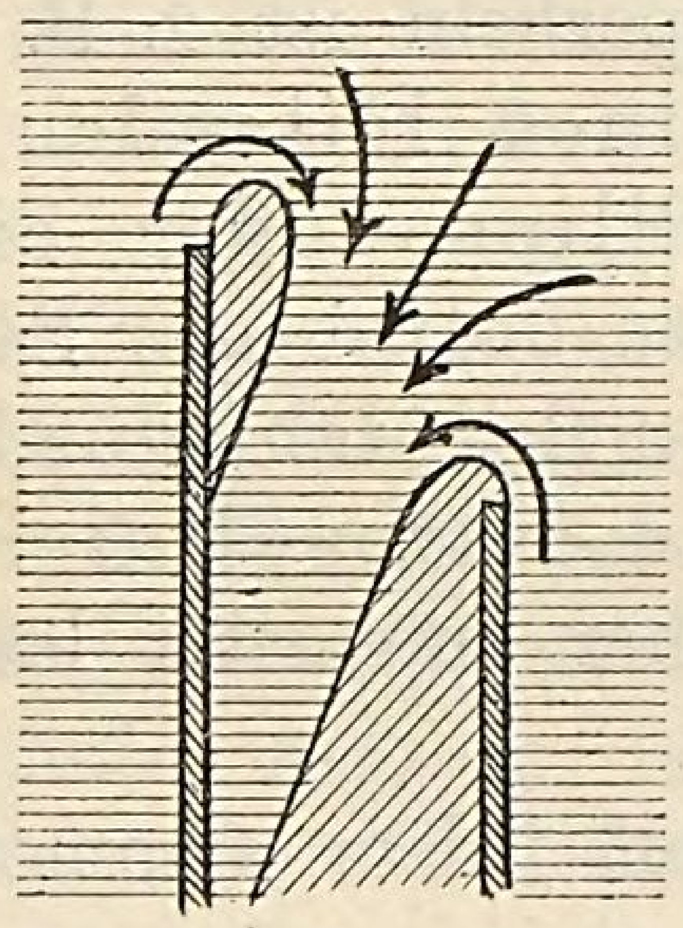
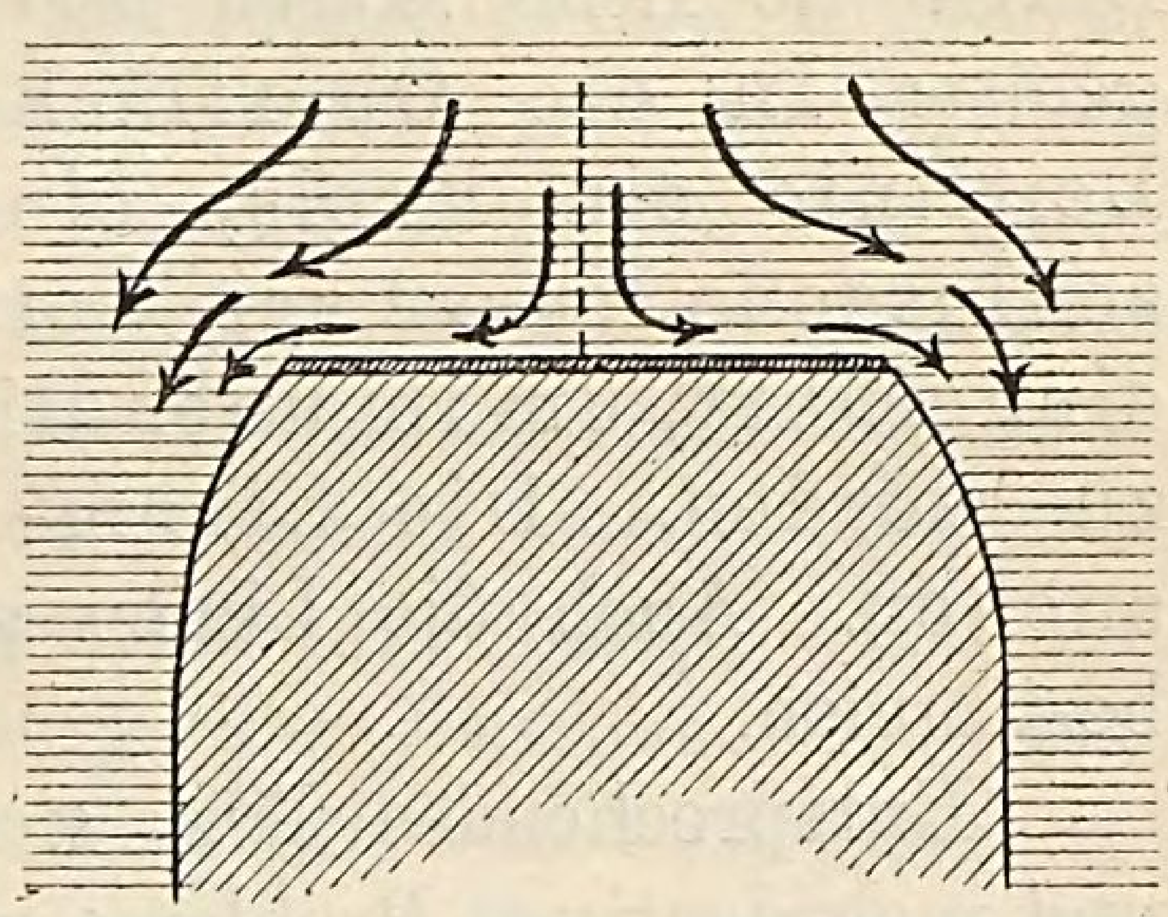


Fig. 149.



wird die Mittellinie des Strahles schräg, so daſs er gegen die Wand anschlägt, was Störungen verursacht. Wird das Ausströmen durch eine in Fig. 149 dargestellte Platte gehemmt, so sind die dort gezeichneten die Grenzen der Ausströmung. Die abbildende Funktion ist

$$Z = 2\sqrt{z} + z\sqrt{\frac{1}{z} - 1} + \arcsin\sqrt{z}.$$

Die physikalischen Annahmen dieser Theorie sind am ausführlichsten in der Helmholtzschen Abhandlung über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen vom 23. April 1868 dargestellt, die in seine gesammelten Werke aufgenommen ist.

Die Besprechung der Theorie ist hier erfolgt, um irrtümliche Deutungen der früheren Betrachtungen zu vermeiden.]

214) Übertragungen auf krumme Oberflächen. Gelingt es, eine gekrümmte Oberfläche in ein quadratisches Netz einzuteilen, so läſst sich jede der beiden Kurvengruppen als ein System von Stromlinien für gewisse Probleme stationärer Strömung betrachten. Dasselbe gilt von den Diagonalkurven des Netzes. Wie in der Ebene, so sind auch auf jeder Oberfläche unendlich viele Probleme durchführbar. Wie die Probleme der Ebene in gegenseitigen Beziehungen stehen, die durch Abbildung mittels Funktionen komplexen Arguments

wiedergegeben werden können, so stehen auch die verschiedenen Probleme auf derselben Oberfläche, ebenso die für verschiedene Oberflächen möglichen in gegenseitigen Beziehungen.

a) Abwickelbare Flächen. Jeder Sektor der Ebene läfst sich durch entsprechende Krümmung in einen geschlossenen Kegel verwandeln. Man rolle z. B. die Halbebene des symmetrischen Zweipunktproblems so zum Kegel zusammen, dafs der Mittelpunkt der lemniskatischen Kurven zur Spitze des Kegels wird. Die Hälften der in der Ebene vollständigen Kurven schliefsen sich so zusammen, dafs Eindeutigkeit an Stelle der ursprünglichen Zweideutigkeit tritt. Durch die Lemniskaten und Hyperbeln ist z. B. folgendes Problem gelöst: In die Oberfläche eines leitenden Kegels, dessen Leitlinie ein Kreis, eine Ellipse oder eine sonstige geschlossene Kurve sei, werde an beliebiger Stelle Elektrizität eingeführt, um im unendlichen Bereiche des Kegels abgeleitet zu werden. Die Strom- und Niveaulinien sind zu untersuchen. Auch die Linien gleicher Intensität lassen sich elementar bestimmen.

Entsprechendes läfst sich mit jedem symmetrischen oder zwei- und mehrdeutigen Probleme symmetrischer Art machen, z. B. auch mit den konfokalen Ellipsen und Hyperbeln. Zahlreiche der schon behandelten Figuren geben instruktive Modelle für das Verständnis der Strömungen auf krummen Oberflächen.

Ähnlich kann man mit den abwickelbaren Regelflächen verfahren. Gewisse Schraubenflächen gehören hierher. Das einfachste Beispiel ist naturgemäfs der Cylinder, dessen quadratische Oberflächeneinteilung benutzt werden kann, Scharen von Schraubenlinien herzustellen, die ihn ebenfalls in Quadrate einteilen. Dagegen treten die Probleme, die sich auf nicht abwickelbare Regelflächen beziehen, z. B. auf das einmantelige Hyperboloid und hyperbolische Paraboloid, aus der elementaren Behandlungsweise heraus.

b) Die Kugel. Projiziert man die Kugelfläche von einem ihrer Punkte aus auf die gegenüberliegende Tangentialebene, so geht bekanntlich jeder Kreis ihrer Oberfläche im allgemeinen in einen Kreis über. Zwei sich schneidende Kreise verwandeln sich dabei in Kreise, die sich unter demselben Winkel schneiden. Die Abbildung ist also eine isogonale, so dafs kleine Dreiecke der Kugelfläche in ähnliche Dreiecke auf der Tangentialebene übergehen. In manchen Lehrbüchern der Elementarmathematik, z. B. im Method. Lehrbuch Bd. II des Verfassers Stereom. IX werden diese Sätze auf einfachem Wege abgeleitet. Für die Rückprojektion der Tangentialebene auf die Kugel mit Hilfe des Antipodenpunktes gilt dasselbe. Jede quadratische Einteilung der Ebene giebt also eine solche auf der Kugel, und durch Inversion kann

die letztere wieder in eine andere Kugelteilung umgeformt werden. Solche Einteilungen geben z. B. die Meridiane und Parallelkreise und ihre Diagonalkurven, die loxodromischen Linien, die bei der obigen Projektion in logarithmische Spiralen übergehen. Ähnliches gilt vom Kreisbüschel auf der Kugelfläche bei beliebig liegenden Büschelpunkten. (Auch die sphärischen Kegelschnitte machen eine Quadrateinteilung möglich, die jedoch auf elliptische Funktionen führt. Sie vermitteln die Abbildung der Kugelfläche auf Quadrat und Rechteck. Vgl. Ing.-Math. S. 199: Quadratische Weltkarte von Peirce.)

c) Drehungsflächen. Jede Drehungsfläche kann durch Meridiane und Parallelkreise quadratisch eingeteilt werden, z. B. das Drehungsellipsoid, Drehungsparaboloid, Drehungshyperboloid und verschiedene Ringflächen. Dasselbe gilt von gewissen Kanalflächen und den durch Reciprozität aus ihnen entstandenen. Manches läfst sich elementar durchführen. Vergl. die Abhandlung des Verfassers über die Abbildung der Cyklide in Bd. 94 des Crell. Journals, ebenso die über einige Aufgaben der darstellenden Geometrie im Progr. 1883 der Hagener Gewerbeschule und im 14. Jahrg. der Zeitschr. für math. Unterricht. Endlich noch die Abhandl. über gewisse transscendente Flächen, welche die Cyklide als besonderen Fall enthalten im 94. Bande des Crell. Journals.

d) Schwieriger sind die allgemeinen Flächen zweiten Grades zu behandeln, noch mehr Schwierigkeiten bieten die höheren Grade. Auch die Oberflächen von Polyedern, besonders von regelmäfsigen, geben zu interessanten Aufgaben Anlafs.

Beispiele aus diesem Gebiete sollen nicht gegeben werden, da sie nur theoretischen Wert haben und in der Ingenieur-Wissenschaft kaum Anwendung finden. Mit diesen Bemerkungen soll das Kapitel von den zweidimensionalen Problemen abgeschlossen werden.

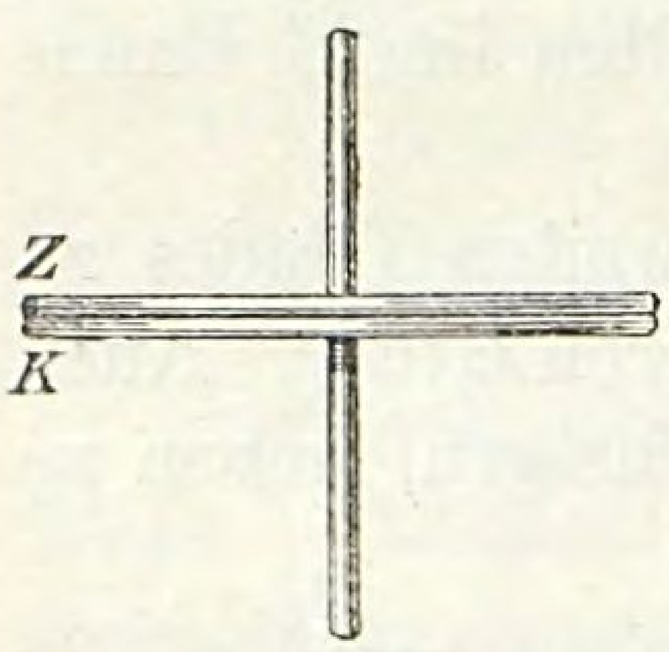
Kapitel XI.

Physikalisches über galvanische Ströme und ihr Potential.

215) Spannungsreihe der Leiter erster Klasse.

Wir haben bisher die elektrischen Strömungen in Raum und Ebene untersucht, ohne auf ihr Wesen einzugehen. Man lese in den physikalischen Lehrbüchern nach, was dort über die Fundamentalversuche Voltas gesagt ist. Es sei K eine Kupferscheibe, Z eine Zinkscheibe, jede mit einem isolierenden Glasstabe versehen, so daſs man sie handhaben kann, ohne Elektrizität abzuleiten. Berühren sich beide Platten, und hebt man sie dann parallel voneinander ab, so läſst sich mit Hilfe eines Elektroskops zeigen, daſs die Kupferplatte schwach negativ, die Zinkplatte schwach positiv geladen ist, und zwar sind beide Ladungen gleich groſs.

Fig. 150.



Ähnliches wies Volta auch von anderen Metallen nach, und er stellte folgende Spannungsreihe auf

$$+ \mid \underbrace{\text{Zink, Blei}}_{5}, \underbrace{\text{Blei, Zinn}}_{1}, \underbrace{\text{Zinn, Eisen}}_{3}, \underbrace{\text{Eisen, Kupfer}}_{2}, \underbrace{\text{Kupfer, Silber}}_{1} \mid -$$

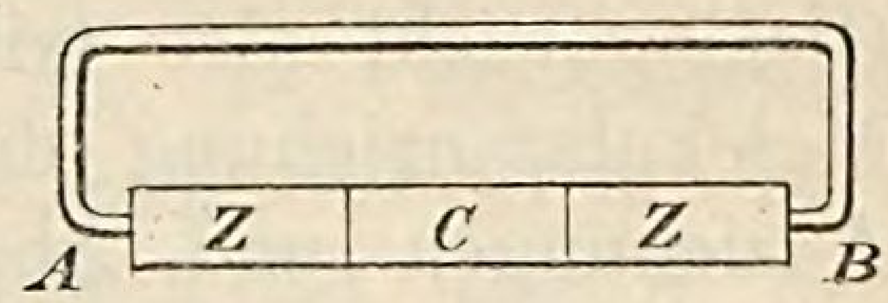
Hier bedeuten die Zahlen, daſs wenn man die Versuche mit Platten von gleicher Gröſse anstellt und die bei Blei und Zinn gemessene elektrische Menge gleich 1 setzt, bei Berührung der übrigen Metalle untereinander die den beigeschriebenen Zahlen entsprechenden Mengen entstehen. Zweitens wies Volta nach, daſs Zink und Zinn auf die Menge $5 + 1 = 6$, Zink und Eisen auf $5 + 1 + 3 = 9$, Zink und Kupfer auf $5 + 1 + 3 + 2 = 11$, Zink und Silber auf $5 + 1 + 3 + 2 + 1 = 12$, Blei und Eisen auf $1 + 3 = 4$, Blei und Kupfer auf $1 + 3 + 2 = 6$ u. s. w. führen. Das links stehende Metall ist dabei stets positiv, das rechts

stehende negativ geladen. Man kann das Gesetz als das Voltasche Additionsgesetz bezeichnen.

In neuerer Zeit hat man die Spannungsreihe ergänzt und die Verhältniszahlen genauer bestimmt. Insbesondere ist auch das obige Additionsgesetz bestätigt worden.

Man hat anzunehmen, dafs zwischen den Metallen im Momente der Berührung eine Potentialdifferenz auftritt, die ein Überströmen geringer Elektrizitätsmengen veranlafst. Diese Mengen sind proportional der Potentialdifferenz. Bezeichnet man die zwischen Zink und Kohle entstehende mit $Z \mid C$, die zwischen Kohle und Platin entstehende mit $C \mid Pl$, die zwischen Zink und Platin entstehende mit $Z \mid Pl$, so ist nach obigem

Fig. 151.



1) $Z|C + C|Pl = Z|Pl$ oder $(V_z - V_c) + (V_c - V_p) = V_z - V_p$.

Verbindet man das Platin mit einem Zinkdraht, der zum Zink zurückführt, so entsteht zwischen Zink und Zink die Potentialdifferenz

2) $$Z \mid C + C \mid Pl + Pl \mid Z$$

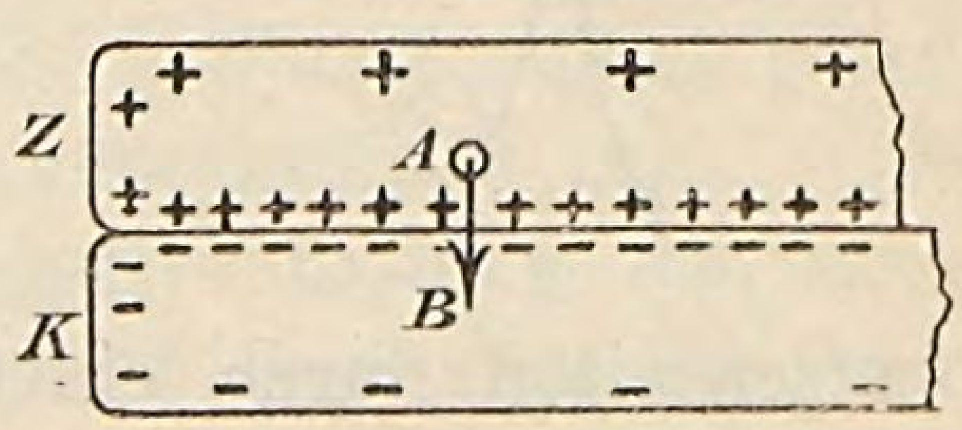
oder nach 1)

$$Z \mid C + C \mid Pl - (Z \mid C + C \mid Pl) = 0,$$

d. h. durch den Draht findet von B nach A hin kein Überströmen von Elektrizität statt. Indem man (in nicht geschickter Weise) die Potentialdifferenz als elektromotorische Kraft bezeichnet, kann man sagen, die elektromotorische Kraft der geschlossenen Metallkette sei gleich Null.

216) Deutung des Versuchs von Volta. Nach Helmholtz hat man anzunehmen, dafs z. B. Kupfer auf unmefsbar kleine Entfernung hin auf die beiden in der Grenzschicht des Zink enthaltenen Elektrizitäten dadurch scheidend einwirkt, dafs es die negative zu sich herüber zieht, weil sie diese stärker anzieht, als die andere Elektrizität. Ist AB gleich l diese unmefsbare Entfernung, so ist die scheidende Anziehungskraft $p = \frac{V_1 - V_2}{l}$, wenn V_1 und V_2 die Potentialwerte bei A und B für die Anziehung des Kupfers auf die benachbarte negativ elektrische Einheit sind. Ebenso wirkt das Zink auf die benachbarte positive Elektrizität in Kupfer anziehend ein. Diese Scheidung dauert so lange fort, bis die auf jedes elektrische Teilchen

Fig. 152.



wirkenden elektrischen Anziehungen und Abstofsungen eine Resultante geben, die der Anziehungskraft p des Metalls entgegengesetzt gleich ist. Ist also M_1 das Potential sämtlicher elektrischer Massen auf die negative Einheit in A, M_2 der Potentialwert in B, so mufs beim Gleichgewicht $\frac{M_1 - M_2}{l} = -p$ sein, d. h. $\frac{V_1 - V_2}{l} + \frac{M_1 - M_2}{l} = 0$ oder auch

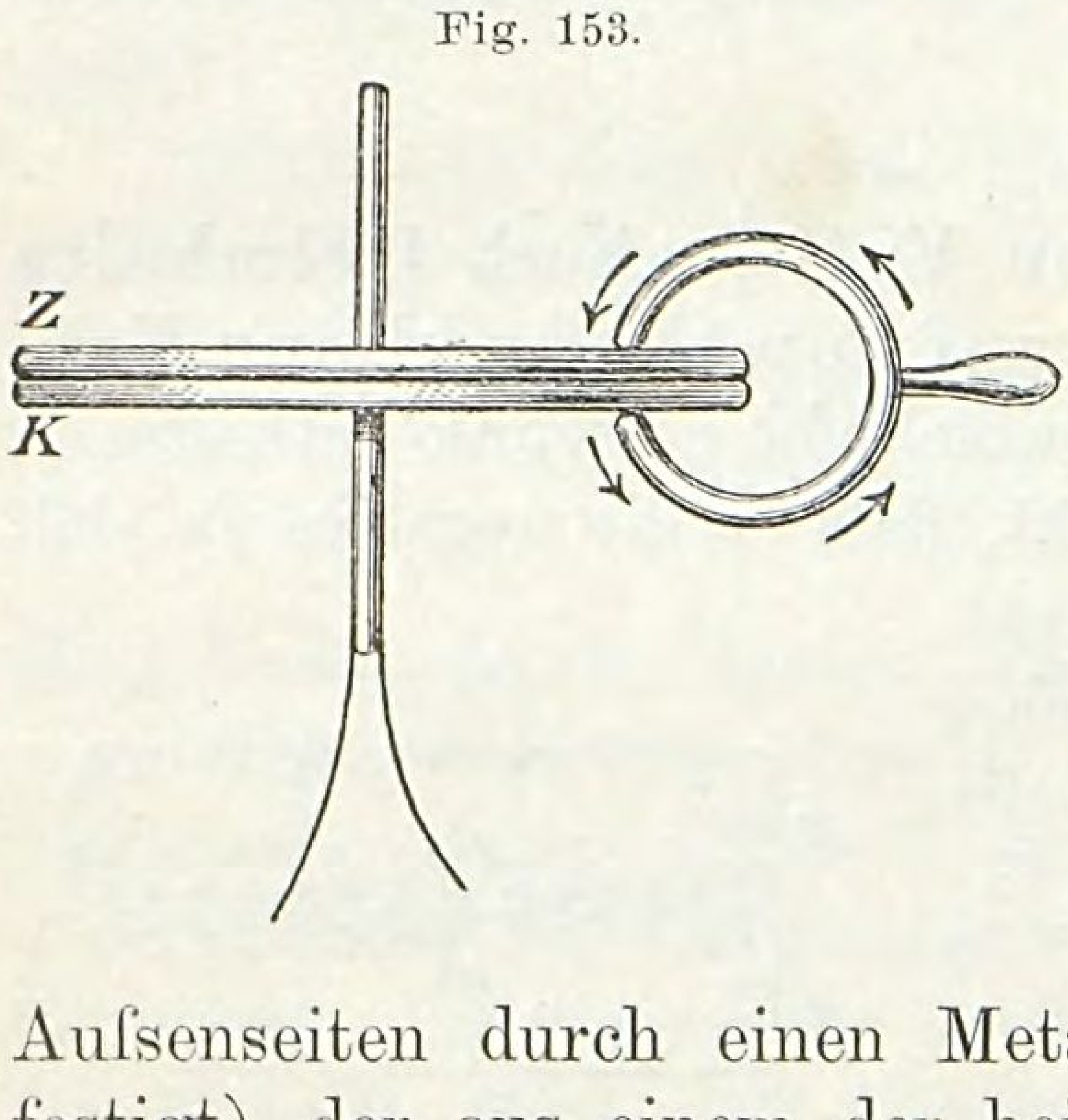
$$(V_1 - V_2) + (M_1 - M_2) = 0.$$

Gleichgewicht also tritt ein, sobald die Potentialdifferenzen für jene Molekularanziehung der Metalle einerseits und für die elektrischen Anziehungen und Abstofsungen andererseits entgegengesetzt gleich sind. Welche von beiden Differenzen man untersucht, ist gleichgültig.

Die Anordnung der übergeströmten Elektrizitätsteilchen entspricht etwa der, die man nach Nr. 75 bezw. Fig. 144c an zwei Kondensatorplatten beobachtet. Diese sind auf der Berührungsfläche und an den Rändern mit Schellack zu überstreichen und an den Aufsenseiten frei zu lassen. Die sich bindenden Elektrizitäten verbreiten sich über die gesamte Oberfläche der beiden Platten, jedoch ist auf der Aufsenseite nur ein verschwindend kleiner Teil vorhanden. Ähnlich ist die Verteilung auch hier. Die besprochenen Molekularanziehungen der Metalle sind es, die dem Wiedervereinigen entgegenstehen, sie übernehmen also gewissermafsen die Rolle der isolierenden Schellackschicht.

Besonders die Versuche, die Kohlrausch mit seinem Kondensator angestellt hat, haben das Additionsgesetz bestätigt und die Verhältniszahlen der Spannungsreihe genauer festgestellt. Die Platten wurden aus den zu untersuchenden Metallen hergestellt, oder es wurden, da es nur auf die Oberflächen ankommt, Messingplatten galvanisch mit den zu untersuchenden Metallen überzogen. Um diese Platten direkt als Kondensatoren benutzen zu können, wurden Innenseite und Rand mit jener Schellackschicht überzogen. Da die Gröfse und Lage der Berührungsfläche sich als gleichgültig erwies, wurden die vom Schellack freien Aufsenseiten durch einen Metalldraht (an isolierendem Stäbchen befestigt), der aus einem der beiden Metalle hergestellt war, in leitende Berührung gebracht. Augenblicklich erfolgte das Überströmen der Elektrizitäten und ihre oben besprochene Anordnung. Die Potentialdifferenz ergab sich als unabhängig davon, ob man der einen Platte

Fig. 153.



vorher ein besonderes Potential gab. So konnte man z. B. die eine Platte ableitend mit der Erde verbinden, dann wurde das Potential der anderen gleich der Differenz selbst, denn die erstere hatte das Potential Null. Mit Hilfe der früher entwickelten Formel

$$V = M_1 - M_2 = 4\pi\delta d,$$

wo $\delta = \frac{E}{F}$ die Dichtigkeit, d die Dicke der Isolierschicht ist, wurde nun die Differenz $V = M_1 - M_2$ aus der am Elektrometer zu messenden Elektrizitätsmenge E bestimmt und damit $M_1 | M_2$, die Verhältniszahl der Spannungsreihe für die beiden Metalle, bestimmt und so die Einschaltung in die Reihe ermöglicht. Das Nähere findet man in den Lehrbüchern, z. B. bei Wüllner. Leiter, für welche das Additionsgesetz gilt, heifsen Leiter erster Klasse.

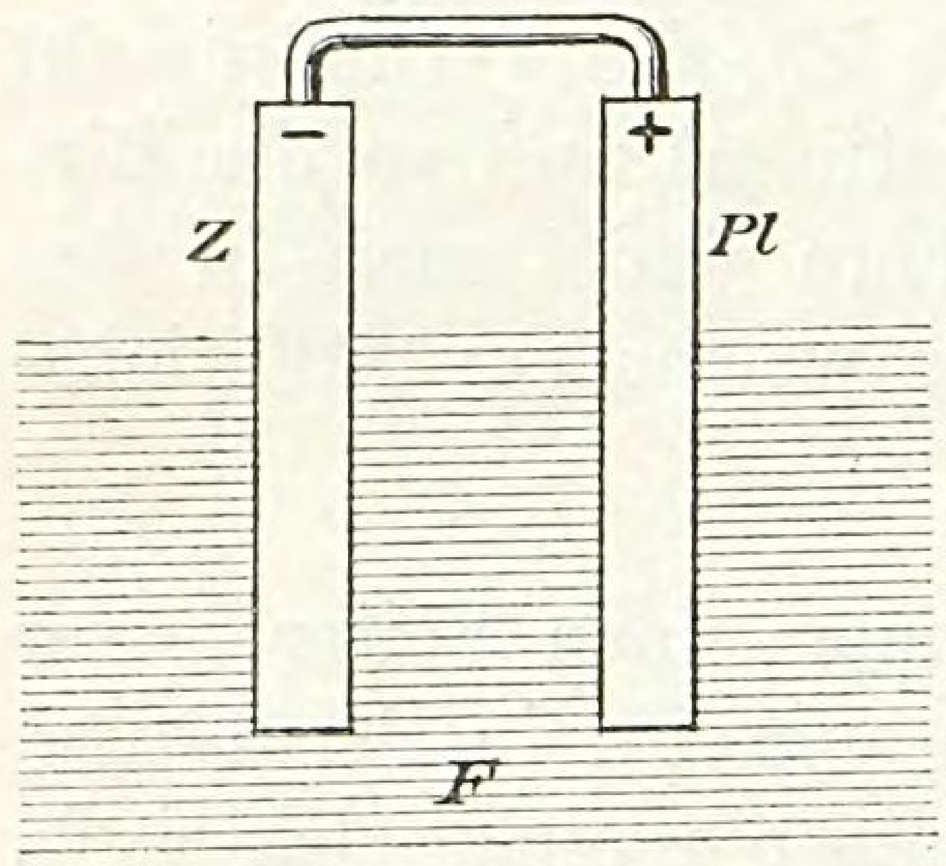
217) Leiter zweiter Klasse. Bringt man einen Leiter erster Klasse mit einer Flüssigkeit, die ihn chemisch angreift, in Berührung, so wird der Leiter elektrisch, die Flüssigkeit entgegengesetzt elektrisch. Um dies zu zeigen, lege man z. B. auf die mit Schellack überzogene Kupferplatte des Kondensators eine ebenso gefirniste Glasplatte, breite auf dieser die zu untersuchende Flüssigkeit aus und bringe Flüssigkeit und Kupfer mittels eines Kupferdrahtes (an Isolierstab) in leitende Verbindung. Beide werden elektrisch. Die Scheidung hört auf, sobald die abstofsenden und anziehenden Wirkungen der geschiedenen Elektrizitäten die Fortsetzung unmöglich machen. Würde man dagegen die geschiedenen Elektrizitäten entfernen, so würde die Scheidung von neuem beginnen.

Taucht man isoliertes Zink in verdünnte Schwefelsäure, so erscheint es selbst negativ, die Flüssigkeit aber positiv elektrisch, zugleich ist folgendes vor sich gegangen. Nach neueren Annahmen befinden sich die Moleküle der Schwefelsäure SO_4H_2 schon durch die Verdünnung im Zustande der Dissociation, so dafs die Trennung auch durch sehr schwache Kräfte ermöglicht werden kann. Das SO_4 verbindet sich mit dem Zink zu elektrisch neutralem Zinkvitriol SO_4Zn. Vereinzelte Wasserstoffbläschen bleiben am Zink hängen. Es ist so, als ob SO_4 negativ elektrisch geladen wäre, und als ob seine Elektrizität bei der chemischen Vereinigung frei auf das Zink übergegangen wäre. Dem H_2 würde also eine positive Ladung zuzuschreiben sein. Der elektrische Vorgang hört auf, sobald die negative Ladung des Zink die weitere Anziehung von SO_4 hindert. Entfernt man aber die freie negative Elektrizität vom Zink, so kann der chemische Vorgang wieder beginnen.

Bringt man Zink und Platin, beide zunächst isoliert, in verdünnte Schwefelsäure, so geschieht am Zink dasselbe wie vorher, am chemisch

fast gar nicht angegriffenen Platin zunächst fast nichts. Verbindet man das Platin durch einen Zinkdraht mit dem Zink, so hört die chemische Aktion am Zink nicht wie vorher auf, sondern sie wird fortgesetzt, die negative Elektrizität des Zink strömt also nach dem Platin hin und hemmt nicht mehr die Zersetzung der Schwefelsäure, zugleich strömt dauernd positive Elektrizität vom Platin zum Zink. Es entsteht also ein dauernder elektrischer Strom. Seine Richtung bestimmt man auf Grund geschehener Einigung nach dem Sinne der Wanderung der positiven Elektrizität. Das freie Ende des Platin, wo der Strom in den Draht eintritt, heifst der positive Pol, das des Zinks der negative Pol.

Fig. 154.



Da eine dauernde Bewegung stattfindet, besteht zwischen den Polen eine Potentialdifferenz, die verschieden von Null ist. Die Flüssigkeiten enthaltenden Ketten erhalten also nicht, wie die früher besprochenen, als Summe der Potentialdifferenzen den Wert Null, sondern einen andern Wert. Demnach mufs das Additionsgesetz für Flüssigkeiten ungültig sein.

Handelt es sich z. B. um Zink, Kupfer und verdünnte Schwefelsäure, so ist

$$V_z - V_f = Z \mid F$$

$$V_f - V_k = F \mid K$$

also durch Addition

$$V_z - V_k = Z \mid F + F \mid K.$$

Wäre nun

$$Z \mid F + F \mid K = Z \mid K,$$

so würde

$$Z \mid F + F \mid K + K \mid Z = 0$$

sein, d. h. der Schlufs der Kette durch Kupferdraht müfste die Potentialdifferenz Null geben. Sie ist aber, da ein Strom entsteht, verschieden von Null, also mufs $Z \mid F + F \mid K$ verschieden von $Z \mid K$ sein, d. h. das Additionsgesetz darf hier nicht angewandt werden.

Man bezeichnet daher die festen Leiter (Quecksilber ist allerdings eingeschlossen) als Leiter erster Ordnung, die Flüssigkeiten als solche zweiter Ordnung. Die dissoziierten Moleküle der Flüssigkeit denkt man sich polarisiert und so gerichtet, dafs z. B. das SO_4 dem Zink, das H_2 dem Platin bezw. Kupfer zugekehrt ist. Wird einem Moleküle durch das Zink sein SO_4 entzogen, so verbindet sich das frei gewordene H_2 mit dem SO_4 des benachbarten Moleküls, dessen frei

werdendes H_2 mit dem SO_4 des folgenden, bis endlich am andern Metall ein H_2 frei wird. Nur handelt es sich dabei nicht um chemische Verbindung und Trennung, sondern nur um physikalisches Umlagern. Die Flüssigkeitsmoleküle bilden gewissermafsen Ketten, deren Mittellinien den Kraftlinien folgen. In diesen Richtungen erfolgt ein unaufhörliches Auswechseln der chemischen Bestandteile.

Die zwischen den Polen bestehen bleibende Potentialdifferenz giebt die Arbeit an, die nötig sein würde, die Einheit der positiven oder negativen Elektrizität ihrer Strömungsrichtung entgegen, d. h. gegen die wirksamen Anziehungen bezw. Abstofsungen, vom andern Pole zum ursprünglichen zurückzubringen. Sie ist ebenso grofs, wie die Arbeit, die nötig ist, die elektrische Einheit durch die Widerstände des Schliefsungsbogens hindurchzuführen. Man bezeichnet sie als die elektromotorische Kraft der Kette.

Setzt man z. B. Zink | Kupfer = 100, so ergiebt sich nach Kohlrausch für die zu nennenden Flüssigkeiten

Zink | Zinkvitriol = — 129, Zink | Schwefelsäure = — 115,
Kupfer | Schwefelsäure = — 40,25,
Kupfer | Zinkvitriol = — 36, Kupfer | Kupfervitriol = — 21,5,
Amalgamiertes Zink | Schwefelsäure = — 149,
Platin | Salpetersäure = — 149.

Demnach giebt z. B. die Kette Zink-Zinkvitriol-Kupfer beim Schlufs durch einen Kupferdraht folgendes:

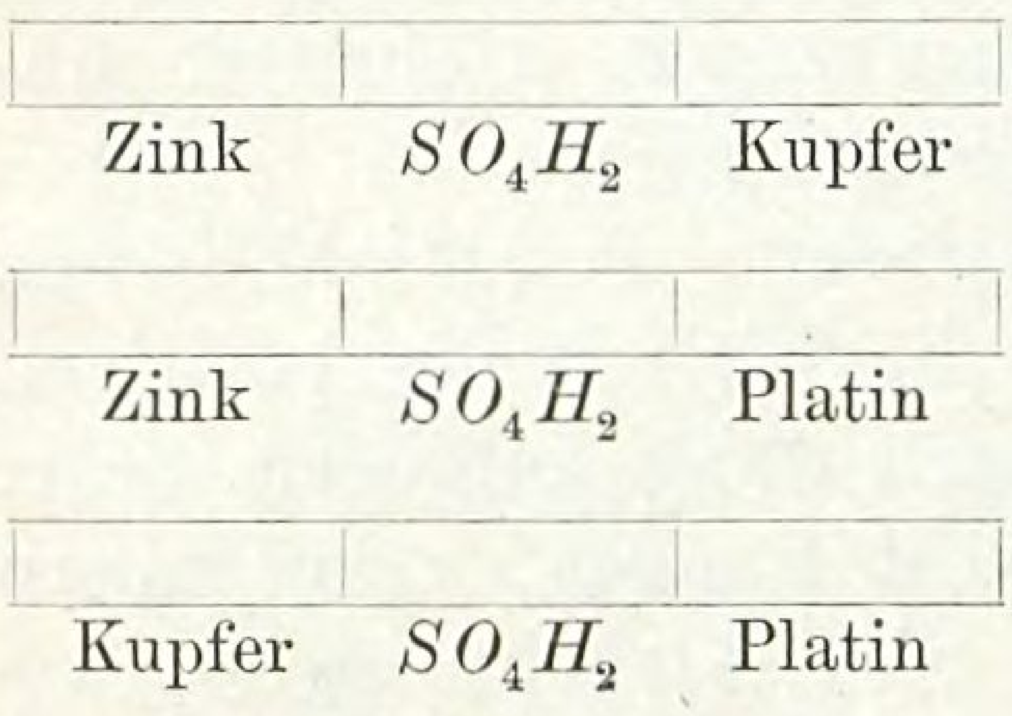
	Zink-Zinkvitriol	= — 129
	Zinkvitriol-Kupfer	= + 36
	Kupfer-Zink	= — 100
zwischen	Zink und Zink	= — 193 = $V_z - V_{z_1}$.

[Dagegen hätte die Kette Zink, Blei, Kupfer nach Voltas Zahlen gegeben Zink | Blei = 5, Blei | Kupfer = 6, Kupfer | Zink = — 11, also Summe gleich Null, d. h. $V_z - V_{z_1} = 0$.] So erkennt man, dafs die Flüssigkeiten sich nicht in die frühere Spannungsreihe einpassen lassen. In dieser Eigenschaft liegt die Möglichkeit der Erzeugung galvanischer Ströme.

Man kann auch Ketten mit mehreren Flüssigkeiten bilden, wobei die letzteren durch poröse Thoncylinder voneinander zu trennen sind. In jede der Flüssigkeiten wird dann ein Leiter erster Klasse gestellt. Hierher gehören das Daniellsche und das Grovesche Element. Darüber vergleiche man die Lehrbücher. — Nennt man die durch Addition gewonnene Zahl die Schlufszahl der Kette (z. B. — 193), so kann man sagen: Die Stromstärke ist proportional der Schlufszahl.

218) Vergleichung von Ketten mit derselben Flüssigkeit. Man kombiniere zunächst Zink und Kupfer, dann Zink und Platin, endlich Kupfer und Platin mit verdünnter Schwefelsäure zur Kette. Dann ist die Potentialdifferenz der ersten Kette, wenn F die Flüssigkeit bedeutet

Fig. 155.



1) Zink | F + F | Kupfer + Kupfer | Zink,

die der zweiten

2) Zink | F + F | Platin + Platin | Zink,

die der dritten

3) Kupfer | F + F | Platin + Platin | Kupfer.

Aus 2) und 1) folgt durch Subtraktion

— F | Kupfer — Kupfer | Zink + F | Platin + Platin | Zink

oder

Platin | Zink + Zink | Kupfer + Kupfer | F + F | Platin

oder, da nach den Gesetzen der Leiter erster Klasse für die beiden ersten Posten Platin | Kupfer gesetzt werden kann

Platin | Kupfer + Kupfer | F + F | Platin,

oder, wenn mit Kupfer begonnen wird

Kupfer | F + F | Platin + Platin | Kupfer.

Bildet man zwei Ketten aus demselben Anfangsgliede und derselben Flüssigkeit, jedoch mit verschiedenen Schlufsgliedern, so ist die Differenz der elektromotorischen Kräfte beider Ketten gleich der einer dritten Kette, die aus den Schlufsgliedern und derselben Flüssigkeit gebildet werden kann.

Nach diesem Gesetze kann man für jede Flüssigkeit eine Spannungsreihe der mit ihr zu kombinierenden Leiter erster Klasse aufstellen. Dazu vergleiche man die Lehrbücher.

219) Verbindung gleichartiger Ketten hintereinander. Drei Ketten aus Zink, Kupfer und verdünnter Schwefelsäure sollen hintereinander geschaltet werden werden, so dafs jedesmal der Kupferdraht vom Kupfer der einen zum Zink der andern führt. Dann sind die aufeinander folgenden Differenzen

$$Z_1 \mid F_1 + F_1 \mid K_1 + K_1 \mid Z_2 + Z_2 \mid F_2 + F_2 \mid K_2 + K_2 \mid Z_3 + Z_3 \mid F_3 + F_3 \mid K_3 + K_3 \mid Z_1$$

oder

$$Z|F+F|K+K|Z+Z|F+F|K+K|Z+Z|F+F|K+K|Z.$$

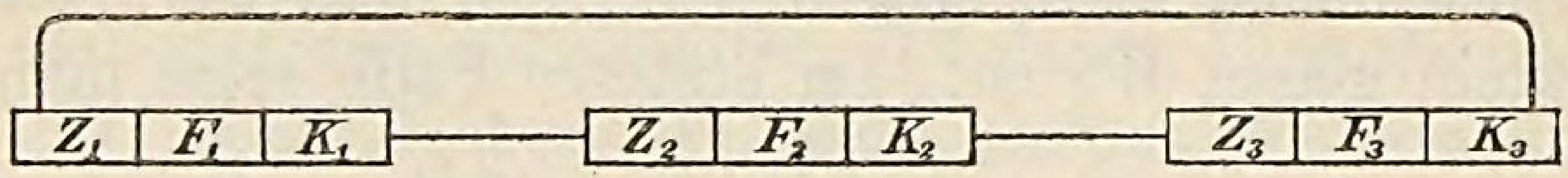
Die gesamte elektromotorische Kraft ist also gleich

$$3\,(Z\,|\,F+F\,|\,K+K\,|\,Z),$$

d. h. dreimal so grofs, wie die der ersten Kette. Die Potentialdifferenzen bleiben nämlich trotz der Verbindungen erhalten. Folglich:

Die Verbindung von n gleichen Ketten hintereinander giebt die nfache Potentialdifferenz oder die nfache elektromotorische Kraft. Im folgenden soll diese Schaltungsweise als Säulenschaltung bezeichnet werden.

Fig. 156.

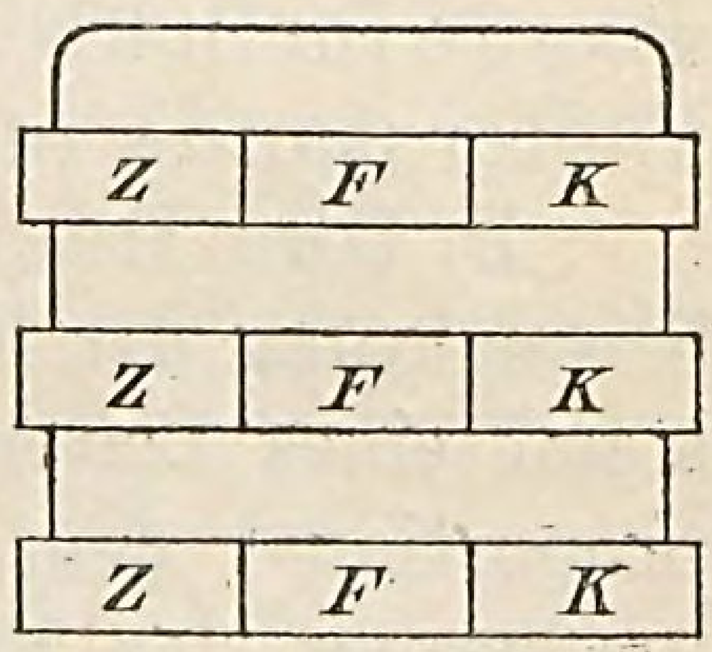


220) Verbindung gleichartiger Ketten nebeneinander. Die von Zink zu Zink gehenden Kupferdrähte geben die Potentialdifferenzen $Z\,|\,K+K\,|\,Z=0$, ebenso geben die von Kupfer zu Kupfer gehenden keinen Beitrag. Die Potentialdifferenz der Kette ist also, wie die der einfachen, gleich

$$Z\,|\,F+F\,|\,K+K\,|\,Z.$$

Nebeneinanderschaltung bringt also keine Steigerung der Potentialdifferenz hervor. Im folgenden soll diese Schaltung, weil sie nur eine Vergröfserung der Platten bedeutet, als Oberflächenschaltung oder Parallelschaltung bezeichnet werden.

Fig. 157.



221) Vergleich beider Schaltungsarten. Nach dem Ohmschen Gesetze ist die Stromstärke proportional der Summe sämtlicher Potentialdifferenzen und umgekehrt proportional der Summe sämtlicher Widerstände. Ist D die Summe der Potentialdifferenzen, W_i die der inneren Widerstände (in der Flüssigkeit und den Metallen), W_b die der äufseren Widerstände im Schliefsungsbogen, so ist abgesehen von einem konstanten Faktor $\varkappa$, die Stromstärke oder Intensität

$$J=\frac{D}{W_i+W_b}.$$

Es fragt sich nun, wann Säulenschaltung und wann Oberflächenschaltung anzuwenden ist.

a) Säulenschaltung. Sind D, W_i die Potentialdifferenz bezw. der innere Widerstand für ein Element (Becher), so hat man bei Säulenschaltung für n Elemente die Stromstärke

$$J = \frac{nD}{nW_i + W_b},$$

denn dabei wächst die elektromotorische Kraft von D auf nD, aber es ist der innere Widerstand von n Bechern zu überwinden.

Zwei Grenzfälle sollen betrachtet werden, der, dafs W_b verschwindend klein gegen nW_i ist, und der, dafs nW_i verschwindend klein gegen W_b ist. Im ersteren Falle setze man $W_b = 0$. Man findet

$$J = \frac{nD}{nW_i} = \frac{D}{W_i},$$

d. h. die Intensität bleibt bei n Bechern dieselbe, wie bei einem Becher.

Im anderen Falle setze man $nW_i = 0$. Man findet

$$J = \frac{nD}{W_b} = n\frac{D}{W_b},$$

d. h. die Intensität steigt auf das nfache. Folglich:

Säulenschaltung ist unzweckmäfsig bei geringem Widerstande im Schliefsungsbogen, sie ist zweckmäfsig bei starkem Widerstande im Schliefsungsbogen.

b) Oberflächenschaltung. Hier bleibt nach obigem D bei der Vermehrung der Becherzahl unverändert dasselbe. Da aber der Widerstand eines Leiters, auch der einer leitenden Flüssigkeit, umgekehrt proportional dem Querschnitte der Leitung ist, da ferner die Vergröfserung der Plattenflächen einer solchen Querschnittsvermehrung entspricht, so wird der innere Widerstand W_i auf den n^{ten} Teil reduziert. So wird

$$J = \frac{D}{\frac{1}{n}W_i + W_b}.$$

Wiederum sind die beiden Grenzfälle zu betrachten. Ist W_b sehr klein gegen $\frac{1}{n}W_i$, so setze man $W_b = 0$. Man erhält

$$J = \frac{D}{\frac{1}{n}W_i} = \frac{nD}{W_i},$$

d. h. die Intensität steigt auf das nfache. Ist dagegen $\frac{1}{n}W_i$ klein gegen W_b, so folgt

$$J = \frac{D}{W_b},$$

d. h. die Intensität ist unverändert geblieben. Folglich:

Oberflächenschaltung ist unzweckmäſsig bei groſsem Widerstande im Schlieſsungsbogen, sie ist sehr zweckmäſsig bei geringem Widerstande im Schlieſsungsbogen.

222) Vergleich der möglichen Kombinationen. Hat man 24 Becher gleicher Konstruktion, so sind acht ordnungsmäſsige Kombinationen möglich, die durch $1 \cdot 24$, $2 \cdot 12$, $3 \cdot 8$, $4 \cdot 6$, $6 \cdot 4$, $8 \cdot 3$, $12 \cdot 2$, $24 \cdot 1$ gegeben sind, wo jedesmal der erste Faktor die Anzahl der Säulen bedeutet, der zweite die der Plattenpaare angiebt. Bei gleichem W_b ergeben sich folgende Intensitäten, bei denen D wiederum die Potentialdifferenz für einen Becher, W_i den inneren Widerstand für einen Becher bedeutet.

$$\underset{1\cdot 24}{J} = \frac{24\,D}{24\,W_i + W_b},$$

$$\underset{2\cdot 12}{J} = \frac{\frac{24}{2}D}{\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{2}W_i + W_b} = \frac{12\,D}{6\,W_i + W_b},$$

$$\underset{3\cdot 8}{J} = \frac{\frac{24}{3}D}{\frac{1}{3}\cdot\frac{24}{3}W_i + W_b} = \frac{8\,D}{2{,}667\,W_i + W_b},$$

$$\underset{4\cdot 6}{J} = \frac{\frac{24}{4}D}{\frac{1}{4}\cdot\frac{24}{4}W_i + W_b} = \frac{6\,D}{1{,}5\,W_i + W_b},$$

$$\underset{6\cdot 4}{J} = \frac{\frac{24}{6}D}{\frac{1}{6}\cdot\frac{24}{6}W_i + W_b} = \frac{4\,D}{0{,}667\,W_i + W_b},$$

$$\underset{8\cdot 3}{J} = \frac{\frac{24}{8}D}{\frac{1}{8}\cdot\frac{24}{8}W_i + W_b} = \frac{3\,D}{0{,}375\,W_i + W_b},$$

$$\underset{12\cdot 2}{J} = \frac{\frac{24}{12}D}{\frac{1}{12}\cdot\frac{24}{12}W_i + W_b} = \frac{2\,D}{0{,}167\,W_i + W_b},$$

$$\underset{24\cdot 1}{J} = \frac{\frac{24}{24}D}{\frac{1}{24}\cdot\frac{24}{24}W_i + W_b} = \frac{D}{\frac{1}{24}W_i + W_b}.$$

223) Der Maximaleffekt. Für irgend eine dieser Zusammenstellungen sei nun W_b gleich dem gesamten inneren Widerstande W_i, D die gesamte elektromotorische Kraft, also die Intensität

$$J = \frac{D}{W_b + W_b} = \frac{D}{2\,W_b}.$$

Macht man dann bei gleicher Becherzahl die Kombination zu einer anderen, indem man z. B. die Zahl der Säulen n mal so grofs macht, die der Plattenpaare aber auf den n^{ten} Teil reduziert, so wird nach obigem die neue Intensität

$$J_1 = \frac{\frac{D}{n}}{\frac{W_b}{n^2} + W_b} = \frac{D}{\frac{1}{n} W_b + n W_b} = \frac{D}{W_b\left(n + \frac{1}{n}\right)}.$$

Macht man der Reihe nach $n = 2, 3, 4, \ldots$, so wird der Reihe nach J_1 gleich $\frac{D}{W_b\left(2+\frac{1}{2}\right)}$, $\frac{D}{W_b\left(3+\frac{1}{3}\right)}$, $\frac{D}{W_b\left(4+\frac{1}{4}\right)}$, ..., d. h. bei jeder Vermehrung der Säulenzahl nimmt die Stromstärke ab.

Reduziert man dagegen die Anzahl der Säulen auf den n^{ten} Teil und macht man die der Plattenpaare n mal so grofs, so erhält man

$$J_2 = \frac{D}{W_b\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)}\right]} = \frac{D}{W_b\left[\frac{1}{n} + n\right]}.$$

Für n gleich 2, 3, 4, ... also erhält man auch jetzt die entsprechende Schwächung. Folglich:

Für jede Anzahl von Bechern ist diejenige Kombination die günstigste, bei welcher der Widerstand im Schliefsungsbogen gleich dem inneren Widerstande ist.

Die Anzahl der Säulen, die sich daraus berechnen läfst, könnte aber eine gebrochene werden. Also mufs man den Satz dahin beschränken, dafs die Kombination um so günstiger ist, je näher W_b dem inneren Widerstande W_i ist.

224) **Aufgabe.** Gegeben seien m Becher, jeder von der elektromotorischen Kraft D und von einem inneren Widerstande W_i; der äufsere Widerstand sei W_b. Welche Kombination ist die günstigste?

Auflösung. Wählt man eine Säule mit m Plattenpaaren, so wird die Intensität

$$J_{1 \cdot m} = \frac{mD}{m W_i + W_b},$$

wählt man n Säulen mit $n_1 = \frac{m}{n}$ Plattenpaaren, so erhält man

$$J_{n \cdot n_1} = \frac{\frac{m}{n} D}{\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{n} W_i + W_b}.$$

Die höchste Intensität ergiebt sich bei $\frac{m}{n^2} W_i = W_b$, also ergiebt sich die günstigste Anzahl der Säulen aus

$$n = \sqrt{\frac{m W_i}{W_b}},$$

die zugehörige Anzahl der Plattenpaare aus

$$n_1 = \frac{m}{n} = \sqrt{\frac{m W_b}{W_i}}.$$

Die Kenntnis von D ist für die Lösung nicht nötig.

Beispiel. Hat man 8 Becher, jeden von einem inneren Widerstande von 15 Widerstandseinheiten und sind im äußeren Schließungsbogen 40 Widerstandseinheiten zu überwinden, so wählt man als Anzahl der Plattenpaare die nächste ganze Zahl zu

$$n_1 = \sqrt{\frac{m W_b}{W_i}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 40}{15}} = 4{,}3,$$

d. h. die Zahl 4, für die Anzahl der Säulen also $\frac{8}{4} = 2$.

Probe: Die Intensität wird

$$\underset{2 \cdot 4}{J} = \frac{\frac{8}{2} D}{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{2} W_i + W_b} = \frac{8 D}{4 W_i + 2 W_b} = \frac{8 D}{4 \cdot 15 + 2 \cdot 40} = \frac{2}{35} D.$$

Eine Säule mit acht Plattenpaaren würde geringere Intensität geben, nämlich

$$\underset{1 \cdot 8}{J} = \frac{8 D}{8 W_i + W_b} = \frac{8 D}{8 \cdot 15 + 40} = \frac{1}{20} D.$$

Vier Säulen mit je 2 Plattenpaaren würden geben

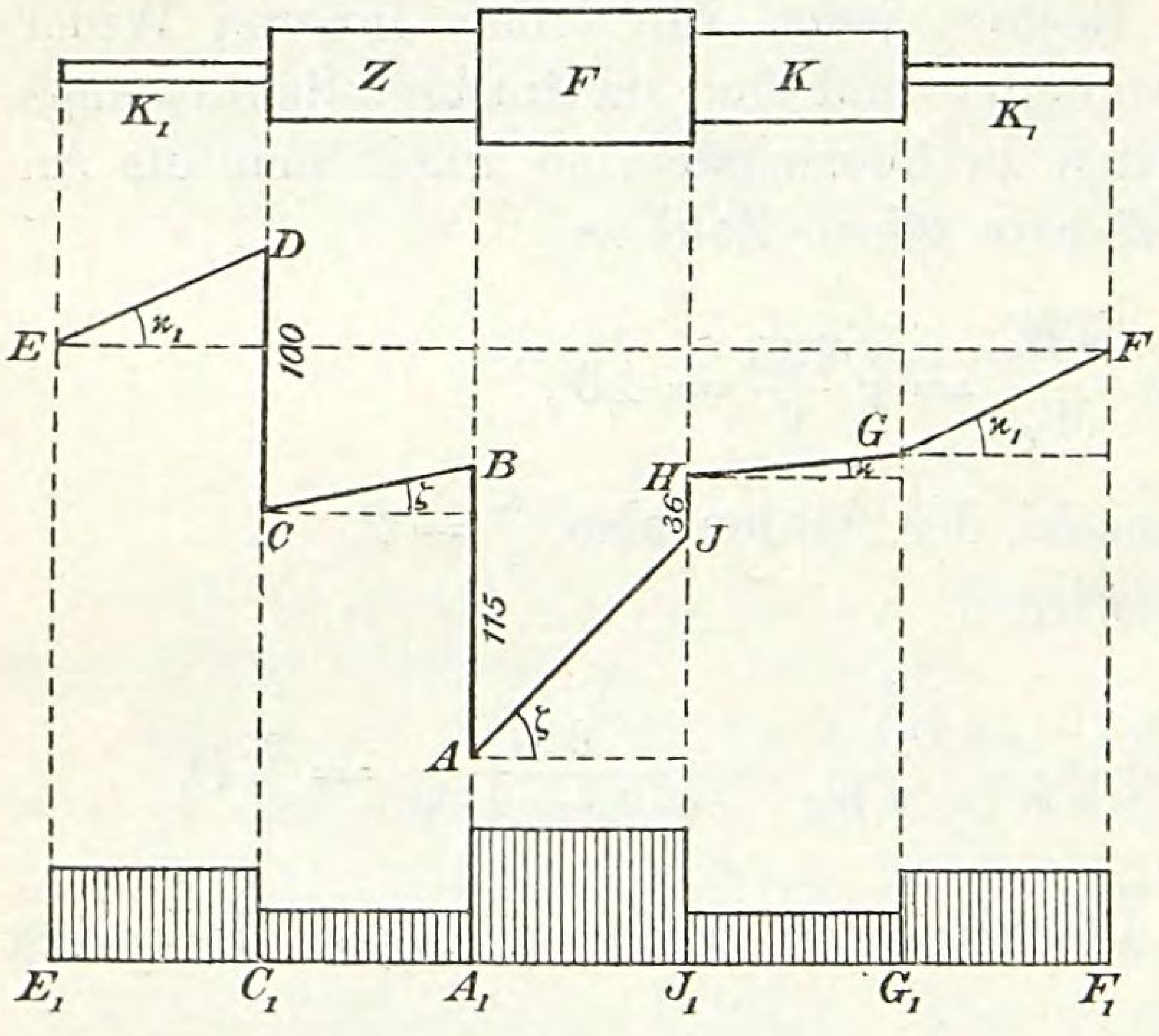
$$\underset{4 \cdot 2}{J} = \frac{\frac{8}{4} D}{\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{4} W_i + W_b} = \frac{8 D}{2 W_i + 4 W_b} = \frac{8 D}{2 \cdot 15 + 4 \cdot 40} = \frac{4}{95} D.$$

was ebenfalls weniger ist. (Es stimmt mit $\underset{1 \cdot 8}{J}$ nicht überein, weil $2 \cdot 4$ nur die angenähert günstigste Kombination war.)

225) Graphische Darstellung der Strömung in einer Kette. Der Vorgang in der aus Zink, Kupfer und verdünnter Schwefelsäure gebildeten Kette kann man sich mit Hilfe der in Nr. 217 gegebenen Zahlen Zink | Schwefelsäure = — 115, Kupfer-Schwefelsäure = — 36, Zink | Kupfer = + 100 (also Kupfer-Zink = — 100) leicht veranschaulichen, sobald man nur den Querschnitt jedes Leiters über-

all als konstant annimmt, so daſs das Potentialdiagramm für jeden durch eine schräge Gerade begrenzt wird, aus der sich das Gefälle als Tangente des Neigungswinkels ergiebt. So bedeutet z. B. die Neigung von *ED* das Potentialgefälle im Kupferdraht, $DC = -100$ den durch die Berührung Kupfer-Zink entstehenden Potentialabsturz 100, die Neigung von *CB* das Potentialgefälle im Zink, *BA* den durch die Berührung Zink-Schwefelsäure entstehenden Potentialabsturz 115, die Neigung von *AJ* das Potentialgefälle in der verdünnten Schwefelsäure, *JH* den plötzlichen Potentialaufstieg durch die Berührung Schwefelsäure-Kupfer, die Neigung von *HG* das Potentialgefälle in der Kupferplatte, die von *GF* das stärkere Gefälle in dem gröſseren Widerstand leistenden Drahte

Fig. 158.



Um die Wanderung der negativen Elektrizität zu veranschaulichen, denke man sich die Schräglinien des Potentialdiagramms als schiefe Ebenen, deren Reibung so groſs gemacht wird, daſs ein herabgleitender Körper auf jeder mit einer konstanten Geschwindigkeit herabgleiten kann, deren Projektion auf die Horizontale der Geschwindigkeit in der Mittellinie jedes Teils der oberen Figur entspricht. Der Körper wird z. B. von *A* nach *B* gehoben, gleitet abwärts nach *C*, wird gehoben von *C* nach *D*, gleitet von *D* nach *E* und von dem sich anschlieſsenden *F* nach *G*, sodann von *G* nach *H* und trotz des Potentialsturzes von *H* nach *J* gleitet er nach *A* zurück, um dann die Wanderung zu wiederholen. Betrachtet man die Figur von oben her, so kann man ebenso die Wanderung der positiven Elektrizität veranschaulichen. Der unterste Teil der Figur veranschaulicht durch die Rechtecke die geleisteten Arbeiten, die im Überwinden der Widerstände beruhen, die in den verschiedenen Teilen die durch die Rechteckshöhen veranschaulichte Gröſse haben.

226) Verallgemeinertes Ohmsches Gesetz. Durch Rechnung ergiebt sich, wenn V_d und V'_d die Potentialwerte an den Enden des Kupferdrahtes, V_ζ und V'_ζ die an den Enden des Zinks, V_φ und V'_φ

die an den Enden der Flüssigkeit, $V_\varkappa$ und $V'_\varkappa$ die an den Enden der Kupferplatte geltenden Potentialwerte bedeuten, von links nach rechts hin eine Reihe von Gleichungen, wie z. B. $G_d = \frac{V'_d - V_d}{l}$, d. h. Potentialgefälle im Zink gleich Potentialdifferenz durch Plattenlänge. Da ferner die Strommenge in allen Querschnitten F dieselbe ist, so folgt, wenn die $\varkappa$ die Leitungsfähigkeiten bezeichnen

$$\varkappa_d F_d G_d = \varkappa_\zeta F_\zeta G_\zeta = \varkappa_\varphi F_\varphi G_\varphi = \varkappa_\varkappa F_\varkappa G_\varkappa.$$

Endlich sind noch Gleichungen wie $V'_d - V_\zeta = K \mid Z$ vorhanden. Die Gleichungen sind:

1) $V_d + l_d G_d = V'_d$

2) $V'_d - V_\zeta = K \mid Z$

3) $V_\zeta + l_\zeta \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\zeta F_\zeta} G_d = V'_\zeta$. Hier ist der zweite Posten aus $l_\zeta G_\zeta$ entstanden, und zwar mit Hilfe der Gleichung $\varkappa_d F_d G_d = \varkappa_\zeta F_\zeta G_\zeta$.

4) $V'_\zeta - V_\varphi = Z \mid F$

5) $V_\varphi + l_\varphi \cdot \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\varphi F_\varphi} = V'_\varphi$. Hier ist der zweite Posten ebenso, wie in 3) entstanden.

6) $V'_\varphi - V_\varkappa = F \mid K$

7) $V_\varkappa + l_\varkappa \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\varkappa F_\varkappa} G_d = V'_\varkappa$. Vgl. Nr. 3.

8) $V'_\varkappa - V_\varkappa = 0$. Zwischen Kupfer und Kupfer ist die Potentialdifferenz gleich Null.

Durch Addition, bei der sich vieles weghebt, erhält man daraus die Gleichung

$$l_d G_d + l_\zeta \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\zeta F_\zeta} + l_\varphi \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\varphi F_\varphi} + l_\varkappa \frac{\varkappa_d F_d}{\varkappa_\varkappa F_\varkappa} = K \mid Z + Z \mid F + F \mid K,$$

oder

$$\varkappa_d F_d G_d \left[\frac{l_d}{\varkappa_d F_d} + \frac{l_\zeta}{\varkappa_\zeta F_\zeta} + \frac{l_\varphi}{\varkappa_\varphi F_\varphi} + \frac{l_\varkappa}{\varkappa_\varkappa F_\varkappa}\right] = K \mid Z + Z \mid F + F \mid K.$$

Hier ist $\varkappa_d F_d G_d$ die Stromstärke im Kupferdraht oder die Stromstärke J der Kette überhaupt. Nach dem Ohmschen Gesetze ist ferner der Widerstand im Kupferdraht proportional der Länge l_d, umgekehrt proportional dem Querschnitte F_d und umgekehrt proportional dem Faktor $\varkappa_d$ der Leitungsfähigkeit, d. h. es ist der Widerstand $W_d = \frac{l_d}{\varkappa_d F_d}$, ebenso $W_\zeta = \frac{l_\varphi}{\varkappa_\zeta F_\zeta}$ u. s. w. Also hat man

$$J[W_d + W_\zeta + W_\varphi + W_\varkappa] = K|Z + Z|F + F|K,$$

folglich ist

$$9)\quad J = \frac{K|Z + Z|F + F|K}{W_d + W_\zeta + W_\varphi + W_\varkappa} = \frac{\text{Summe der elektromotorischen Kräfte}}{\text{Summe der Widerstände}},$$

oder

$$\text{Stromstärke} = \frac{\text{Summe der Potentialunterschiede an den Berührungsstellen}}{\text{Summe der Widerstände}}.$$

Die Gleichung 9) ist weiter nichts, als das auf die gesamte Kette ausgedehnte Ohmsche Gesetz.

Eine der Potentialgröſsen in den addierten Gleichungen, z. B. V_d oder V_d', kann man beliebig annehmen, da es gleichgültig ist, von wo aus man das Potential zählen will (die Gleichgültigkeit des Nullpunktes bei Thermometern, z. B. bei Celsius und Fahrenheit, ist etwas Entsprechendes). Mit Hilfe der Gleichungen 1) bis 8) ergeben sich dann die Potentialwerte für die Grenzstellen, ebenso sind sie für die zwischenliegenden Stellen mittels Gleichungen ersten Grades leicht zu berechnen.

Die Potentialdifferenz zwischen zwei beliebigen Stellen der Kette ist gleich der Differenz der zwischen beiden Punkten geleisteten Arbeiten und der etwa zwischen beiden liegenden „Potentialstürze" an den Berührungsstellen.

In Fig. 158 hat man von C_1 bis G_1 die Arbeit zur Überwindung des wesentlichen oder inneren Widerstandes, auſserhalb dieser Strecke die Arbeit zur Überwindung des äuſseren Widerstandes.

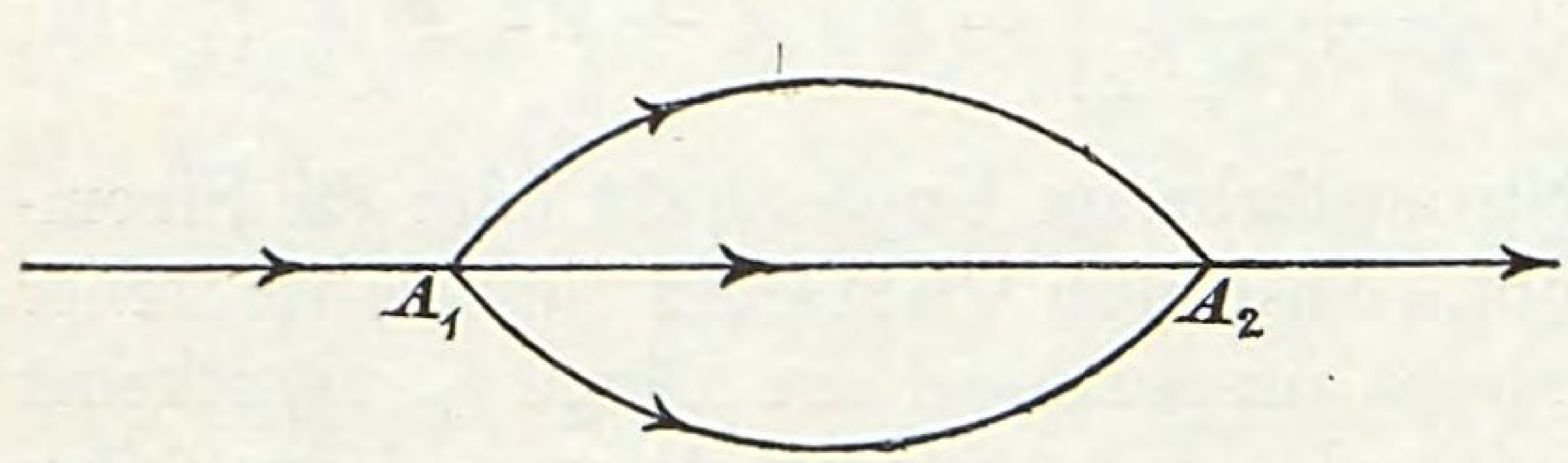
Im Beispiele ist der Wert des Zählers in Gleichung 9)

$$K|Z + Z|F + F|K = -100 - 115 + 36 = -179,$$

wenn $Z|K = 100$ Potentialeinheiten gesetzt wird.

227) Stromverzweigung. Der Schlieſsungsbogen einer galvanischen Kette spalte sich bei A_1 in mehrere Teile, die sich bei A_2 wieder vereinigen. Es fragt sich, welche Stromstärke in den einzelnen Drähten herrscht. Ist die Potentialdifferenz zwischen den Stellen A_1 und A_2 gleich $V_2 - V_1$, so herrscht in den einzelnen Drähten das Potentialgefälle $\frac{V_2 - V_1}{l_1}$, $\frac{V_2 - V_1}{l_2}$, $\frac{V_2 - V_1}{l_3}$, also sind die Strommengen

Fig. 159.



$$J_1 = \varkappa F_1 \frac{V_2 - V_1}{l_1}, \quad J_2 = \varkappa F_2 \frac{V_2 - V_1}{l_2}, \quad J_3 = \varkappa F_3 \frac{V_3 - V_1}{l_3}.$$

Nach vorigem Abschnitt sind aber die Widerstände in den Drähten

$$W_1 = \frac{l_1}{\varkappa F_1}, \quad W_2 = \frac{l_2}{\varkappa F_2}, \quad W_3 = \frac{l_3}{\varkappa F_3},$$

also ist auch

$$J_1 = \frac{V_2 - V_1}{W_1}, \quad J_2 = \frac{V_2 - V_1}{W_2}, \quad J_3 = \frac{V_2 - V_1}{W_3}.$$

Demnach ist

$$J_1 : J_2 : J_3 = \frac{1}{W_1} : \frac{1}{W_2} : \frac{1}{W_3}.$$

Folglich gilt der Satz: *Bei jeder Stromverzweigung verhalten sich die Stromstärken wie die umgekehrten Werte der Widerstände in den Einzeldrähten.* Man kann auch schreiben:

$$\mathbf{J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = 0.}$$

Dabei ist die Gesamtstärke wieder

$$J = J_1 + J_2 + J_3.$$

Soll man die drei Drähte durch einen einzigen so ersetzen, daſs auſserhalb $A_1 A_2$ sich nichts ändert, so ist sein Widerstand W so zu wählen, daſs die Stromstärke

$$\frac{V_2 - V_1}{W} = \frac{V_2 - V_1}{W_1} + \frac{V_2 - V_1}{W_2} + \frac{V_2 - V_1}{W_3}$$

wird. Es muſs also sein.

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{1}{W_3},$$

der Ersatzdraht muſs demnach einen Widerstand haben, dessen umgekehrter Wert gleich der Summe der umgekehrten Werte der Einzelwiderstände ist.

Aus $J = \frac{V_2 - V_1}{W}$, $J_1 = \frac{V_2 - V_1}{W_1}$ folgt zugleich $\frac{J}{J_1} = \frac{W_1}{W}$. Für die Strömungen und Widerstände im Ersatzdraht und in den Einzeldrähten gelten also die Gleichungen

$$\frac{J}{J_1} = \frac{W_1}{W}, \quad \frac{J}{J_2} = \frac{W_2}{W}, \quad \frac{J}{J_3} = \frac{W_3}{W},$$

d. h. *die betreffenden Stromstärken verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände.*

228) *Die Kirchhoffschen Sätze über Stromverzweigung.* a) *Treffen bei stationärer Strömung mehrere Drähte in einem*

Punkte A zusammen, so mufs die Summe der Stromstärken gleich Null sein. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde sich in dem Punkte positive oder negative Elektrizität anhäufen, so dafs von stationärem Zustande keine Rede sein könnte. (Fig. 160.)

Fig. 161.

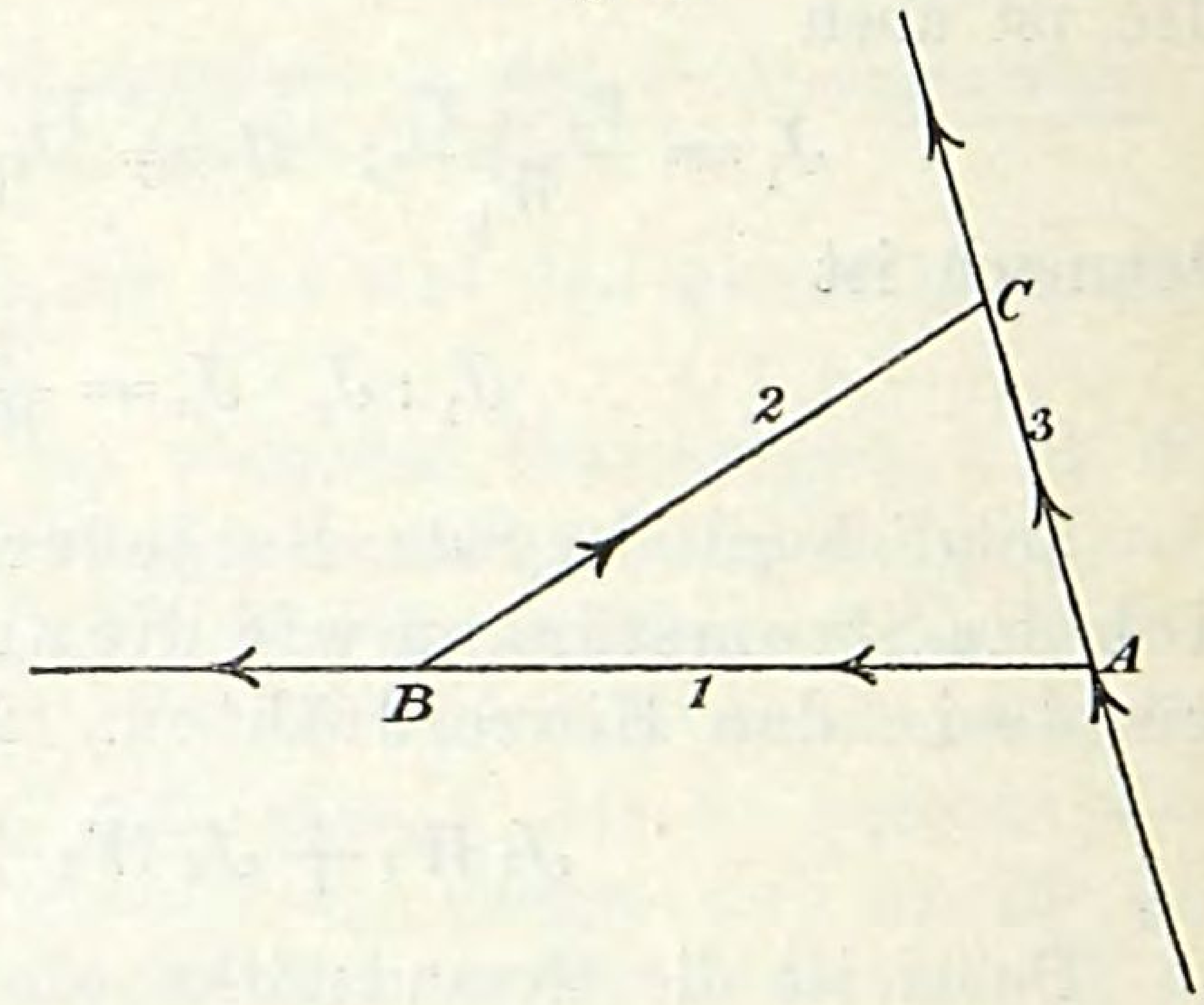
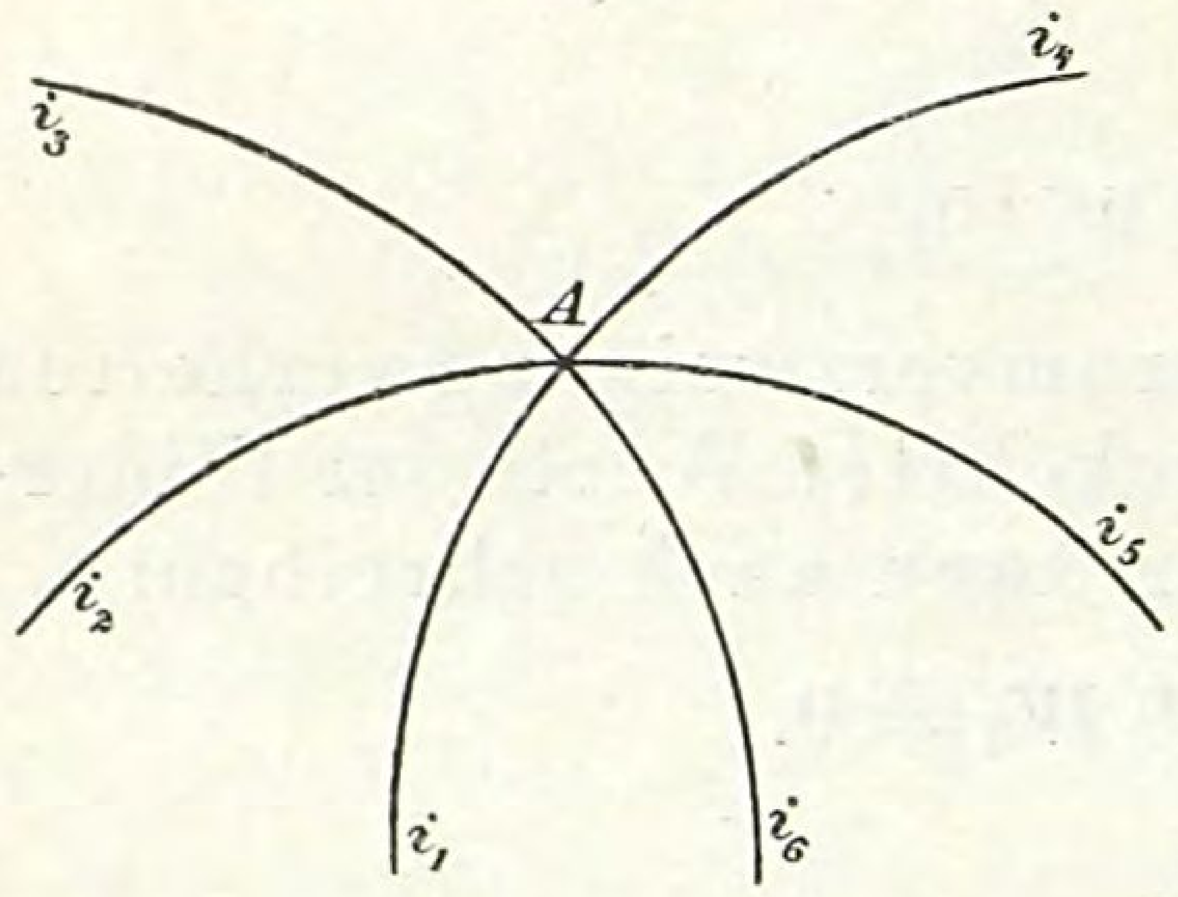


Fig. 160.



b) Durch drei Punkte A, B und C (Fig. 161) mögen Drähte gehen und so ein geschlossenes Dreieck bilden, in dessen Ecken Elektrizität zu- bezw. abströmt. Die Strömung sei eine stationäre, so dafs das Potential an jeder Stelle konstant bleibt. Scheidungskräfte, welche Potentialstürze U_a, U_b, U_c geben, mögen in A, B und C wirken. Auf dem ersten Draht sei in A der Potentialwert V_1, er verwandelt sich bei B in $V_1 + G_1 l_1$, wenn G_1 das Gefälle, l_1 die Länge ist, beim Übergange auf den zweiten Draht entsteht aber das Potential

1) $$V_1 + G_1 l_1 - U_b = V_2,$$

welches bis C hin sich in $V_2 + G_2 l_2$ verwandelt. Der Übergang auf den dritten Draht giebt

2) $$V_2 + G_2 l_2 - U_c = V_3.$$

Dies verwandelt sich bis A hin in $V_3 + G_3 l_3$. Der Übergang nach A mufs aber das alte Potential V_1 wiedergeben, wie es der stationäre Charakter verlangt, d. h. es ist

3) $$V_3 + G_3 l_3 - U_a = V_1.$$

Durch Addition bilde man aus den drei Gleichungen eine neue. Diese wird

4) $$G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3 = U_a + U_b + U_c.$$

Nun ist im ersten Drahte die Stromstärke $J_1 = \varkappa_1 F_1 G_1$, wenn F_1 sein Querschnitt ist. Zugleich ist nach Ohm der Widerstand in ihm

$W_1 = \frac{l_1}{\varkappa_1 F_1}$. Bildet man das Produkt, so folgt $J_1 W_1 = l_1 G_1$. Entsprechendes gilt für die anderen Drähte. Einsetzung des Wertes von $l_1 G_1$ in die Gleichung 4) giebt schliefslich

$$J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = U_a + U_b + U_c.$$

Man übersieht leicht, dafs diese Gleichung ganz allgemein gilt, wenn Drähte ein geschlossenes Polygon bilden, auch wenn beliebige andersliegende Stellen mit Scheidungskräften und Potentialstürzen angebracht werden. Demnach lautet der zweite Kirchhoffsche Satz folgendermafsen:

Bilden Drähte eine geschlossene Figur und findet in ihnen eine stationäre Strömung statt, so ist die Summe der elektromotorischen Kräfte (d. h. der Potentialdifferenzen an den Scheidungsstellen) gleich der Summe der Produkte aus den Stromstärken und Widerständen in den einzelnen Drähten.

Sind keine Scheidungskräfte vorhanden, so ist

$$J_1 W_1 + J_2 W_2 + J_3 W_3 = 0.$$

In dieser Form enthält der Satz den vorigen als besonderen Fall in sich. Man hat nur nötig, das Vieleck auf einen Punkt zurückzuführen.

Durch die von Ohm und Kirchhoff aufgestellten Gesetze ist die rechnende Theorie der Ströme zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Bei Kirchhoff handelt es sich besonders um die Theorie der Nebenschlüsse. Nach seinem ersten Gesetze ist klar, dafs, wenn ein Draht sich in zwei Teile spaltet und in dem einen Teile sich ein grofser Widerstand befindet, der Hauptteil des Stromes durch den andern Draht geht, denn die Stromstärken sind umgekehrt proportional den Widerständen. Wie dies bei der Differentiallampe und anderen Vorrichtungen Anwendung findet, darüber vergleiche man die Lehrbücher, ebenso über die höchst wichtigen Widerstandsvergleichungen. Auch erkennt man, dafs es möglich ist, starke Ströme dadurch zu messen, dafs man nur $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ davon durch Nebenschlüsse in einen Draht leitet und den schwächeren Strom am Galvanometer mifst. Nur um einige Beispiele anzudeuten, geben wir hier einen Einblick in die Lehre von den Strombrücken.

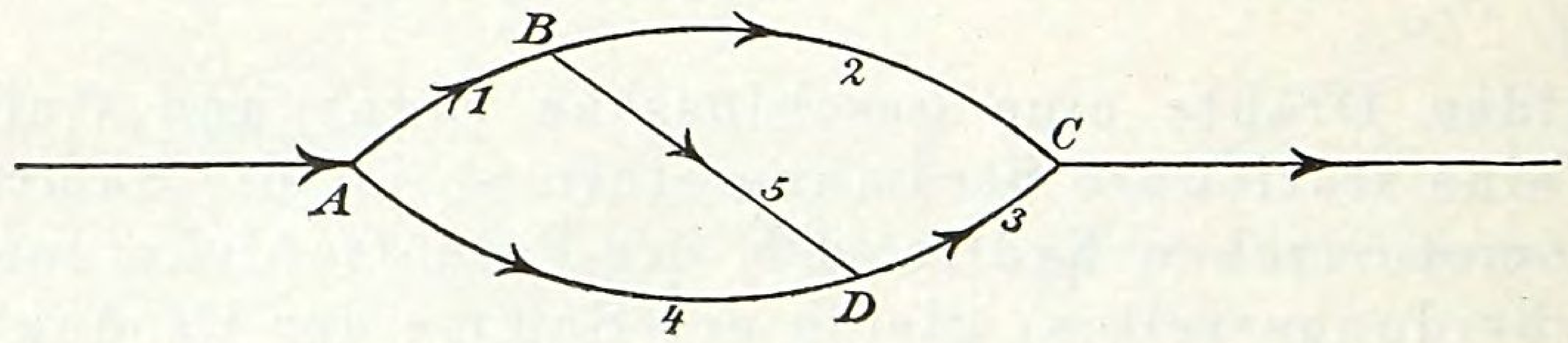
229) Brücke von Wheatstone. Ein Strom von der Intensität J verzweige sich so, wie es Fig. 162 darstellt. Nach dem ersten Kirchhoffschen Satze gelten für die Punkte A, B, C, D, wenn man die ankommenden Ströme positiv, die abgehenden negativ einsetzt, die Gleichungen

1) $J - J_1 - J_4 = 0$. 2) $J_1 - J_2 - J_5 = 0$. 3) $J_2 + J_3 - J = 0$.
4) $J_4 + J_5 - J_3 = 0$.

Für die Stromkreise ABD und BCD gelten unter Berücksichtigung der Richtungen nach dem zweiten Kirchhoffschen Satze die Gleichungen

5) $J_1 W_1 + J_5 W_5 - J_4 W_4 = 0$. 6) $J_2 W_2 - J_3 W_3 - J_5 W_5 = 0$.

Fig. 162.



Man berechne J_4 aus 1) und setze den Wert in 5) ein. Ebenso berechne man J_3 aus 3) und setze den Wert in 6) ein. Aus der ersten neuen Gleichung berechne man J_1, aus der zweiten neuen J_2 und setze beide Werthe in 2) ein. Dann kann man J_5 berechnen. Das Resultat ist

$$J_5 = J \frac{W_2 W_4 - W_1 W_3}{(W_1 + W_4)(W_2 + W_3) + W_5 (W_1 + W_2 + W_3 + W_4)}.$$

Soll nun durch die Brücke 5 kein Strom gehen, so mufs der Zähler des Bruches gleich Null sein, d. h. es mufs sein

$$W_2 W_4 - W_1 W_3 = 0 \quad \text{oder} \quad W_1 : W_2 = W_4 : W_3.$$

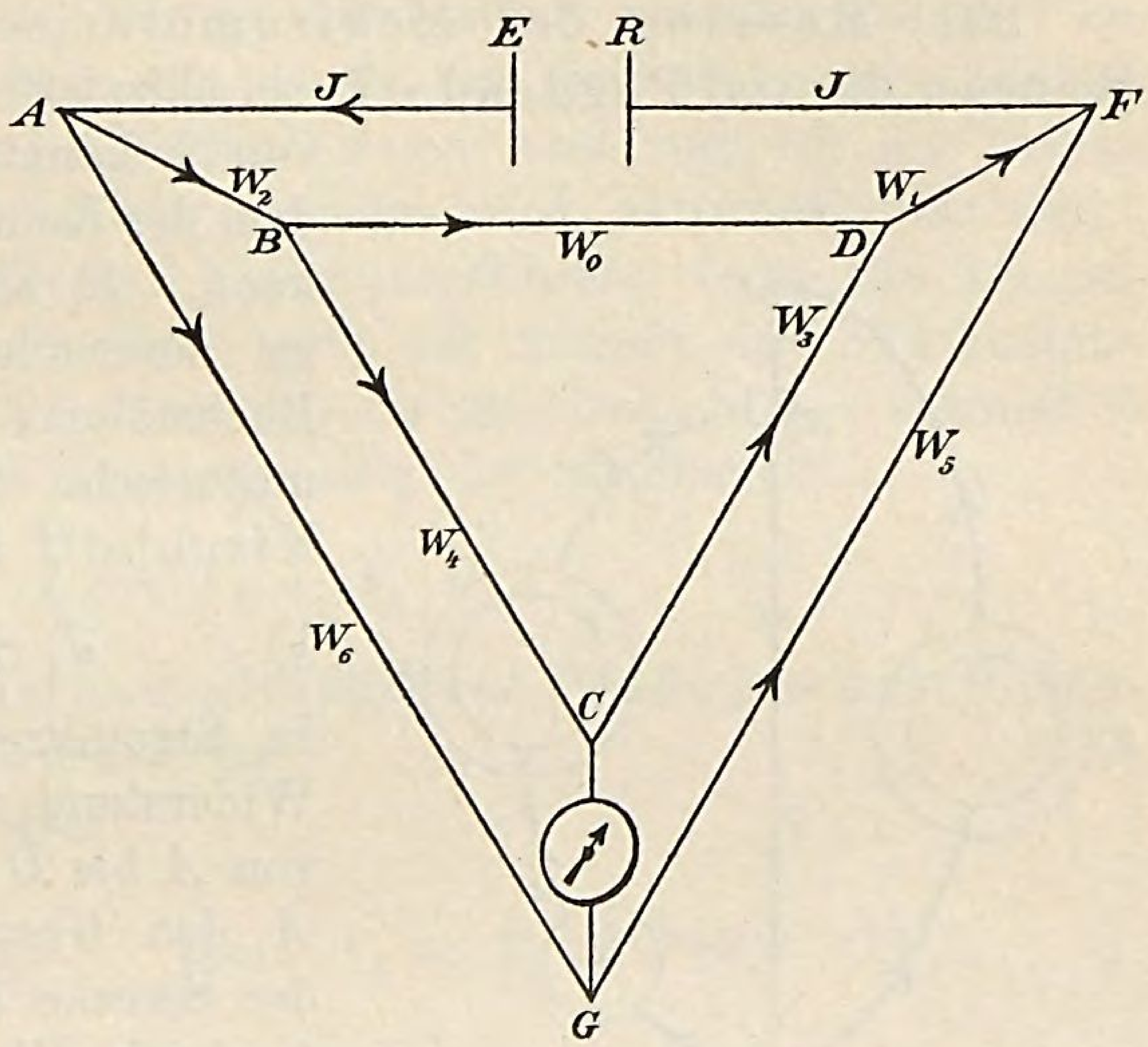
Macht man endlich noch die Widerstände W_1 und W_2 gleich, dann mufs, wenn die Brücke keinen Strom giebt, auch $W_3 = W_4$ sein.

Geht man von $W_1 = W_2$ aus, so erleichtert sich natürlich die obige Rechnung. Um festzustellen, ob durch 5 ein Strom geht, bringe man etwa in der Mitte von 5 ein Galvanometer an, dessen Ausschläge den Strom anzeigen. Will man nun den Widerstand in irgend einer Art von Metalldraht messen, so setzt man ihn als Draht 4 in den aus bereits gemessenem Drahte bestehenden Apparat ein und ändert die Länge l_4 so lange, bis das Galvanometer keinen Ausschlag mehr zeigt. Ist dies der Fall, so ist $W_4 = W_3$ und damit gezeigt, wie die beiden Arten von Drähten sich bezüglich der Widerstände verhalten. Über die Verfeinerungen des Apparates und seinen Schutz gegen störende Induktionsströme vergleiche man die Lehrbücher der Physik.

230) Thomsonsche Doppelbrücke. In Fig. 163 bedeutet E das Element, R den Rheostat. Der Strom geht von E aus nach

A und spaltet sich dann in AB und AG. Das erstere spaltet sich in BC und BD, das letztere in GC und GF. Von C gehen BC und GC vereinigt weiter nach D, wo sie mit BD zusammentreffen und mit ihm nach F gehen. Dort mit GF zusammentreffend gehen sie nach R und zum Elemente zurück. AB sei der zu untersuchende Draht, DF der bekannte Normaldraht. Man sorgt wieder dafür, daſs durch GC der Strom Null geht, so daſs die Kenntnis von W_7 überflüssig ist.

Fig. 163.



Nach dem ersten Satze von Kirchhoff ist bei A, B, C u. s. w.

$$J - J_2 - J_6 = 0, \quad J_2 - J_0 - J_4 = 0, \quad J_4 + 0 - J_3 = 0,$$
$$J_0 + J_3 - J_1 = 0, \quad J_6 - 0 - J_5 = 0, \quad J_1 + J_5 - J = 0.$$

Nach dem zweiten Satze von Kirchhoff geben die Stromkreise folgende Gleichungen:

$$J_0 W_0 - J_3 W_3 - J_4 W_4 = 0, \quad J_2 W_2 + J_4 W_4 - 0 \cdot W_7 - J_6 W_6 = 0,$$
$$J_1 W_1 - J_5 W_5 + 0 \cdot W_7 + J_3 W_3 = 0.$$

Durch Elimination der J findet man, daſs, wenn die Brücke GC keinen Strom erhält, die Proportion

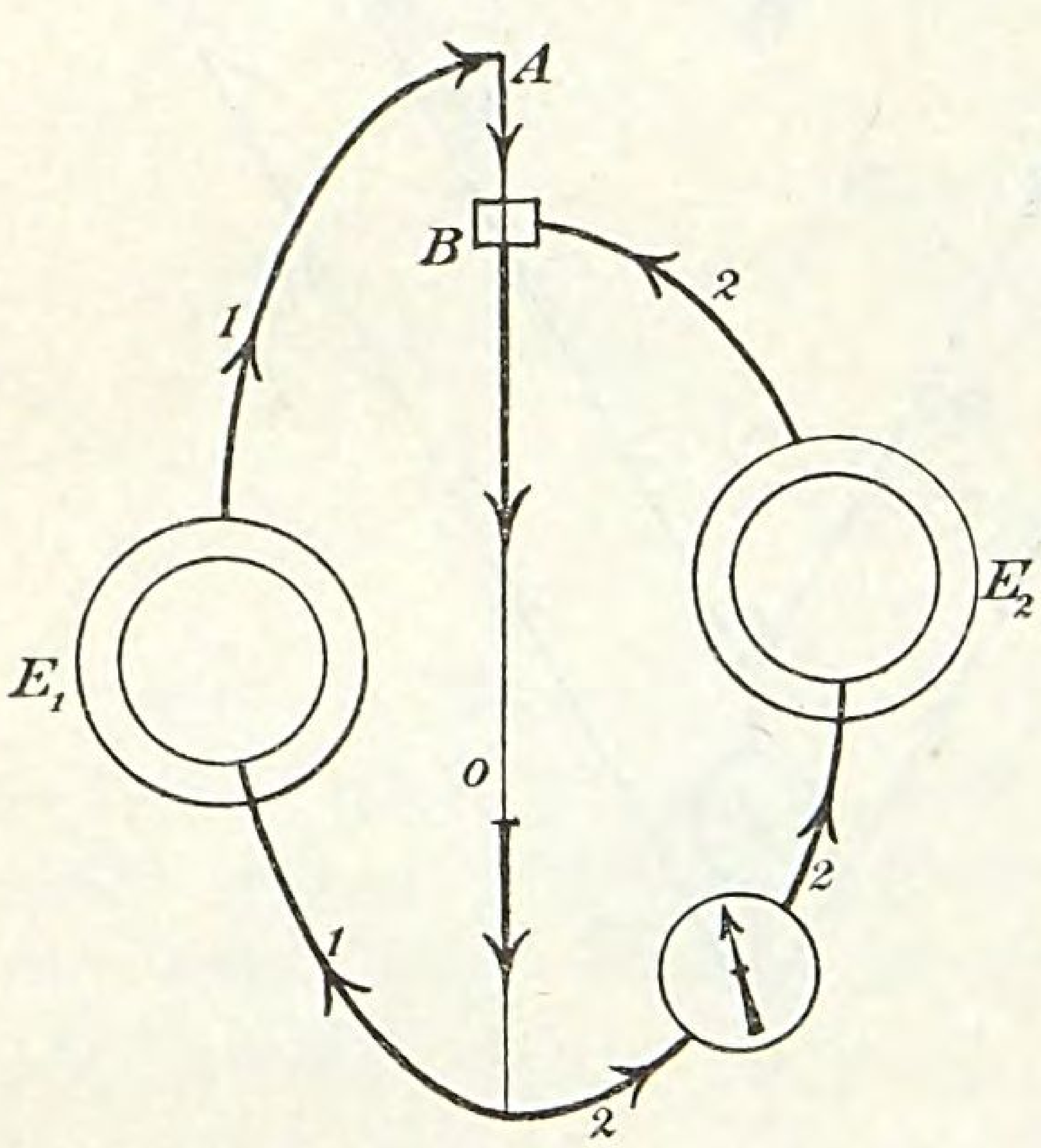
$$W_5 : W_6 = [W_1 (W_0 + W_3 + W_4) + W_0 W_3]$$
$$: [W_2 (W_0 + W_3 + W_4) + W_0 W_4]$$

erfüllt ist. Ist nun $W_5 = W_6$ gemacht, so wird das dritte Glied gleich dem vierten. Ist ferner $W_3 = W_4$ gemacht, so folgt aus dieser Gleichheit $W_1 - W_2$. Das Instrument hat den Vorteil, daſs man die Widerstände W_3, W_4, W_5, W_6 so groſs wählen kann, daſs die Übergangswiderstände, die bei unvollkommenem Kontakt an den Stellen A, B, D und F auftreten, dagegen verschwinden. Dies war bei der Wheatstonschen Brücke nicht möglich. Übrigens hat man die Doppelbrücke dahin verfeinert, daſs die Kontaktstörungen sich gegenseitig ganz aufheben.

Über die Einrichtung der eigentlichen Apparate und über die Methode der Widerstandsbestimmungen vergleiche man besonders das Handbuch von Kittler.

231) Messung der elektromotorischen Kraft. Nur eine Methode, die von Poggendorf, sei skizziert. AC ist ein Platindraht von bekanntem Widerstande a, auf dem der Kontakt B verschoben werden kann. E_1 sei ein bekanntes, E_2 ein zu messendes Element, wobei die Buchstaben zugleich die elektromotorische Kraft bedeuten. Nach Kirchhoff ist für den Punkt B

Fig. 164.



$$1) \qquad J_1 + J_2 - J_0 = 0.$$

Im Stromkreise $E_1 A, B, C, E_1$ ist der Widerstand von C bis A gleich W_1, von A bis B gleich $(A - W_0)$, wenn A den Gesamtwiderstand, W_0 den der Strecke BC bedeutet, von B bis C gleich W_0, die Intensität ist aber von E_1 über A bis B gleich J_1, von B bis C gleich J_0, von C bis E_1 gleich J_1, da ebenso viel aus E_1 zurückgehen mufs, wie aus E_1 hervorging. Für diesen Kreis also ist nach Kirchhoff

$$2) \qquad J_1 W_1 + J_1 (A - W_0) + J_0 W_0 = E_1,$$

für den andern Stromkreis ist einfacher

$$3) \qquad J_2 W_2 + J_0 W_0 = E_2.$$

Der Kontakt B werde nun so lange verschoben, bis die Nadel auf Null zeigt, so dafs das Element E_2 die Strömung $J_2 = 0$ giebt. Die Gleichungen gehen dann in einfachere über. Aus 1) folgt $J_0 = J_1$, aus 2) folgt durch Einsetzung dieses Wertes $J_1 = \frac{E_1}{A W_1}$, aus 3) folgt durch Einsetzung beider Werte

$$E_2 = J_0 W_0 = J_1 W_0 = \frac{W_0}{A + W_1} E.$$

Da A, W_1, W_0 und E_1 bekannte Gröfsen sind, so ist die unbekannte elektromotorische Kraft E_2 als $\frac{W_0}{A + W_1} E_1$ bestimmt worden.

Ist z. B. E_1 ein Daniellsches Element und setzt man dessen elektromotorische Kraft gleich 1, so kann man daraus die des Bunsen-

Elements = 1,7, des Groveschen = 1,7, des Chromsäure-Elements = 1,8 bestimmen.

232) Das Joulesche Gesetz und der Stromeffekt. Die Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ für ein Drahtstück von der Länge l bedeutet die Arbeit, die nötig sein würde, die freie elektrische Einheit der Stromrichtung entgegen fortzubewegen und zugleich die Arbeit, die von den elektrischen Kräften ausgeübt wird, um die Einheit durch die Widerstände dieser Strecke hindurchzuführen. Geht also sekundlich durch den Drahtquerschnitt nicht die Einheit der Elektrizitätsmenge, sondern die Menge J, so ist die im Drahtstück l sekundlich geleistete Arbeit oder die Leistung, oder der Stromeffekt

1) $$L = (V_2 - V_1) J.$$

Also: Sekundenleistung gleich dem Produkte aus Potentialdifferenz und Stromstärke.

Im Drahtstück ist aber

$$J = \frac{V_2 - V_1}{W}, \quad \text{also} \quad V_2 - V_1 = JW.$$

Einsetzung in 1) giebt

2) $$L = J^2 W,$$

d. h. Sekundenleistung gleich dem Produkte aus dem Widerstande und dem Quadrate der Stromstärke.

Besteht nun die Kette aus verschiedenen Teilen gleichen Querschnitts, wie z. B. in Fig. 158 aus Z, F, K und K_1, d. h. aus Zink, verdünnter Schwefelsäure, Kupferplatte und Kupferdraht (d), so ist die Sekundenleistung in den einzelnen Teilen bei den dortigen Bezeichnungen

$$(V'_\zeta - V_\zeta) J = W_\zeta J^2$$
$$(V'_\varphi - V_\varphi) J = W_\varphi J^2$$
$$(V'_\varkappa - V_\varkappa) J = W_\varkappa J^2$$
$$(V'_d - V_d) J = W_d J^2$$

Die gesamte Sekundenleistung also ist

3) $$L = (W_\zeta + W_\varphi + W_\varkappa + W_d) J^2 = WJ^2,$$

wo W den gesamten Widerstand der Kette bezeichnet.

Nun ist aber

$$J = \frac{K \mid Z + Z \mid F + F \mid K}{W_\zeta + W_\varphi + W_\varkappa + W_d} = \frac{E}{W},$$

wo E die gesamte elektromotorische Kraft bedeutet, also kann man in Gleichung 3) $JW = E$ setzen. So wird

4) $$L = J \cdot E.$$

Daher lautet das von Joule aufgestellte Gesetz:

Der Stromeffekt oder die sekundliche Leistung des Stromes ist gleich dem Produkte aus der Stromstärke und der gesamten elektromotorischen Kraft.

Beispiel. Ist $J = 30$ Ampère, $E = 20$ Volt, so ist die Sekundenleistung gleich $30 \cdot 20 = 600$ Volt-Ampère $= 600$ Watt, also der Stromeffekt gleich 600 Joule $= \frac{600}{736}$ Pferdestärken $= 61{,}1$ mkg pro Sekunde. Setzt man 425 mkg $= 1$ Kalorie, so ist der Stromeffekt, in Kalorien ausgedrückt, gleich 0,14 Kalorien in der Sekunde.

In den Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekundensystems würde man das dortige mechanische Äquivalent der Grammkalorie z. B. gleich A (Arbeit) setzen, und so als Wärmemenge für die Sekunde erhalten

5) $$Q = \frac{JE}{A} = \frac{WJ^2}{A},$$

oder wenn man $\frac{1}{A} = C$ setzt

6) $$Q = CJE = CWJ^2.$$

233) Der nutzbare Teil des Stromeffektes. Die Arbeit zur Überwindung des zwischen den Klemmschrauben des Schliefsungsbogens befindlichen Widerstandes kann man durch irgend eine Nutzarbeit von entsprechender Gröfse ersetzen, ohne dafs im Innern der Kette sich etwas ändert, d. h. der äufsere Stromeffekt, d. h. die Sekundenleistung im Schliefsungsbogen, kann als Nutzeffekt bezeichnet werden.

Ist E die gesamte elektromotorische Kraft der Kette, E_b die Potentialdifferenz des Schliefsungsbogens zwischen den Klemmschrauben, so ist naturgemäfs

$$E_b : E - E_b = W_b : W_i,$$

denn E_b wird aufgebraucht durch Überwindung des Bogenwiderstandes W_b. Daraus folgt als Bogenwiderstand

$$W_b = \frac{E_b W_i}{E - E_b}.$$

Die sekundliche Arbeit im Schliefsungsbogen ist gleich Potentialdifferenz mal Stromstärke, also ist der Nutzeffekt gleich

$$L_b = E_b \cdot J = E_b \frac{E}{W_i + W_b} = \frac{E_b E}{W_i + \frac{E_b W_i}{E - E_b}} = \frac{E_b (E - E_b)}{W_i}.$$

Hier sind W_i und E gegebene Gröfsen. Es fragt sich, wann (theoretisch genommen) der Nutzeffekt seinen Höchstwert erhält. Man setze das veränderliche $E_b = x$, so dafs es sich im Zähler um $x(E - x)$ handelt. Setzt man dies gleich irgend einer Gröfse a, so hat man in $x(E - x) = a$ die Gleichung, durch deren Lösung man erfährt, welches x auf diesen Wert a führt. Aus $x^2 - Ex = -a$ folgt aber $x = \frac{E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - a}$. Die Lösung wird imaginär, wenn $a > \left(\frac{E}{2}\right)^2$ ist. Der höchste mögliche Wert von a ist also $a = \left(\frac{E}{2}\right)^2$, und dieser wird erreicht bei $x = \frac{E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2}\right)^2 - \left(\frac{E}{2}\right)^2} = \frac{E}{2}$.

Man erhält demnach den theoretischen Maximaleffekt, wenn $E_b = \frac{1}{2}E$ ist, d. h. wenn der äufsere Widerstand der Kette gleich dem inneren Widerstande ist, oder wenn die Klemmspannung gleich der Hälfte der gesamten elektromotorischen Kraft ist.

Ob freilich mit diesem theoretischen Maximaleffekte auch ökonomisch der höchste Nutzeffekt erzielt wird, das ist eine andere Frage. Man vergleiche dazu das über die Becherkombination in Nr. 223 Gesagte, wo derselbe Satz auftrat.

234) Temperatur des Schliefsungsbogens. In jedem Teile des Schliefsungsbogens wird eine Sekundenleistung $L = J \cdot E_1 = J^2 \cdot W_1$ geliefert, wobei J die Intensität, E_1 die Potentialdifferenz des Stückes, W_1 sein Widerstand ist. Bei Drähten von gleicher Länge ist der Widerstand umgekehrt proportional den Querschnitten oder den Quadraten der Durchmesser. Dasselbe gilt also auch von der Leistung und der gelieferten Wärmemenge in ihnen, d. h.

$$Q_1 : Q_2 = d_2^2 : d_1^2.$$

Ihre Massen aber verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, gleiche Wärmemengen geben also Temperaturerhöhungen, die sich wiederum umgekehrt wie die Quadrate der Durchmesser verhalten. Wärmemengen also, die sich umgekehrt wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, geben Temperaturerhöhungen, die sich umgekehrt wie die vierten Potenzen der Durchmesser verhalten. Demnach ist

$$t_1 : t_2 = d_2^4 : d_1^4.$$

Die Erwärmung dauert so lange fort, bis die Ausstrahlung im stande ist, die weitere Temperaturerhöhung zu verhindern. Die Aus-

strahlung ist proportional der Oberfläche, also proportional dem Durchmesser. Daher gilt für die Schlufstemperatur der Satz:

$$t_1 : t_2 = d_2^3 : d_1^3.$$

Man könnte also, wenn man von der Ausstrahlung absieht, sich dahin ausdrücken, die Erwärmung sei umgekehrt proportional dem ganzen Trägheitsmomente $\left(\frac{\pi d^4}{32}\right)$ des Drahtquerschnitts, unter Einrechnung der Ausstrahlung dagegen, sie sei umgekehrt proportional dem polaren Querschnittsmodul oder Widerstandsmomente $\left(\frac{\pi d^3}{16}\right)$ des Drahtquerschnitts bezüglich der Festigkeit. Vgl. Ingen.-Math. I.

Wo Erwärmung des Drahtes nicht erwünscht ist, bedeutet sie einen Effektverlust, der ebenfalls vom Querschnitte des Drahtes abhängig ist, und zwar umgekehrt proportional dem Quadrate des Durchmessers. Dabei ist allerdings angenommen, dafs die Ausstrahlung proportional dem Temperaturüberschufs sei, eine Annahme, die höchstens annäherungsweise auf Gültigkeit Anspruch erheben kann.

Jedenfalls aber erkennt man, dafs dünne Drähte leicht zum Glühen, sogar zum Schmelzen gebracht werden können, während solche gröfseren Durchmessers bei demselben Strome verhältnismäfsig kalt bleiben.

Dasselbe Resultat ergiebt sich folgendermafsen. Die im Schliefsungsbogen sekundlich gelieferte Wärmemenge ist

$$Q = C W_1 J^2,$$

wo W_1 der Widerstand des Schliefsungsbogens, also z. B. $W_1 = \frac{l}{\frac{d^2}{4}\pi} c$ ist, wo l die Länge, d der Durchmesser, c eine Widerstands- oder Leitungskonstante ist. Die Gleichung geht also über in

$$Q = \frac{4 C J^2 l c}{d^2 \pi}.$$

Bei dem Temperaturüberschufs t über die Umgebung ist nach obiger Annahme für den stationären Zustand das Ausstrahlungs- oder Emissionsvermögen des Drahtes proportional der Gröfse t und der Oberfläche, also die ausgestrahlte Menge

$$Q_1 = d \pi l \varepsilon t,$$

wo ε eine vom Material des Drahtes und seiner Umgebung abhängige Konstante ist. Soll die Ausstrahlung Q_1 gleich der durch den Strom hervorgebrachten Wärme sein, so ist

$$d \pi l \varepsilon t = \frac{4 C J^2 l c}{d^2 \pi}$$

zu setzen. Daraus folgt aber als Temperaturüberschuſs

$$t = \frac{4\,CJ^2}{d^3\pi^2\varepsilon},$$

womit sich das obige Gesetz bestätigt. Der Temperaturüberschuſs ist proportional dem Quadrate der Stromstärke und umgekehrt proportional der dritten Potenz des Drahtdurchmessers.

235) Erhaltung der Energie der Kette. Helmholtz hat zuerst den Satz ausgesprochen, daſs die gesamte im Strome erzeugte Wärmemenge proportional der durch die chemischen Prozesse in der Kette frei werdenden Wärme sein müsse. Ist also J die Intensität, Q die von dem (der Stromeinheit entsprechenden) chemischen Prozesse entwickelte Wärmemenge, so ist JQ_1 die durch den vorliegenden chemischen Prozeſs entwickelte. Diese ist nach Helmholtz gleich der Jouleschen Menge CJE zu setzen, so daſs $CJE = JQ_1$ ist. Daraus folgt

$$CE = Q_1,$$

d. h. die elektromotorische Kraft ist proportional der durch die Stromeinheit chemisch entwickelten Wärmemenge.

Thomson spricht den Satz von der Erhaltung der Energie folgendermaſsen aus:

Die elektromotorische Kraft eines elektrochemischen Apparats ist (in absolutem Maſse) gleich dem mechanischen Äquivalent der chemischen Aktion, der ein elektrochemisches Äquivalent der in dem Apparat enthaltenen Substanz unterliegt.

Man kann also elektromotorische Kräfte oder Potentialdifferenzen durch rein kalorimetrische Methoden bestimmen. Man kann sogar chemische Affinitätskräfte in absolutem Maſse ausdrücken.

Über die experimentelle Prüfung des Gesetzes vergleiche man die Lehrbücher, ebenso über alles das, was von dem elektrischen Lichtbogen, seiner Temperatur und Leuchtkraft, vom Glühlicht, von der Anwendung auf Entzündung von Minen, über elektrisches Löten und Schweiſsen, über Galvanokaustik u. dgl. gesagt ist.

Kapitel XII.

Magnetismus.

236) Grundbegriffe. Unter Hinweis auf die gebräuchlichen Lehrbücher der Elementarphysik mögen zunächst die wesentlichen Grundanschauungen über den Magnetismus kurz zusammengestellt werden.

a) Jeder Magnetstab ist polarisiert. Die Stellen, von denen die magnetischen Kräfte hauptsächlich auszugehen scheinen, bezeichnet man als Nord- und Südpol. Um einfache Veranschaulichungen zu gewinnen, betrachtet man diese Stellen oft als Punkte, den Stab als eine gerade Linie. Gleichnamige Pole stofsen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an, Nord- und Südmagnetismus verhalten sich also wie entgegengesetzte elektrische Ladungen isolierter Konduktoren. Die Menge der hypothetischen magnetischen Materie, die als Ladung eines Poles ebenso wirken würde, wie der Pol eines wirklichen Magnets, nennt man die Polstärke. Die magnetischen Wirkungen nehmen mit wachsender Polstärke zu, mit zunehmender Entfernung ab.

b) Zerbricht man einen Magnetstab in der Mitte, so erhält man nicht zwei Stäbe mit alleinigem Nord- bezw. Südmagnetismus, sondern zwei polarisierte Magnetstäbe, jeden von etwa derselben Polarstärke wie vorher. Fortsetzung der Teilung führt auf die Annahme, jeder Magnetstab bestände aus einer Reihe polarisierter Molekularmagnete. Eine der in Fig. 75 oder 101 dargestellten Molekülreihen veranschaulicht dies in hinreichender Weise, nur hat man statt + und — die Zeichen N und S für Nord- und Südmagnetismus einzuschreiben.

c) Auch der Erdkörper verhält sich wie ein Magnet. Der Umdrehung entsprechend (die selbst eine Art von Polarisation bedeutet) hat man die Pole in der Nähe der geographischen Pole zu suchen, wenn die Polarisation als regelmäfsig angenommen wird. Kompafs, magnetische Meridiane und ihre Orthogonalkurven, magnetischer Nord- und Südpol sind in den Lehrbüchern besprochen. Der Erdmagnetismus veranlafst bei schwimmenden Magneten nicht eine fort-

schreitende Bewegung, sondern nur eine Drehungsbewegung und eine der Polarisation entsprechende Einstellung nach einer Reihe von Schwankungen. Demnach wirkt auf den Magnet ein bloſses Kräftepaar. Da die Summe der beiden Resultanten gleich Null ist, muſs man annehmen, beide Pole des Magnets seien von gleicher Polstärke.

d) Daſs die beiden Resultanten an den Polen anzugreifen scheinen, erklärt sich folgendermaſsen. Die entgegengesetzten Magnetismen benachbarter Moleküle heben einander auf. Nur die an den Stabenden liegenden Magnetismen werden nicht neutralisiert und geben die entgegengesetzten Kräfte des Kräftepaars für die erdmagnetische Einwirkung. Ist jede der beiden Kräfte absolut genommen gleich p, so ist pl das Moment in der Lage Ost-West. Ist allgemeiner α die Abweichung von der Normalstellung Nord-Süd, so ist das drehende Moment gleich $pl \sin \alpha$. Daraus folgt für $\alpha = 0$ bezw. $\alpha = 180^0$ die stabile und die labile Gleichgewichtslage.

Der schwimmende Magnet zeigt aber nur die Horizontalkomponente der Kräfte an. Magnetisiert man eine Stahlnadel, die ursprünglich bei horizontaler Achsenlagerung sich horizontal einstellte, so senkt sie sich mit der Nordspitze auf der nördlichen Halbkugel der Erde um einen Winkel β nach unten. Statt p ist daher $\frac{p}{\cos \beta}$ als der wahre Wert der erdmagnetischen Kraftwirkung anzunehmen. Die Inklination β ist dieselbe in allen Punkten der sogenannten Isoklinen, wozu man die Karten über den Erdmagnetismus vergleichen möge.

Ist m die Polstärke des Magnetstabes, l seine Länge, so bezeichnet man den Ausdruck $M = ml$ als sein magnetisches Moment. Aus diesem leitet sich z. B. das Maximum der erdmagnetischen Wirkung ab. Die Gröſse der letzteren läſst sich mit Hilfe der horizontalen Pendelbewegungen des Stabes (Kompaſs) nach später zu erörternder Methode bestimmen. Vorläufig sei nur gesagt, daſs, je stärker der Erdmagnetismus wirkt, um so schneller die Schwingungen sind. Die Linien auf der Erdoberfläche, die alle Punkte gleicher Intensität des Erdmagnetismus verbinden, heiſsen die Isodynamen.

An verschiedenen Stellen der Erdoberfläche weicht die Einstellung der Magnetnadel vom geographischen Meridian in verschiedenem Maſse ab. Die Linien, welche Orte gleicher Abweichung miteinander verbinden, heiſsen die Isogonen.

e) Weiches Eisen läſst sich leicht magnetisieren. Dies kann z. B. durch regelmäſsiges Streichen mit einem Stahlmagnet geschehen. Da dieser dabei von seiner Kraft nichts einbüſst, so ist anzunehmen, daſs die beiden Arten des Magnetismus im Eisen bereits vorhanden waren. Während aber die Elektrizität im Eisen wandern kann, ist der Magnetismus an die Moleküle des Eisens gebunden, ähnlich wie

die Elektrizitäten an die Moleküle des Dielektrikums. Entweder sind also bereits polarisierte Moleküle in die gesetzmäſsige Lage gedreht worden, oder es hat durch Verschiebung der magnetischen Massen in jedem Molekül eine Polarisierung stattgefunden. Das Magnetisieren kann auch durch Induktion oder Influenzwirkung eines Magnets auf weiches Eisen geschehen. Dabei ist die Stärke der Polarisierung proportional der Polstärke des wirkenden Magnetstabes, auſserdem nimmt sie mit zunehmender Entfernung beider Stäbe ab. Andere Magnetisierungsarten sind ebenfalls aus den Lehrbüchern bekannt.

Über die Abhängigkeit magnetischer Wirkungen von der gegenseitigen Entfernung zweier Pole muſs hier besonders gesprochen werden. Die nötigen Bemerkungen über Schwingungsbewegungen sind vorauszuschicken.

237) Schwingungszahl der Magnetnadel im homogenen Felde des Erdmagnetismus. Die Elementarmechanik zeigt, daſs das mathematische Pendel für die einfache Schwingung die Zeitdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{ml^2}{mlg}} = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}}$$

nötig hat, wo T das Trägheitsmoment, M das statische Moment des Massenpunktes in Bezug auf den Drehungspunkt bedeutet. Bei mehreren Massenpunkten in beliebiger Anordnung handelt es sich um

$$t = \pi \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n}{g(M_1 + M_2 + \ldots M_n)}} = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}},$$

wenn T die Summe der Trägheitsmomente, M die Summe der statischen Momente der Massen bedeutet. Versteht man jedoch unter M nicht das Moment der Masse, sondern das Maximalmoment der Schwerkraft, die an dieser wirkt, so handelt es sich um $t = \pi \sqrt{\frac{T}{M}}$. Dabei ist der Abstand der Drehungsachse vom Massenschwerpunkt als horizontal liegend angenommen.

Ganz ebenso ist die Schwingungsdauer einer Magnetnadel $t = \pi \sqrt{\frac{T}{M}}$, wenn T das Trägheitsmoment der Nadel in Bezug auf die senkrechte Drehungsachse, $M = pl$ das Maximum des Drehmomentes ist, welches der Erdmagnetismus auf die Nadel (in der Ost-Westlage) ausübt. Ist n die Anzahl der Schwingungen in der Sekunde, also $n = \frac{1}{t}$, so folgt $n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{pl}{T}}$, und hieraus ergiebt sich für die auf dem Nord- beziehungsweise Südpol wirkende Kraft des Erdmagnetismus als absoluter Wert der Horizontalkomponente

$$p = \frac{\pi^2 T}{l} n^2 = \varkappa \cdot n^2.$$

Die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus ist also proportional dem Quadrate der Anzahl der sekundlichen Schwingungen.

Das genannte Gesetz ermöglicht nicht nur die Bestimmung des Erdmagnetismus, sondern es führt auch auf das Newton-Coulombsche Gesetz. Nachdem dieses behandelt ist, soll noch einmal von diesen Pendelschwingungen gesprochen werden.

238) Das Newton-Coulombsche Gesetz. Will man mit Hilfe der Magnetnadel die Stärke eines Poles messen, so ist die Einwirkung des Erdmagnetismus zu berücksichtigen. Ist die Nadel in richtiger Lage zur Ruhe gekommen und nähert man ihrem Nordpol den Südpol eines im magnetischen Meridian gelagerten Magnetstabes von Norden her, so summieren sich die Wirkung p des Erdmagnetismus und die des Stabes p_1. Läfst man also die Nadel schwingen, so wird jetzt

$$p + p_1 = \frac{\pi^2 T}{l} n_1^2 = \varkappa n_1^2,$$

also

$$p_1 = \varkappa n_1^2 - p = \varkappa \left(n_1^2 - n^2\right).$$

Für eine andere Lage hat man

$$p_2 = \varkappa n_2^2 - p = \varkappa \left(n_2^2 - n^2\right).$$

Durch Division folgt

$$p_1 : p_2 = \left(n_1^2 - n^2\right) : \left(n_2^2 - n^2\right).$$

Coulomb fand nun durch direkte Messung, dafs für zwei Entfernungen r_1 und r_2 der einander genäherten Pole mit hinreichender Genauigkeit die Schwingungen das Gesetz

$$r_2^2 : r_1^2 = \left(n_1^2 - n^2\right) : \left(n_2^2 - n^2\right)$$

ergaben. Aus beiden Proportionen folgte

$$p_1 : p_2 = r_2^2 : r_1^2.$$

So ergiebt sich, dafs die Einwirkung zweier Pole aufeinander umgekehrt proportional dem Quadrate der gegenseitigen Entfernung ist.

Hansteen und Gaufs haben weit genauere Methoden angewandt, die Geltung des Newton-Coulombschen Gesetzes zu beweisen. (Man vergl. dazu z. B. Wüllner, III Seite 91 bis 107.) Hier ist auf die

gegenseitige Einwirkung sämtlicher Molekularmagnete aufeinander nicht hinreichende Rücksicht genommen. Trotzdem soll von jetzt ab die gegenseitige Einwirkung zweier magnetischer Massen m_1 und m_2 aufeinander als

$$p = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

bezeichnet werden. Setzt man hier $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ und $r = 1$, und mifst man die zugehörige Einwirkung p_1, so ist die Konstante $\varkappa = p_1$ bestimmt, und nun kann mit magnetischen Kräften gerechnet werden. Vor allem ist damit gezeigt, dafs das Potential eines magnetischen Poles m, bezogen auf einen in der Entfernung r befindlichen Pol von Polstärke 1

$$V = \varkappa \frac{m}{r}$$

ist. Die entsprechende Anziehung ist absolut genommen von der Gröfse $\varkappa \frac{m}{r^2}$, diese soll als Feldstärke in der betreffenden Entfernung bezeichnet werden. Wie früher, so ist auch hier

$$p = \varkappa \frac{m}{r^2} = \varkappa \frac{V_1 - V_2}{w},$$

wo V_1 und V_2 benachbarte Potentialwerte sind, während w der normal gemessene Abstand der zugehörigen Niveauflächen an der betreffenden Stelle ist.

Wählt man die magnetische Masseneinheit so, dafs $\varkappa$ gleich 1 ist, so kann man $\varkappa$ weglassen. Wir wollen also unter magnetischer Masseneinheit diejenige Menge magnetischer Masse verstehen, die auf eine gleich grofse magnetische Masse in der Entfernung 1 cm die Kraft 1 Dyne ausübt. Jetzt ist $1 = \varkappa \frac{1 \cdot 1}{1^2}$, d. h. $\varkappa = 1$.

239) Kraftlinien und Niveauflächen. Für mehrere punktförmige Pole von den Massen (Polstärken) $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ist das Potential wiederum

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots = \sum \frac{m}{r},$$

die Niveauflächen haben die Gleichung

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \cdots = c.$$

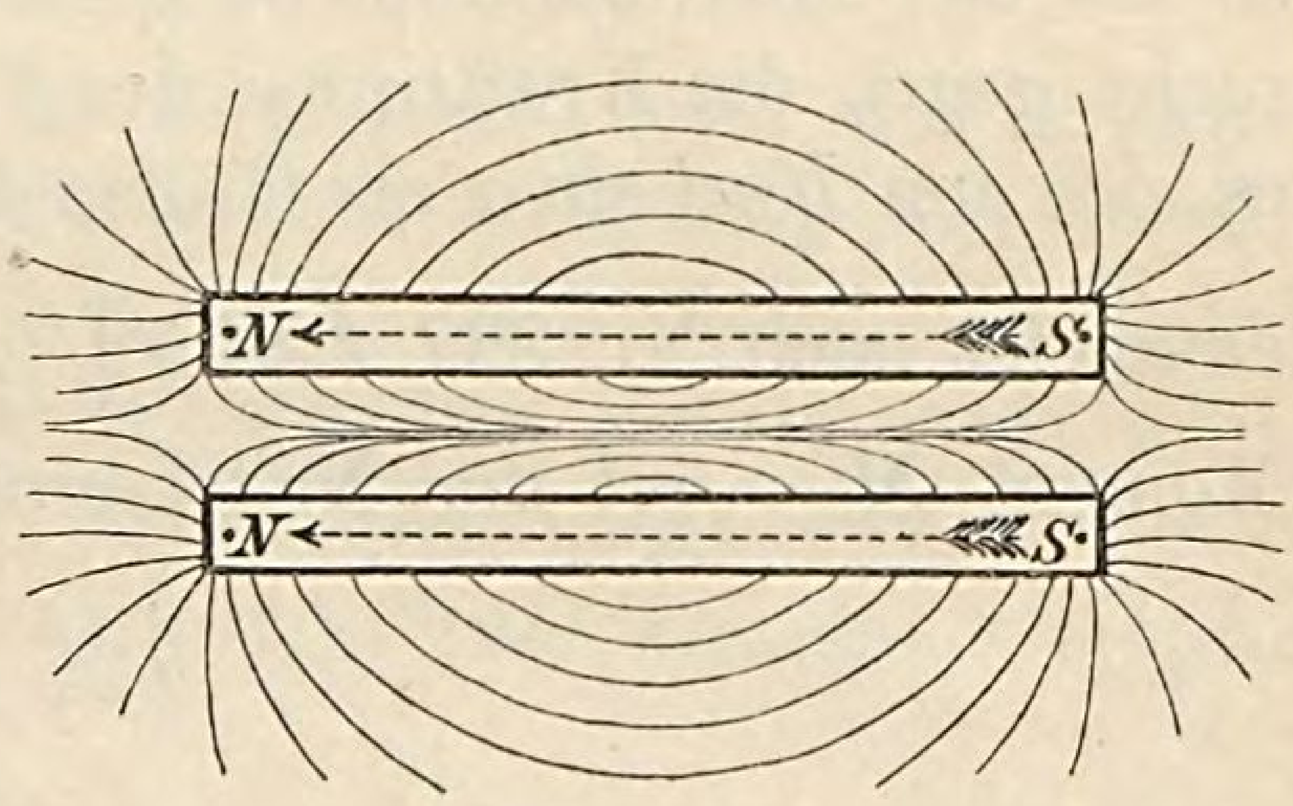
Bei Anordnung der Punkte in einer Ebene ist die Gleichung der Kraftlinien gegeben durch

$$m_1 \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2 + m_3 \cos \vartheta_3 + \cdots = c.$$

Unter den Polen können auch solche von negativer Polstärke sein.

Je länger und dünner ein Magnetstab ist, umsomehr hat man das Recht, von punktförmigen Polen zu sprechen. Bei den in der Praxis üblichen Magnetstäben zeigen sich, wie die bekannten Versuche mit Eisenfeilspänen oder Magnetnadeln nachweisen, schon erhebliche Abweichungen gegen die früher behandelte Gestalt der Niveau- und Kraftlinien. So müſsten z. B. die Kraftlinien für einen Magnetstab ebenso, wie für einen Hufeisenmagnet, der Form der Fig. 70 folgen, in Wirklichkeit fallen sie so aus, wie die verschiedenen Lehrbücher sie darstellen. Ebenso müſsten die Kraft- und Niveaulinien zweier gleich starker Nordpole parallel und gleichgerichteter Magnetstäbe in jedem Meridianschnitt der Zeichnung 65 entsprechen. In Wirklichkeit ist dies nicht genau genug der Fall. Ähnlich ist es mit Magnetstäben, deren Achsen in dieselbe Gerade fallen und deren Nordpole einander genähert werden.

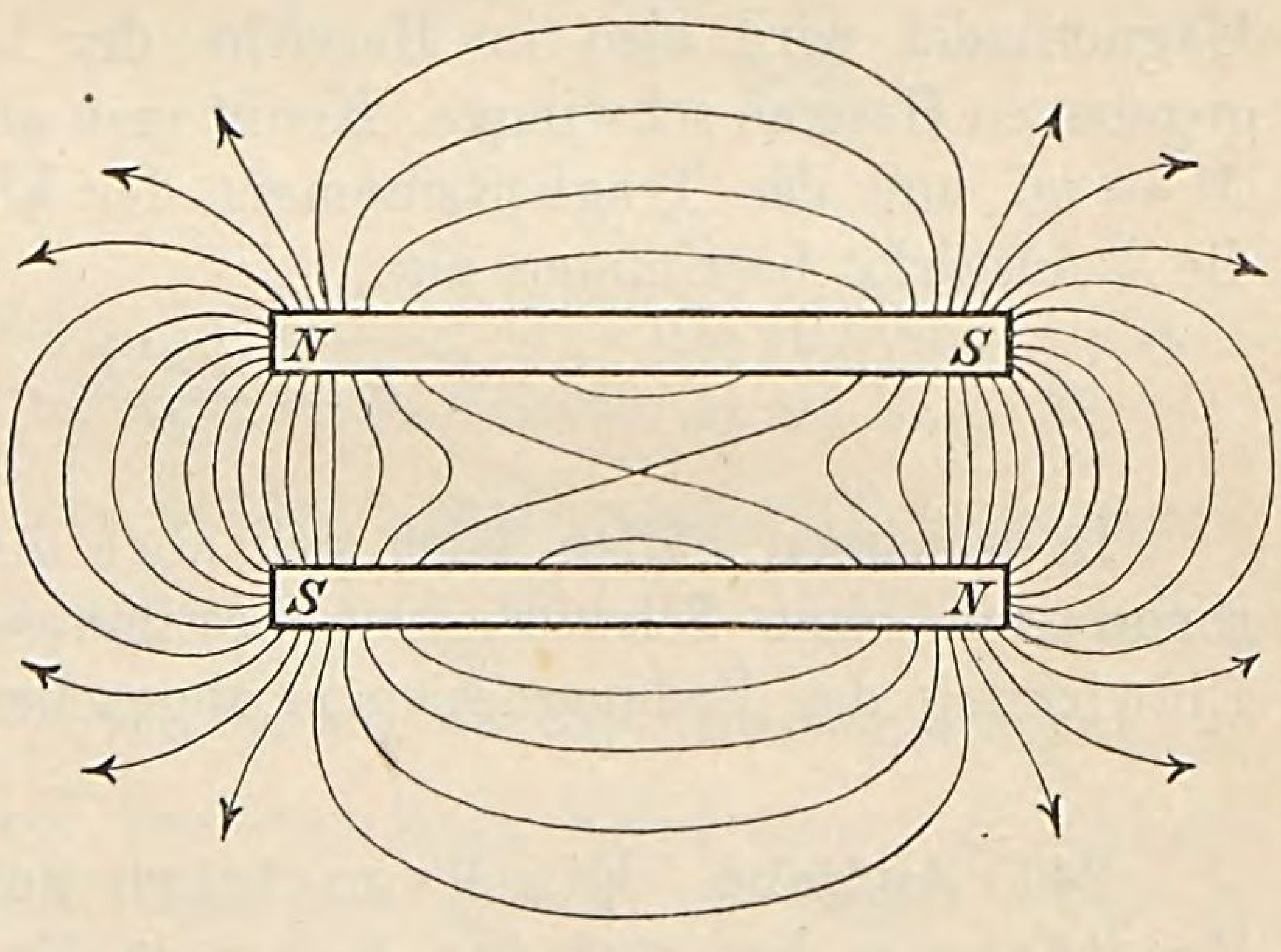
Fig. 165.



Immerhin bleibt alles bestehen, was vorher über das Verhalten der Kraftlinien in abgekürzter Redeweise gesagt war. Gleichgerichtete Kraftlinien stoſsen einander ab, entgegengesetzt gerichtete ziehen einander an.

In Fig. 165 ist angedeutet, wie zwei gleichgerichtete Magnetstäbe sich in dieser Hinsicht verhalten. Entfernt man die Drähte voneinander, so treten auch die zusammengedrängten Kraftlinien des zwischen beiden befindlichen Raumes wieder auseinander.

Fig. 166.



In Fig. 166 dagegen ist gezeigt, wie bei entgegengesetzt gerichteten Magnetstäben die im Zwischenraume befindlichen Kraftlinien auseinander getreten sind. Die des einen sind teilweise mit denen des anderen verschmolzen. Ein Grenzpaar durchkreuzt sich. Entfernt man die Stäbe voneinander, so trennt sich dieses Paar, und ein Nachbarpaar übernimmt seine Rolle. Ein Hin- und Herbewegen bringt also wechselnde Vereinigungen und

Abschnürungen hervor. Ein ähnliches Abschnüren der Kraftlinien erfolgt bei den Hertzschen Schwingungen. (Siehe unten.)

Es ist lehrreich, die mathematische Konstruktion der Kraftlinien für den Fall der Punktpole bei solcher Lagerung durchzuführen und die Kurven mit den praktisch gefundenen Linien zu vergleichen.

240) Schwingungen der Magnetnadel im magnetischen Felde. Ist ein homogenes Feld von der Feldstärke $+F$, so heifst dies, dafs an jeder Stelle auf die Einheit des entgegengesetzten Magnetismus die anziehende Kraft F ausgeübt wird, auf m solcher Einheiten dagegen die Kraft Fm. Hat nun die Magnetnadel von Polstärke m die Länge l, so ist das Maximalmoment gleich Fml. Dabei steht die Nadel senkrecht gegen die Kraftlinien des Feldes. In jeder anderen Lage handelt es sich um $Fml \sin\alpha$ als Gröfse der Direktionskraft. Die Schwingungsdauer ist nach Nr. 237 $t = \pi\sqrt{\frac{T}{Fml}}$, oder wenn man das magnetische Moment $M = ml$ der Nadel einführt,

$$t = \pi\sqrt{\frac{T}{MF}},$$

die Schwingungszahl für die Sekunde also

$$n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{MF}{T}}.$$

Nun kann im allgemeinen jedes magnetische Feld für einen sehr kleinen Bezirk als homogen betrachtet werden. Eine sehr kleine Magnetnadel wird also im Bereiche der Feldstärke F nach dem angegebenen Gesetze schwingen. Kennt man also das magnetische Moment $M = ml$ und das Trägheitsmoment der kleinen Nadel, so kann man die Feldstärke bestimmen als

$$F = \frac{n^2\pi^2 T}{M}.$$

In gewissen Fällen läfst sich aber die Stärke eines Feldes auch theoretisch ohne Schwierigkeit bestimmen, wenn zunächst von der Einwirkung des Erdmagnetismus abgesehen wird.

241) **Aufgabe.** Ein Magnetstab von der Länge $2l$ und der Polstärke m hat auf der Achse in Entfernung r vom Mittelpunkte welche Feldstärke?

Auflösung. Die Feldstärke bestimmt sich aus der Differenz der Feldstärken der beiden Pole, da die Kraftrichtungen in dieselbe Gerade fallen. Es ist demnach

$$F = F_2 - F_1 = \frac{m}{(r-l)^2} - \frac{m}{(r+l)^2} = m\,\frac{(r+l)^2-(r-l)^2}{(r^2-l^2)^2} = \frac{4\,m r l}{(r^2-l^2)^2}$$

$$= \frac{4\,m r l}{r^4\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)^2} = \frac{4\,m l}{r^3\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)^2}.$$

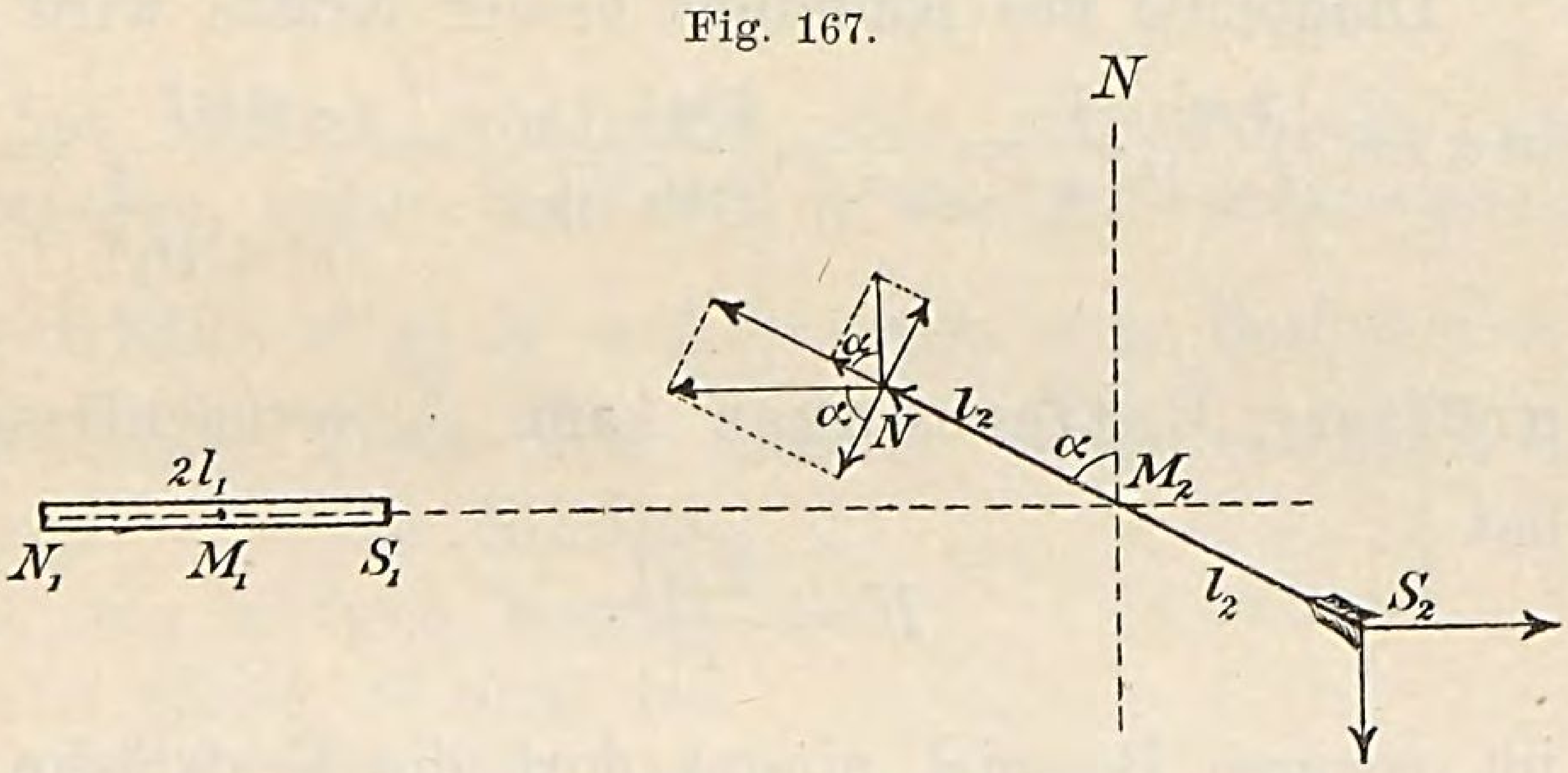
In gröfserer Entfernung kann man $\frac{l^2}{r^2}$ vernachlässigen. Dort wird also

$$F = \frac{4\,m l}{r^3},$$

d. h. dort ist die Feldstärke umgekehrt proportional der 3ten Potenz der Entfernung, nimmt also sehr schnell ab. (Vgl. Störungsgesetz.)

242) **Aufgabe.** Eine kleine Magnetnadel von der Länge $2\,l_2$ und der Polstärke m_2 befinde sich auf der Achse eines Magnetstabes von der Länge $2\,l_1$ und der Polstärke m_1, und zwar in der (grofsen) Entfernung r von der Mitte. Um wieviel wird sie aus der normalen Stellung abgelenkt, wenn der Stab senkrecht gegen den magnetischen Meridian liegt?

Fig. 167.



Auflösung. Bei gröfserer Entfernung sind die richtenden Kräfte als parallel zur Achse anzunehmen. Die Feldstärke ist nach Nr. 241 als $\frac{4\,m_1 l_1}{r^3}$ anzunehmen, bei der durch α angedeuteten Gleichgewichtsstellung also ist das die Nadel richtende Moment des Stabes gleich $\frac{4\,m_1 l_1}{r^3}\, m_2 l_2 \cos\alpha$. Ist nun E die Feldstärke des Erdmagnetismus, so ist ihr richtendes Moment bei derselben Lage $E m_2 l_2 \sin\alpha$. Im Gleichgewichtszustande sind beide Momente gleich zu setzen. Daraus ergiebt sich

$$\tan\alpha = \frac{4\,m_1 l_1}{E r^3}.$$

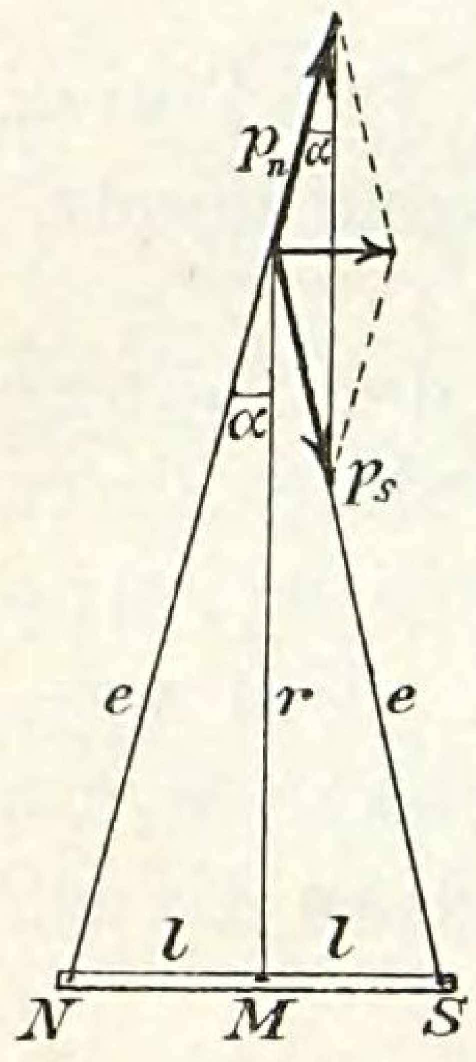
Bemerkung. Man kann die letztere Formel, bei der Länge und Polstärke der Nadel gleichgültig sind, benutzen, um mit Hilfe der

bekannten Feldstärke des Erdmagnetismus die Polstärke von Magnetstäben zu bestimmen. Ist $E = 0,2$, so ergiebt sich als Polstärke des Magnetstabes

$$m_1 = \frac{0,2\, r^3}{4\, l_1} \tan \alpha.$$

[Im Jahre 1893 war für Mitteleuropa unter 50° nördlicher Breite und 15° östl. von Greenwich E, in Einheiten des Centimeter-Gramm-Sekundensystems gemessen, gleich 0,198. Anfangs 1896 war der Wert von E in Wien 0,2065, in Paris 0,1942, in Berlin gleich 0,183. Die jährliche Zunahme ist durchschnittlich 0,00015. Über die Bestimmung von E vergleiche die Lehrbücher.]

Fig. 168.



243) **Aufgabe.** Die Feldstärke eines Magnetstabes für die Entfernung r auf seinem magnetischen Äquator zu bestimmen.

Auflösung. Der Nordpol giebt $p_n = \frac{m}{e^2} = \frac{m}{r^2 + l^2}$, der Südpol ein ebenso großes p_s. Die horizontale Diagonale des Rhombus beider Kräfte wird

$$p = 2\, p_n \sin \alpha = \frac{2\, m}{r^2 + l^2} \cdot \frac{l}{e} = \frac{2\, m l}{(r^2 + l^2)\sqrt{r^2 + l^2}} = \frac{2\, m l}{(r^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\, m l}{r^3 \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Für größere Entfernungen kann $\frac{l^2}{r^2}$ vernachlässigt werden, und man hat

$$F = \frac{2\, m l}{r^3}.$$

Wie im vorigen Beispiel nimmt dort die Feldstärke umgekehrt proportional der 3ten Potenz der Entfernung ab.

244) **Aufgabe.** Die Feldstärke eines kleinen Magnetstabes für einen beliebigen Punkt zu finden.

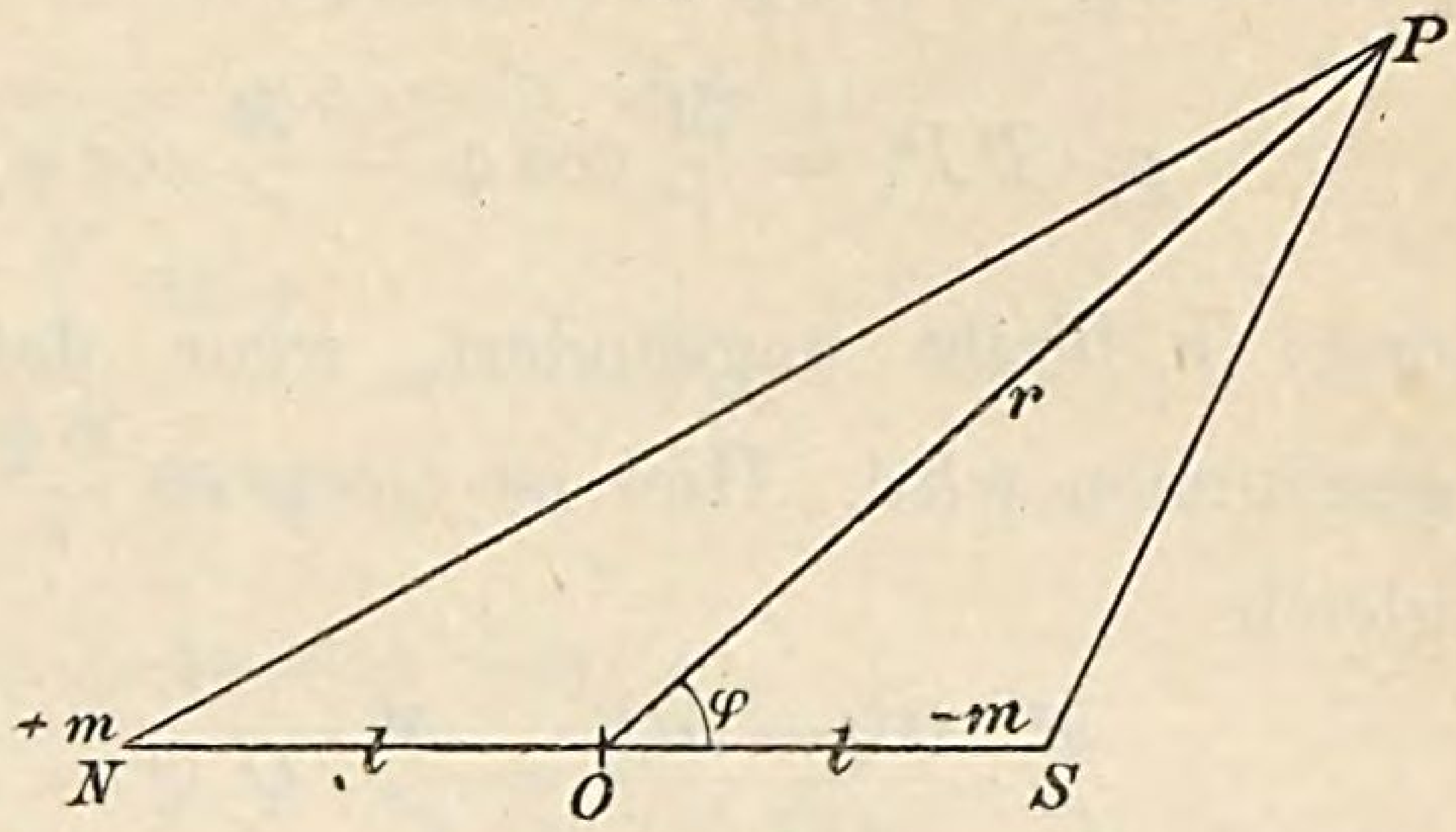
Erste Auflösung. Auf dem Wege von Nr. 86 ergiebt sich p, wenn r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes von den beiden Polen sind, aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} - \frac{2 \cos (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}.$$

Auch die Richtung ist auf dem dortigen Wege leicht zu bestimmen. Setzt man $p = c$, so hat man die Gleichung der Linien gleicher Feldstärke (Intensität) für das in Nr. 92 behandelte Problem. Um jedoch an Potentialbetrachtungen zu gewöhnen, wird noch eine zweite Lösung gegeben.

Zweite Auflösung. Das Potential in P ist die Arbeit, die man nötig hat, um die magnetische Poleinheit von dort in den Bereich zu bringen, wo der Potentialwert gleich Null ist. Diesen Wert erreicht man aber auch dadurch, daſs man z. B. S unter der Gegenwirkung der Menge 1 in P allein nach N bringt. Da es sich um einen kleinen Stab (Elementarmagnet) handeln soll, kann man $PS = PN = PO = r$ setzen. Von der

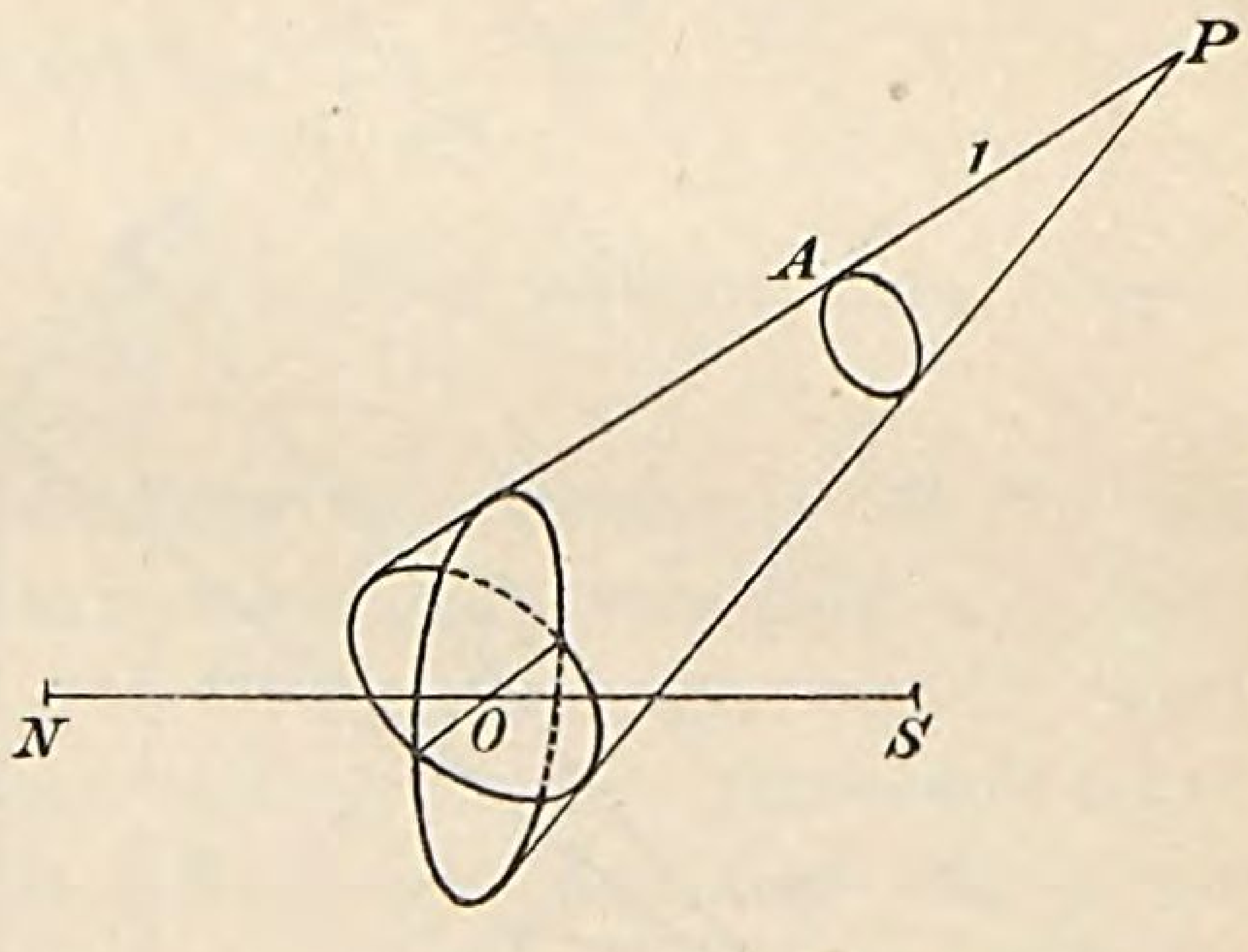
Fig. 169.



Gegenkraft $\frac{m}{r^2}$ ist nur die Horizontalkomponente $\frac{m}{r^2}\cos\varphi$ zu überwinden. Da der Arbeitsweg gleich $2l$ ist, handelt es sich um die Arbeit $\frac{m}{r^2}\cos\varphi\, 2l$. Hier ist $2ml$ das magnetische Moment M des Stabes, also ist der gesuchte Potentialwert angenähert gleich $V = \frac{M\cos\varphi}{r^2}$.

Man hat diesem Ausdrucke eine eigentümliche geometrische Deutung gegeben, indem man sich in der Äquatorialebene eine Kreisfläche vom Inhalte $r^2 = M = 2ml$, also vom Radius $r = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$ mit O als Mittelpunkt angebracht dachte. Diese erscheint von P aus gesehen ebenso, wie der Normalschnitt des zugehörigen Kegels, dessen Fläche gleich $M\cos\varphi$ ist. Durch Reduktion auf die Entfernung $PA = 1$ erhält man den zugehörigen körperlichen Winkel $w = \frac{M\cos\varphi}{r^2} = V$. Also:

Fig. 170.



Der Potentialwert eines Elementarmagnets in einem beliebigen Punkte P ist gleich dem räumlichen Winkel, unter dem man von dort aus eine kreisförmige Hilfsfläche erblickt, die mit der Äquatorebene des Magnets zusammenfällt und deren Inhalt durch den Wert des magnetischen Moments dargestellt wird.

Aus diesem Ausdrucke muſs nun die Feldstärke nach Gröſse und Richtung abgeleitet werden. Sie kann in eine Komponente p_1 in der

Tangente des um O geschlagenen Kreises und in eine in den Radius fallende p_2 zerlegt werden. (Vgl. Fig. 171.) Bewegt man die Einheit von P aus in der Tangente um einen beliebigen Weg PP_1, so ist nach obigem die geleistete Arbeit

$$p_1 \cdot PP_1 = \frac{M}{r^2}\cos\varphi - \frac{M}{r^2}\cos\varphi_1 = \frac{M}{r^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_1),$$

denn r bleibt ungeändert, wenn der willkürliche Weg sehr klein genommen wird. Hier ist $\cos\varphi = \frac{OQ}{r}$, $\cos\varphi_1 = \frac{OQ_1}{r}$, also die Arbeit gleich

$$\frac{M}{r^2} \cdot \frac{OQ - OQ_1}{r} = \frac{M}{r^3} \cdot Q_1 Q = \frac{M \cdot SP}{r^3} = \frac{M \cdot PP_1}{r^3} \sin\alpha.$$

Setzt man dies wieder gleich $p_1 \cdot PP_1$, so hebt sich der willkürliche Weg PP_1, und es bleibt als Komponente der Feldstärke bestehen

$$p_1 = \frac{M}{r^3} \cdot \sin\varphi.$$

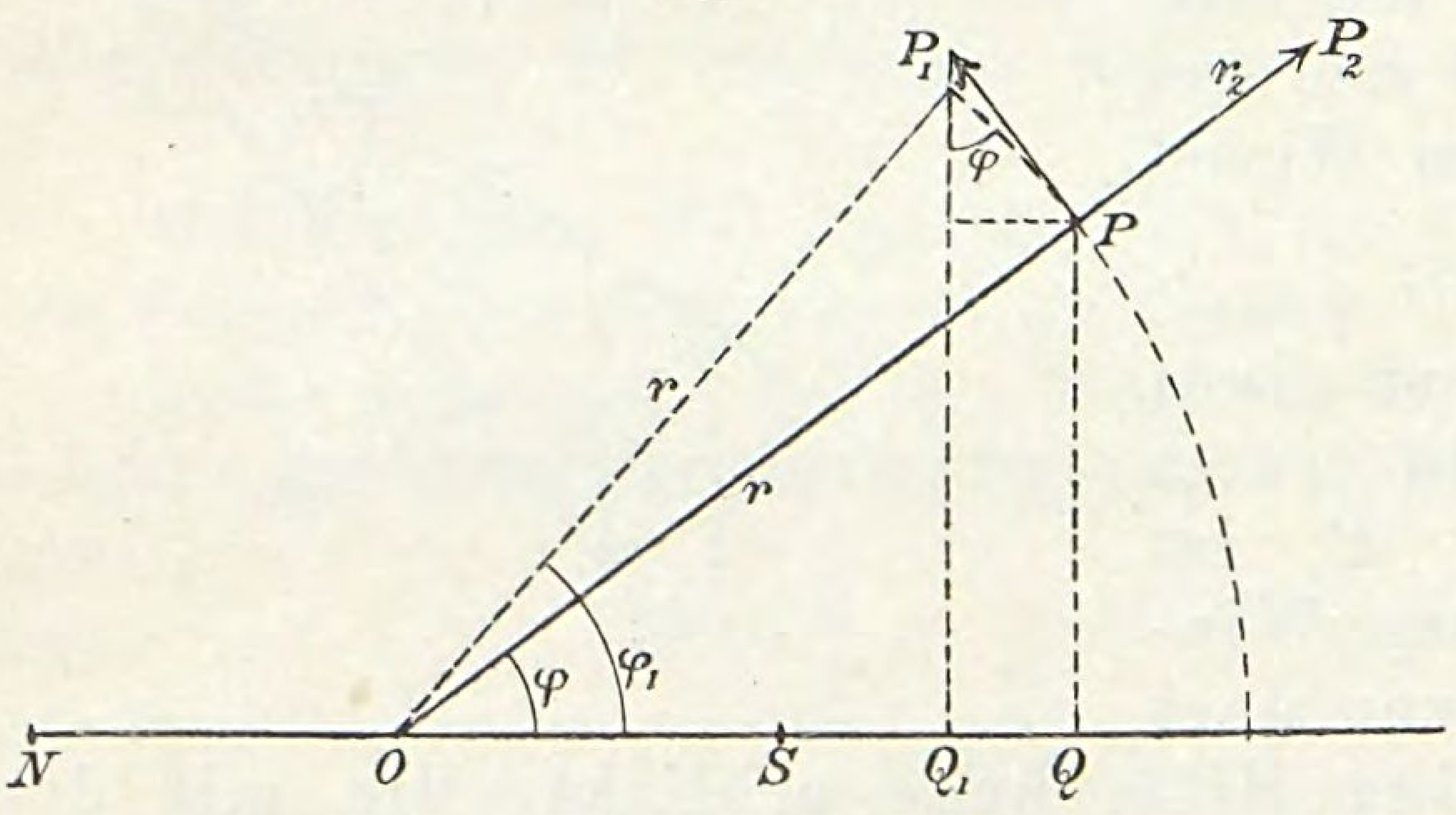
Bewegt man jetzt die Einheit auf dem Radius um eine willkürliche Strecke PP_2, so ist die Arbeit

$$p_2 \cdot PP_2 = \frac{M\cos\varphi}{r^2} - \frac{M\cos\varphi}{r_2^2} = M\cos\varphi\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

zu leisten, denn jetzt bleibt φ umgeändert. Man kann dafür schreiben

$$M\cos\varphi\,\frac{r_2^2 - r^2}{r^2 r_2^2} = M\cos\varphi\,\frac{(r_2 + r)(r_2 - r)}{r^2 r_2^2} = M\cos\varphi\,\frac{r_2 + r}{r^2 r_2^2}\,PP_2.$$

Fig. 171.



Setzt man dies wieder gleich $p_2 \cdot PP_2$, so hebt sich der Weg PP_2 weg, und es bleibt stehen

$$p_2 = M\cos\varphi\,\frac{r_2 + r}{r^2 r_2^2}.$$

Nimmt man die willkürliche Länge des Weges unendlich klein, so kann man $r_2 = r$ setzen, an Stelle des Bruches tritt also $\frac{2r}{r^4} = \frac{2}{r^3}$, und es wird

$$p_2 = \frac{2M\cos\varphi}{r^3}$$

die andere Komponente. Die Resultante, d. h. die Feldstärke ergiebt sich als

$$1)\quad F = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \frac{M}{r^3}\sqrt{\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi} = \frac{M}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}.$$

Die Neigung gegen den Radius r ergiebt sich aus

$$\tan\alpha = \frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{M}{r^3}\sin\varphi}{\frac{2M}{r^3}\cos\varphi} = \frac{1}{2}\tan\varphi.$$

Die Neigung $\beta = \alpha + \varphi$ ergiebt sich aus

$$2)\quad \tan\beta = \tan(\alpha + \varphi) = \frac{\tan a + \tan\varphi}{1 - \tan\alpha\tan\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\tan\varphi + \tan\varphi}{1 - \frac{1}{2}\tan\varphi\tan\varphi} = \frac{3\tan\varphi}{2 - \tan^2\varphi}.$$

Damit ist die Feldstärke für jeden Punkt nach Gröfse und Richtung bestimmt. Dabei ist zu bemerken, dafs nur die Gröfse von M abhängig ist, nicht aber die Richtung.

Für Punkte der Achse ist $\varphi = o$, also wird dort

$$p = \frac{M}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2 o} = \frac{2M}{r^3} = \frac{4ml}{r^3},$$

wie schon oben gezeigt war. Der zugehörige Potentialwert ist

$$\frac{M\cos o}{r^2} = \frac{2ml}{r^2}.$$

Für Punkte der Äquatorebene ist $\varphi = 90^0$. Dort wird

$$p = \frac{M}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2 90^0} = \frac{M}{r^3} = \frac{2ml}{r^3},$$

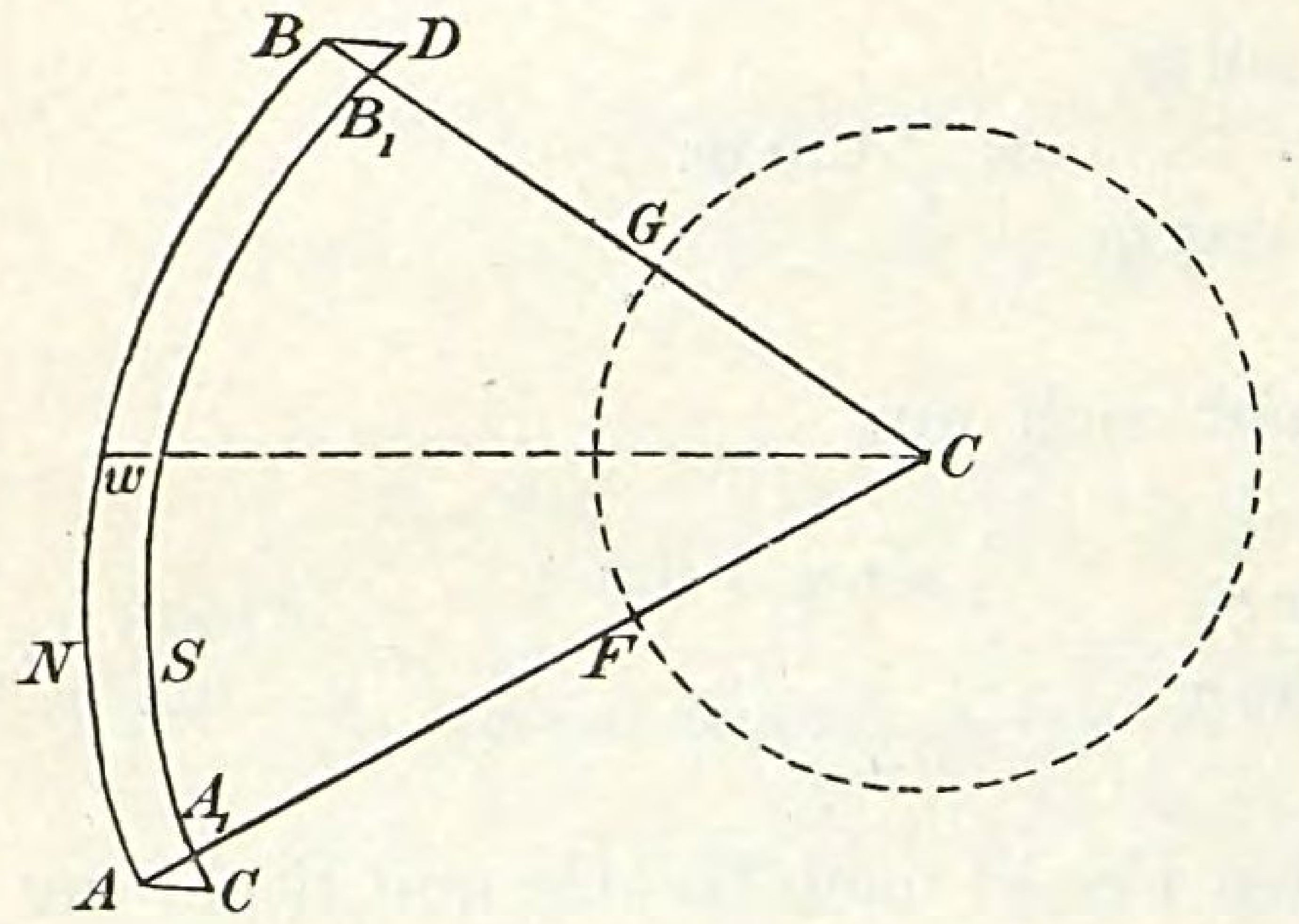
Der Potentialwert ist $\frac{M\cos 90^0}{r^2} = o$. Auch dies stimmt zum obigen Resultate.

Damit ist eine wesentliche Ergänzung zu Abschnitt 92 für den Fall kleiner Magneten gegeben. Auch kann man von hier aus dazu übergehen, das Potential einer Reihe von Elementarmagneten, die einen Stab von unendlicher Länge bilden, mit gröfserer mathematischer Strenge zu untersuchen. Dies würde jedoch aus der elementaren Behandlung heraustreten.

245) Magnetische Doppelschale oder Blatt. Der folgende Abschnitt macht es nötig, auch auf die Theorie der magnetischen Doppelschale einzugehen. Man versteht darunter eine sehr dünne Schale (Blatt), welche dadurch entsteht, dafs ein irgend wie gestaltetes

Stück einer krummen Fläche (Kalotte) einer Parallelverschiebung unterworfen wird, worauf die der Anfangslage entsprechende Fläche homogen mit Nordmagnetismus, die der Schlufslage entsprechende in derselben Dichte mit Südmagnetismus belegt wird. Ist z. B. 1 die Dichtigkeit der einen Belegung, so kann man die der andern mit — 1 bezeichnen.

Fig. 172.



In Fig. 172 ist AB die mit Nordmagnetismus, A_1B_1 die mit Südmagnetismus belegte Fläche.

Auf die unendlich kleinen Teile AA_1C und BB_1D_1 braucht keine Rücksicht genommen zu werden. Die Länge des kleinen Verschiebungsweges sei w. Angenommen in C befände sich die Masseneinheit, so erfordert die Aufgabe, diese ins Unendliche zu entfernen, ebenso viel Arbeit, wie die, bei festgehaltenem C die Schale ins Unendliche zu entfernen. Angenommen, das Entfernen der Schale AB ins Unendliche erfordert die Arbeit A, dann erfordert das Entfernen der Schale A_1B_1 erstens die zur Verschiebung um w nötige Arbeit und aufserdem die Arbeit $-A$. Das Potential der Doppelschale ist also für einen Punkt C die Arbeit, die nötig ist, unter alleiniger Einwirkung der in C koncentrierten Masseneinheit die eine der beiden Schalen um die Strecke w zu verschieben. Denn A und $-A$ heben bei der Gesamtbewegung einander auf.

Man denke sich jetzt aus der Kalotte AB und dem Punkte C einen Kegel gebildet, aufserdem um C die Einheitskugel gelegt, so dafs ein geschlossener Raum $ABGF$ entsteht, dessen sämtliche Flächen in der Dichte 1 mit Masse belegt gedacht werden sollen. Nach dem Laplaceschen Satze erfährt dieser Raum durch die aufsen liegende Masse C die Spannung Null. Da die Seitenwände AF, BG u. s. w. dazu nichts beitragen, ist die auf die Fläche GF ausgeübte Abstofsung ebenso grofs, als die auf die Fläche AB einwirkende. Ist nun die Fläche $FG = \varphi$, d. h. der körperliche Winkel, unter dem AB gesehen wird, gleich φ, so ist die auf diese Fläche einwirkende Abstofsung, sobald der körperliche Winkel klein ist, gleich $\frac{\varphi}{1^2} = \varphi$. Da nun w unendlich klein zu denken ist, so ist die Anziehung auf A_1B_1 ebenfalls gleich φ, die zur Verschiebung von A_1B_1 um w nötige Arbeit ist also gleich φw, und ebenso grofs ist das Potential der kleinen Doppelschale in Bezug auf den Punkt C. Ist die Dichte der Belegung nicht 1, sondern δ, so ist das Potential gleich $\varphi \omega \delta$.

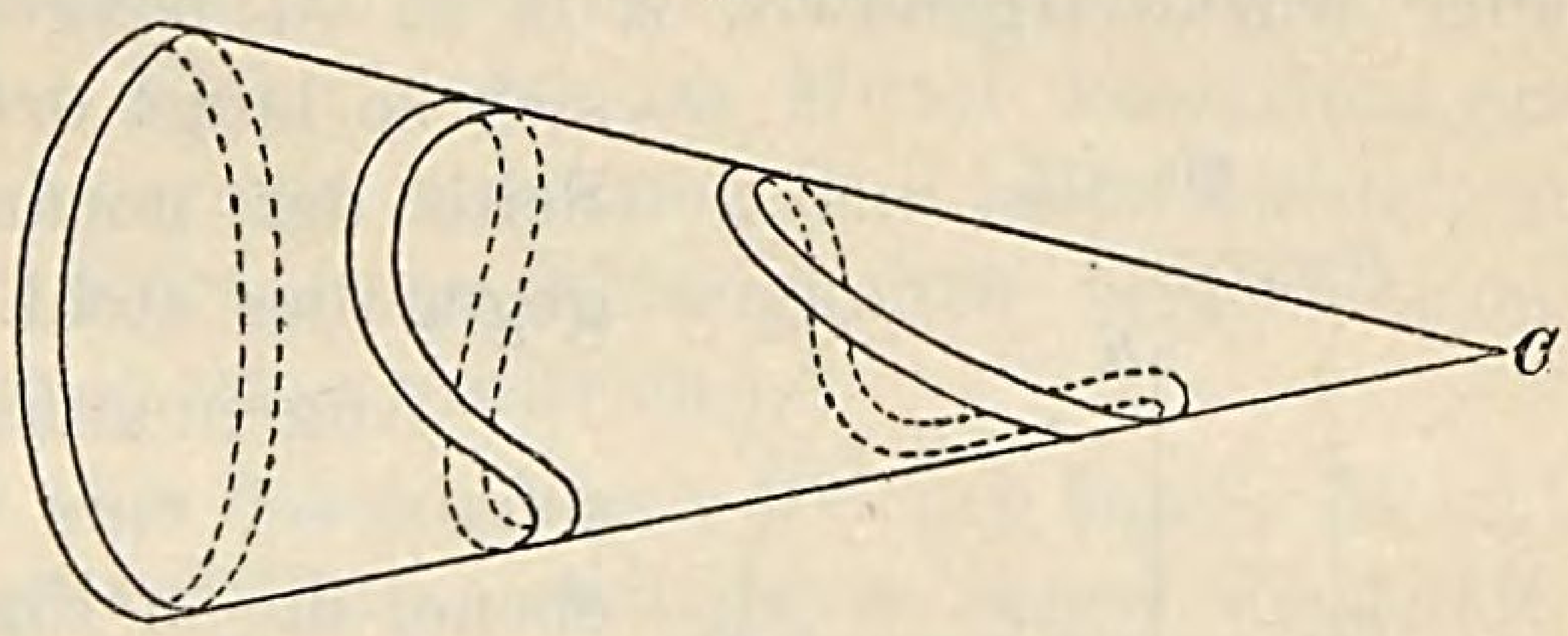
Ist die Schale grofs, so zerlege man sie in kleine Teile, deren körperliche Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ sein mögen. Nach Nr. 79 sind die Potentialwerte algebraisch zu addieren, so dafs man erhält

$$V = w\delta\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) = w\delta\varphi,$$

wo φ die Summe der körperlichen Winkel bedeutet. Folglich:

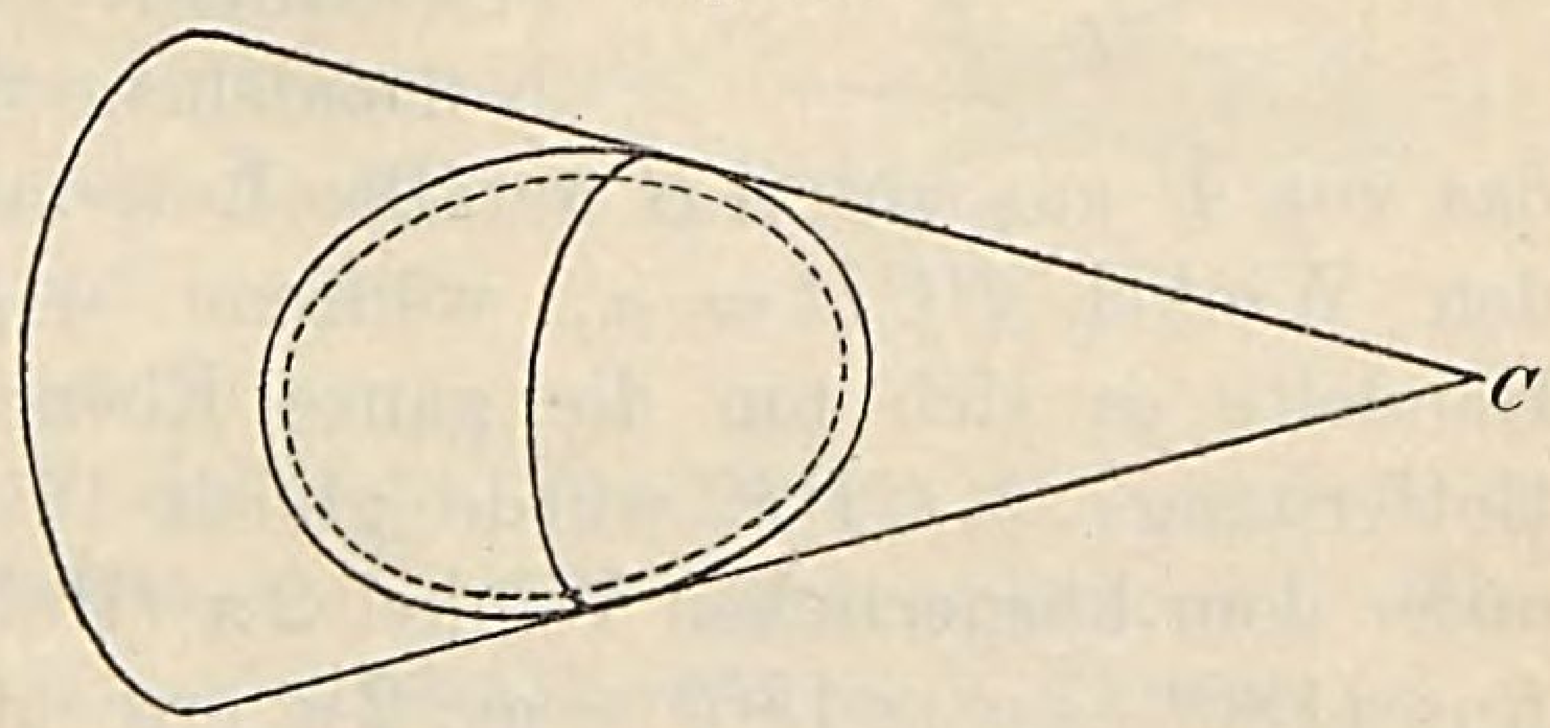
Das Potential einer magnetischen Doppelschale (oder eines magnetischen Blattes) in einem beliebigen Punkte ist gleich dem Produkte aus dem Abstande beider Schalen, der Dichte der Belegung und des körperlichen Winkels, unter dem sie von dem Punkte aus erscheint.

Fig. 173.



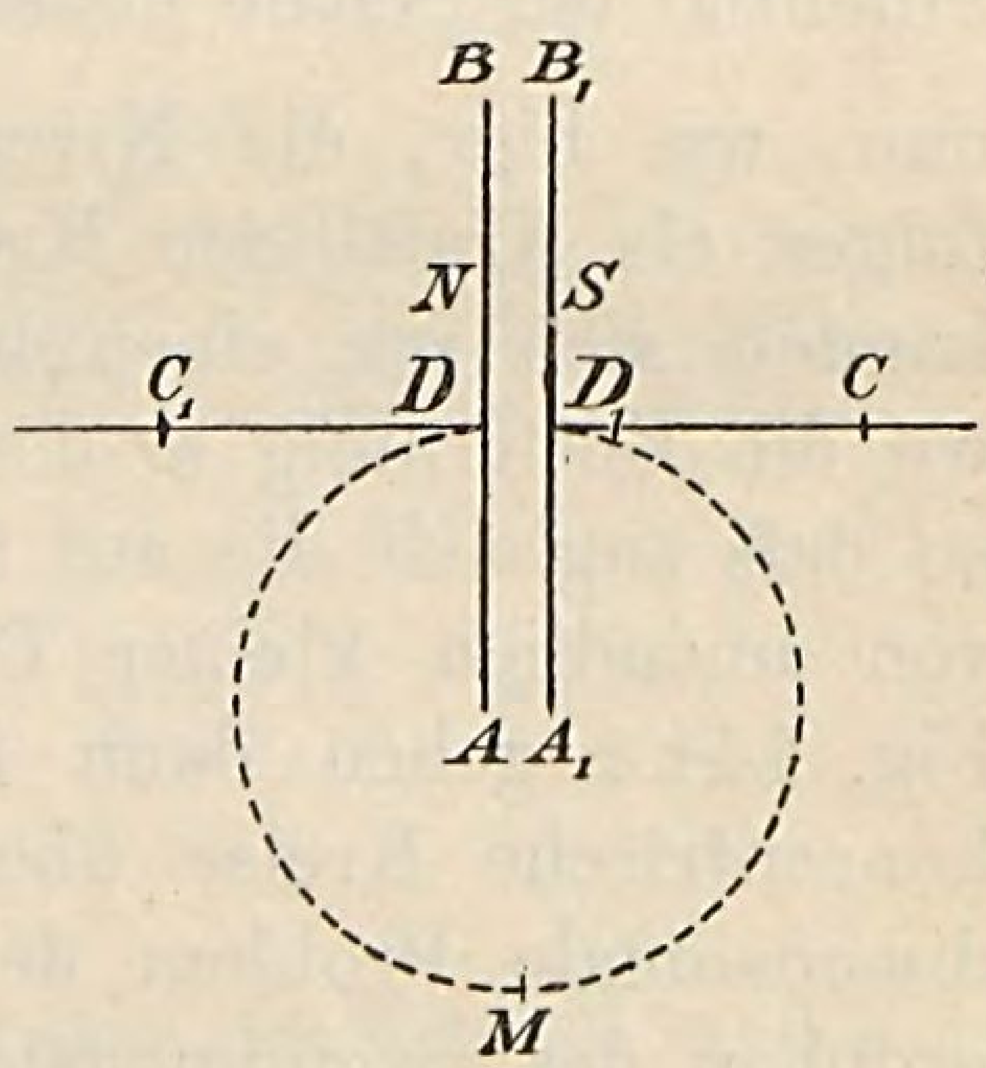
Der Potentialwert ist positiv oder negativ, je nachdem C auf der einen oder der andern Seite der Schale liegt.

Fig. 174.



Nun lassen sich durch einen Kegel Doppelschalen der verschiedensten Gestaltung begrenzen. Sämtliche haben für die Spitze C denselben Potentialwert (vgl. Fig. 173), sobald sie im gleichen Sinne belegt sind. Handelt es sich um eine geschlossene Fläche, die aufsen mit $+$, innen mit $-$ belegt ist, so ist, da von C aus gesehen die beiden Doppelschalen in ungleichem Sinne belegt sind, das Potential für C gleich Null. Vgl. Fig. 174. Dies zeigte sich z. B. bei gewissen Influenzproblemen.

Fig. 175.

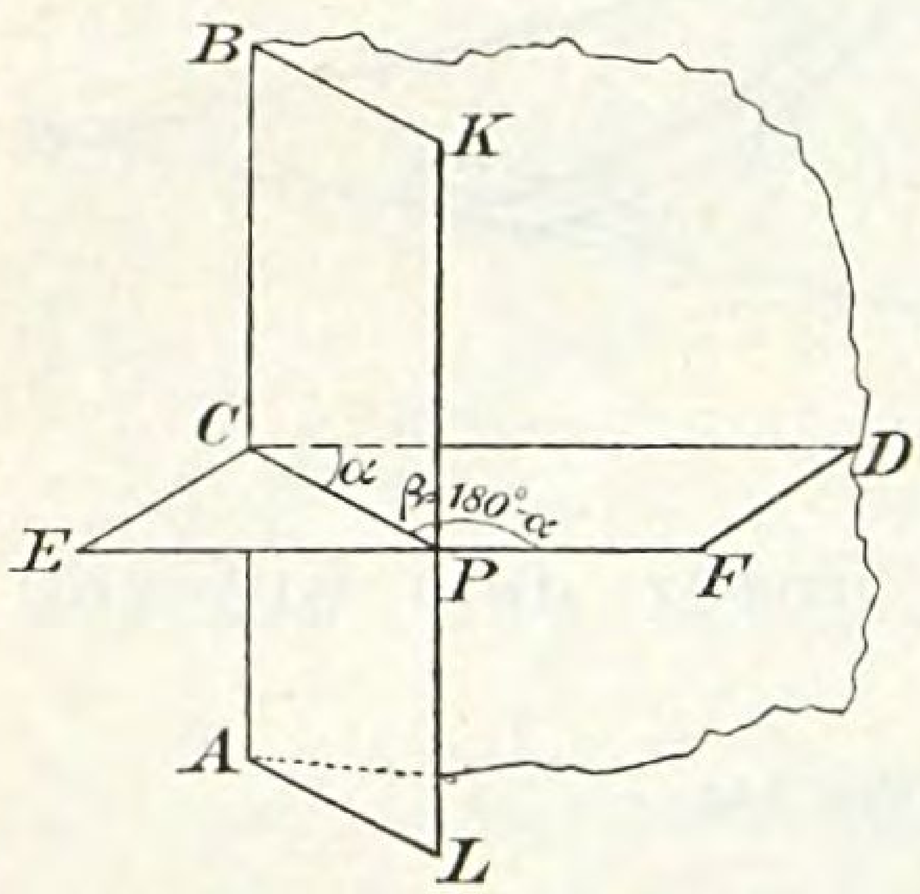


Die Doppelschale kann auch eben sein, z. B. kreisförmig. Läfst man dabei C z. B. nach D_1 rücken, so ist der körperliche Winkel gleich der Hälfte der Oberfläche der Einheitskugel, d. h. gleich $2 \cdot 1^2\pi = 2\pi$, also das Potential dort gleich $2w\delta\pi$. Auf der andern Seite bei D ist es gleich $-2w\delta\pi$, der Potentialunterschied für beide Punkte ist also gleich $4w\delta\pi$. Auf welchem Wege

man auch die magnetische Einheit — ohne durch das Blatt selbst zu gehen — von D_1 nach D führe, stets ist die Arbeit $4 w \delta \pi$ nötig.

Angenommen, die nordmagnetische Einheit könnte sich auf dem skizzierten Kreise bewegen, so würde sie, nach D gebracht, im Kreise herum nach D_1 wandern. Angenommen ferner, die Schale könnte sich um eine Achse drehen, die im Halbierungspunkte von DD_1 auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht, die nordmagnetische Einheit aber würde irgendwo, z. B. in M festgehalten, so würde die Schale sich so lange drehen, bis die südmagnetische Seite der nordmagnetischen Einheit genau gegenüber steht.

Fig. 176.



Angenommen, die magnetische Doppelschale sei eine durch AB begrenzte Halbebene, die in Fig. 176 als in der Zeichnungsebene liegend dargestellt ist, so würde sie, von einem beliebigen Raumpunkte P aus gesehen, unter welchem körperlichen Winkel erscheinen? $CDFE$ sei die durch P gelegte Normalebene der Geraden AB, dann ist PC das von P aus auf AB gefällte Lot, und dieses bildet mit der Ebene den Winkel $PCD = \alpha$, während $\sphericalangle \beta = \sphericalangle CPF = 180^0 - \alpha$ ist. Handelte es sich um die ganze Ebene, so läge AB in unendlicher Entfernung, $\sphericalangle CPF$ würde gleich 180^0 sein, und die Ebene würde unter dem körperlichen Winkel 2π (Halbkugelfläche $2\pi 1^2$) erscheinen. Aus $(180^0 - \alpha^0) : 180^0 = \varphi : 2\pi$ ergiebt sich als körperlicher Winkel $\varphi = \frac{2\pi(180^0 - \alpha^0)}{180^0}$, oder wenn man Bogen statt der Winkel schreibt, $\varphi = \frac{2\pi\widehat{\beta}}{\pi} = \widehat{2\beta}$. Für alle Punkte der Ebene $ABKL$ ist demnach das Potential der Schale konstant gleich $w\delta 2\pi \frac{180^0 - \alpha^0}{180^0}$ oder $w\delta\widehat{2\beta}$. Sind nun, wie hier, die Niveauflächen ein Ebenenbüschel durch AB, so folgen als Kraftlinien Kreise, deren Mittelpunkte auf AB liegen. Es handelt sich um einen besonderen Fall der Fig. 144c, den nämlich, wo die Entfernung w der parallelen Ebenen verschwindend klein ist, so dafs zugleich die auf den Aufsenseiten lagernde Elektrizitätsmenge von unendlich kleiner Dichte ist. Die asymptotischen Kurven der Fig. 144c gehen dann in ein Strahlenbüschel, die Niveaulinien in koncentrische Kreise über. Es handelt sich zugleich um das zweidimensionale Problem der Doppellinie, d. h. um das Vertauschungsproblem des zweidimensionalen Punktproblems, so dafs sich hier ein neuer Übergang zum Gebiete des logarithmischen Potentials eröffnet. Durch die Abbildung $Z = \sqrt{z}$ erhält man das Vertauschungsproblem

des lemniskatischen Zweipunktproblems, welches auf dieselben Orthogonalscharen führt, wie letzteres.

246) Para- und Diamagnetismus. Das von Faraday entdeckte Verhalten para- und diamagnetischer Körper zwischen zwei Polen wird in den Lehrbüchern dargestellt und hier als bekannt vorausgesetzt. Da ein und derselbe Körper bald para-, bald diamagnetisches Verhalten zeigt, je nach dem Mittel, in dem er sich befindet, so leuchtet ein, dafs ähnlich, wie bei der Elektrizität, das Mittel wesentlich am Vorgange beteiligt ist. Der Vorgang ist analog dem beim Aufsteigen oder Niedersinken desselben Körpers in Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichtes. (Magnetischer Auftrieb.)

a) Paramagnetismus. Als Beispiel diene weiches Eisen. Bringt man solches in die Nähe eines kräftigen Nordpols, so zeigen die Kraftlinienversuche, dafs es die Kraftlinien an sich heran und zum Teil in sich hineinzieht, als ob es ein Südpol wäre. Es passieren demnach mehr Kraftlinien durch das Eisen, als durch das gleiche Volumen Luft bezw. den gleichen luftleeren Raum. Der Kraftflufs wird begünstigt. Man kann sich den Vorgang mechanisch versinnbildlichen. Der Punkt S zieht die Kraftlinien NA und NA_1 gewissermafsen an, er wird ebenso stark von ihnen angezogen. Die Anziehungen geben eine nach N gerichtete Resultante. Ebenso ist es mit je zwei anderen symmetrisch liegenden Kraftlinien. Eine ponderomotorische Anziehung findet nun wirklich statt, natürlich nicht durch geometrische Gebilde, sondern durch die Einwirkung der polarisierten Molekülreihen veranlafst. Das Eisen wird nach den Stellen hingezogen, wo die ursprünglich geradlinigen Kraftlinien dichter beisammen liegen.

Fig. 177.

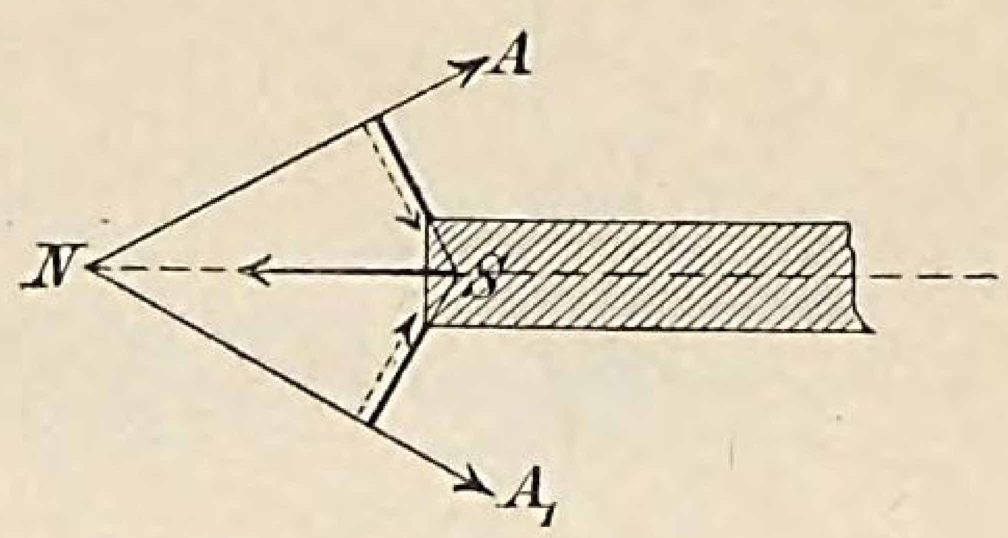
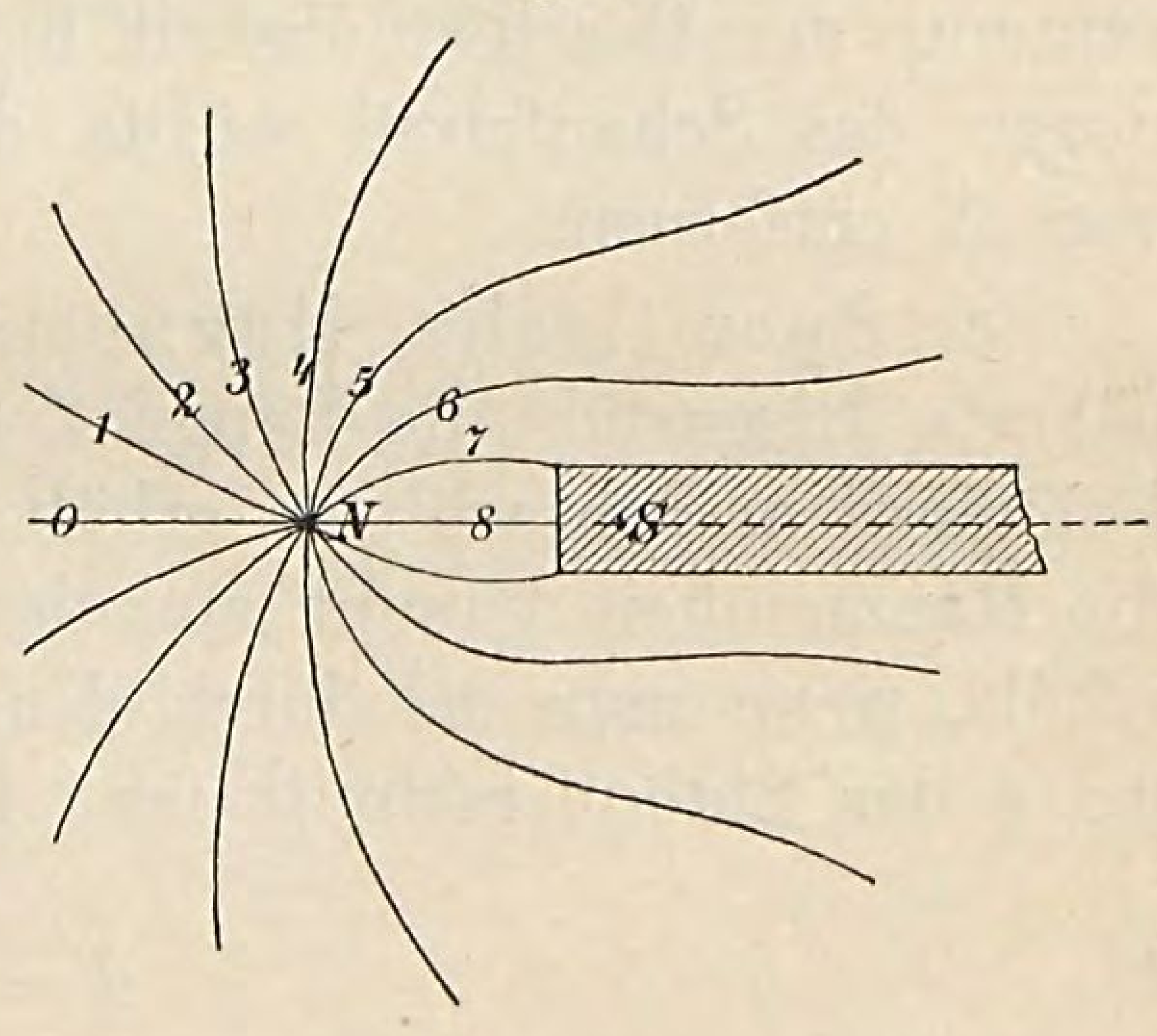


Fig. 178.



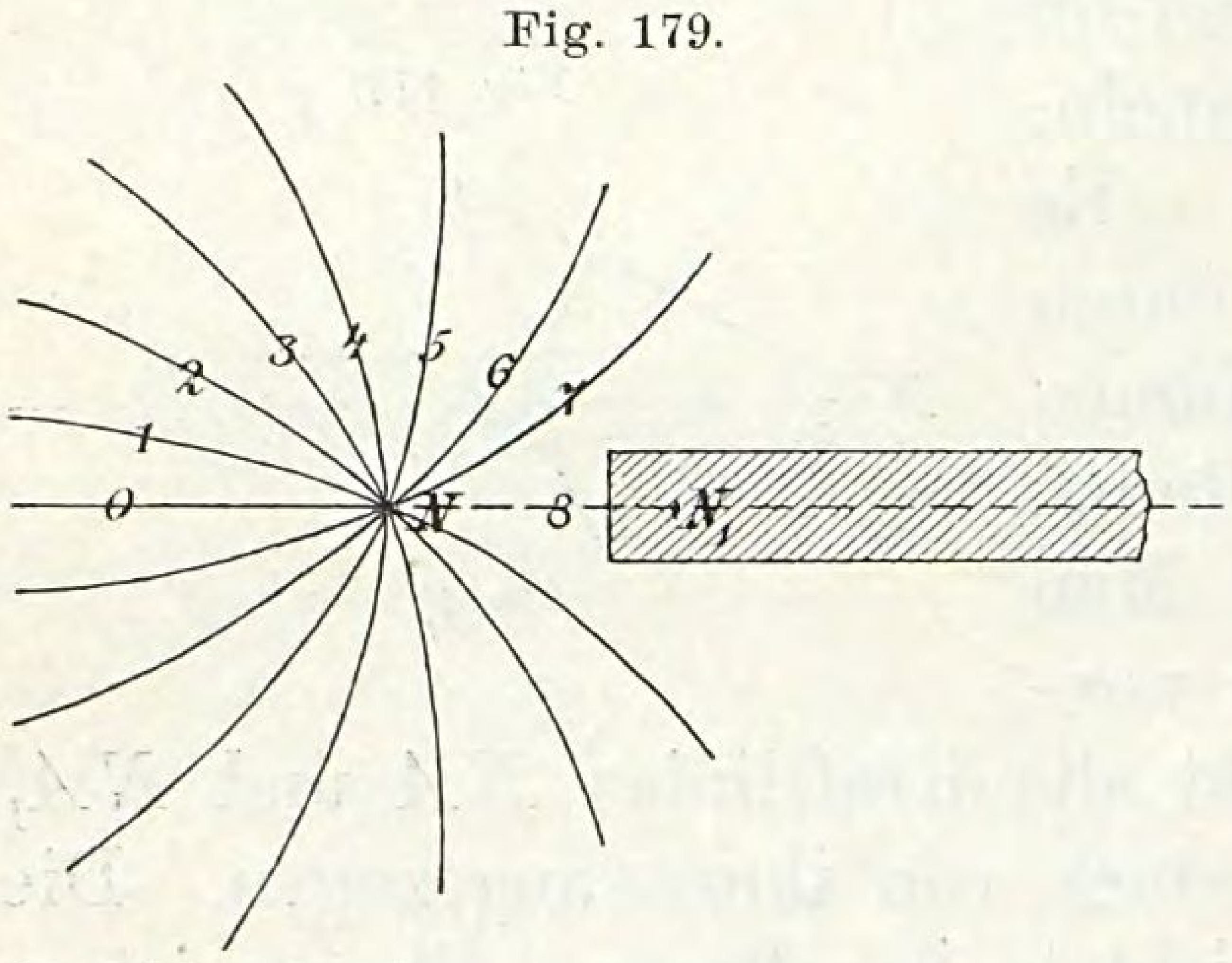
Denkt man sich die Pole punktförmig, so erhält man für die Kraftlinien Gestalten, wie sie in Fig. 76 und 77 veranschaulicht sind. In der Wirklichkeit nehmen sie etwa die in Fig. 178 skizzierte Form an. Normal gegen sie liegend sind die Niveauflächen des Potentials zu denken.

Eine hydrodynamische Analogie würde folgende sein. Man denke sich Wasser von N aus nach allen Richtungen strömend. An Stelle

des Eisens denke man sich einen Kanal, in dem die Strömung z. B. durch ein Schaufelrad mechanisch unterstützt wird. Dadurch wird mehr Wasser in den Kanal eingesaugt, als ohne diese Unterstützung, die Stromlinien also werden so abgelenkt, daſs sie sich nach S hin zusammendrängen, wodurch zugleich die Geschwindigkeit verstärkt wird. Ist nun das Rad an den Kanalwänden befestigt, so will die Reaktion diese Wände in entgegengesetzter Richtung vorwärts treiben, wie es beim Dampfschiffe geschieht.

b) Diamagnetismus. Man nehme als Beispiel Wismut. Dieses stöſst in der Luft, ebenso im luftleeren Raume, die Kraftlinien von sich ab und wird ebenso von den Kraftlinien abgestoſsen. Deutet man die Pfeile der Fig. 177 in entsprechender Weise um, so läſst sich der Vorgang mechanisch veranschaulichen. Das Wismut läſst also weniger Kraftlinien passieren, als die Luft oder der leere Raum. Denkt man sich die Pole als Punkte, so würden Figuren wie 72 und 75 maſsgebend werden. In der Wirklichkeit nehmen die Kraftlinien Gestalten an, wie sie in Fig. 179 skizziert sind. Die hydrodynamische Veranschaulichung geschieht durch ein Schaufelrad, welches der Strömung entgegenwirkt, so daſs mehr Wasser auſserhalb des Kanals strömen wird. Die Stromröhren werden also durch die Wirkung des Wismuts bei diesem erweitert, was einer Verlangsamung der Geschwindigkeit beim Wasser entspricht. Die Reaktion gegen das Schaufelrad würde die beweglich gedachten Kanalwände von N entfernen.

Fig. 179.



c) Spezifische Magnetisierungsintensität. Hat der genäherte Eisenstab die Länge l und wird er durch Induktion auf die Polstärke m gebracht, so erhält er das magnetische Moment ml. Auf die Raumeinheit kommt von dem Momentwerte ein Betrag, den man erhält, wenn man ml durch den körperlichen Inhalt $K = ql$ dividiert, wo q der Stabquerschnitt ist. Diesen Betrag

$$1) \qquad J = \frac{ml}{ql} = \frac{m}{q}$$

bezeichnet man als die spezifische Magnetisierungsintensität.

d) Aufnahmefähigkeit oder Susceptibilität. Die Magnetisierungsintensität J ist, wie der Versuch lehrt, proportional der Feld-

stärke. Zugleich ist sie abhängig vom Material des Stabes. Man kann demnach auch setzen

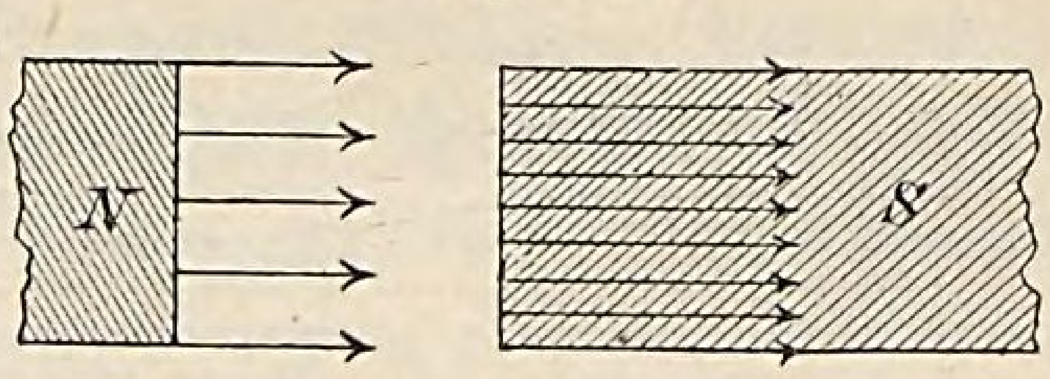
2) $$J = \varkappa F.$$

Hier bedeutet F die Feldstärke und $\varkappa$ eine jedem Material eigentümliche Konstante. Diese Konstante ist die der Aufnahmefähigkeit oder Susceptibilität des Materials.

e) Durchlafsfähigkeit oder Permeabilität. Der induzierte Stab läfst mehr bezw. weniger Kraftlinien durch, als der luftleere Raum. Dividiert man die erste Anzahl durch die zweite, so giebt der Bruch an, wieviel mal so grofs die Durchlafsfähigkeit des Materials ist, als die des leeren Raumes. Diese Zahl μ ist die Konstante der Durchlafsfähigkeit oder Permeabilität des Materials.

f) Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und μ. Um den Zusammenhang zwischen Susceptibilität und Permeabilität aufzuklären denke man sich das ursprüngliche Feld homogen und von der Feldstärke F, so dafs durch den Querschnitt q die Kraftröhren in der Anzahl qF passieren, durch die Flächeneinheit selbst in der Anzahl F. Auch das Feld im induzierten Material, z. B. im Eisen, betrachte man als homogen. Nach 1) ist die Polstärke $m = qJ$, die Zahl der Kraftlinien, die vom Pole ausgehen, ist also (nach Nr. 57) $4\pi m = 4\pi Jq$. Diese sind im homogenen Felde sämtlich als parallel anzunehmen. Mit diesen vom induzierten Magnetismus allein herrührenden Kraftlinien vereinigen sich (durch Superposition) die qF Kraftlinien des ursprünglichen Feldes, im ganzen handelt es sich um die Anzahl $qF + 4\pi Jq$, so dafs durch die Flächeneinheit

Fig. 180.



$$N = 4\pi J + F$$

Kraftlinien gehen. Dafür kann man nach 2) schreiben

$$N = 4\pi\varkappa F + F.$$

Die Konstante der Permeabilität wird also

$$\mu = \frac{N}{F} = \frac{4\pi\varkappa F + F}{F} = 4\pi\varkappa + 1.$$

Der Zusammenhang zwischen der Susceptibilitäts- und der Permeabilitätskonstante wird also gegeben durch die Gleichung

3) $\mu = 4\pi\varkappa + 1$ oder 3*) $\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}$.

Angenommen z. B. für Eisen von gewisser Weichheit sei $\varkappa = 200$, so würde sich ergeben

$$\mu = 4 \cdot \pi \cdot 200 + 1 = 2512.$$

In der That kann für weiches Eisen μ Werthe zwischen 2000 und 3000 annehmen. Bei dieser außerordentlichen Durchlaßfähigkeit erklärt sich die Schirmwirkung des Eisens ganz von selbst. Man versteht, wie nach Fig. 181 bei einem Hohlcylinder von weichem Eisen von den äußeren Kraftlinien kaum eine durch den inneren Hohlraum geht.

Fig. 181.

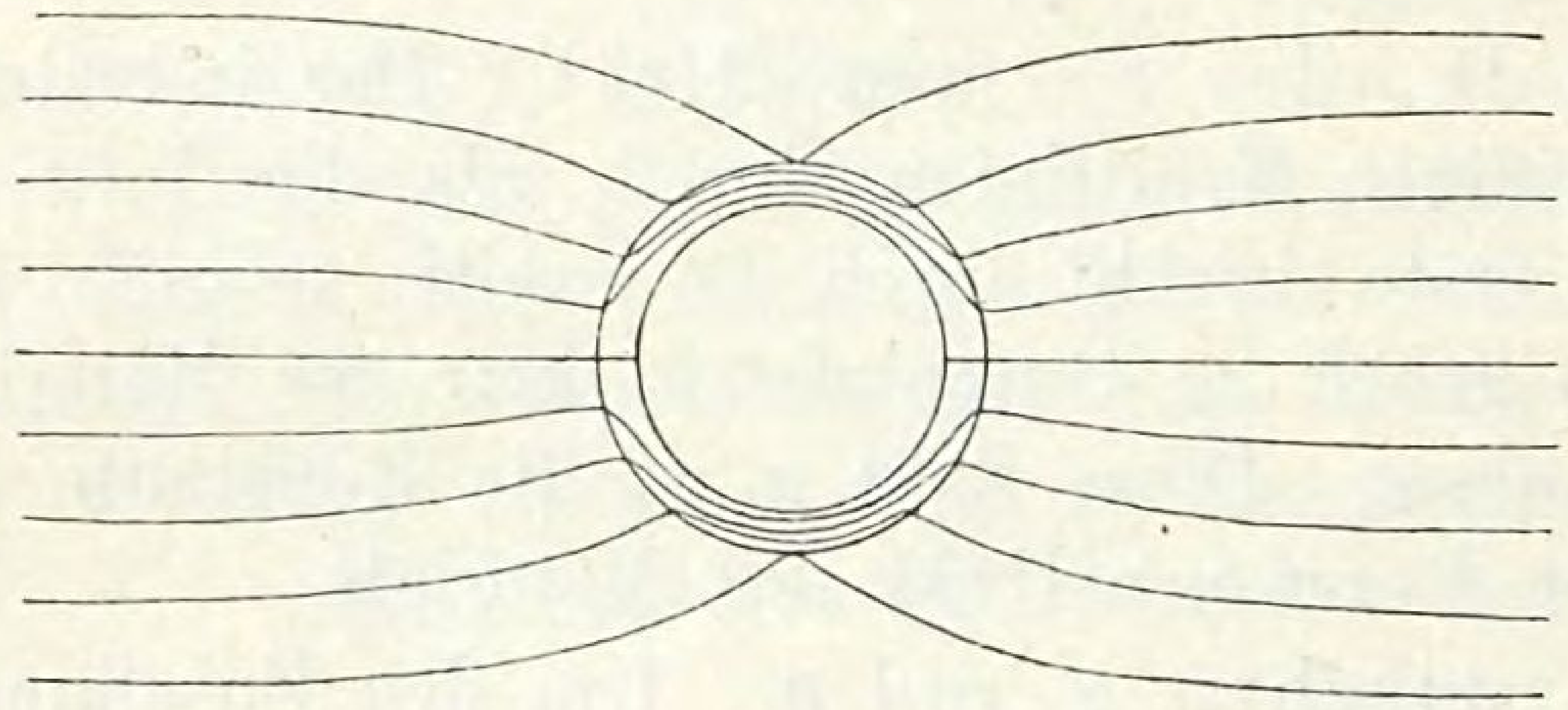


Fig. 182.

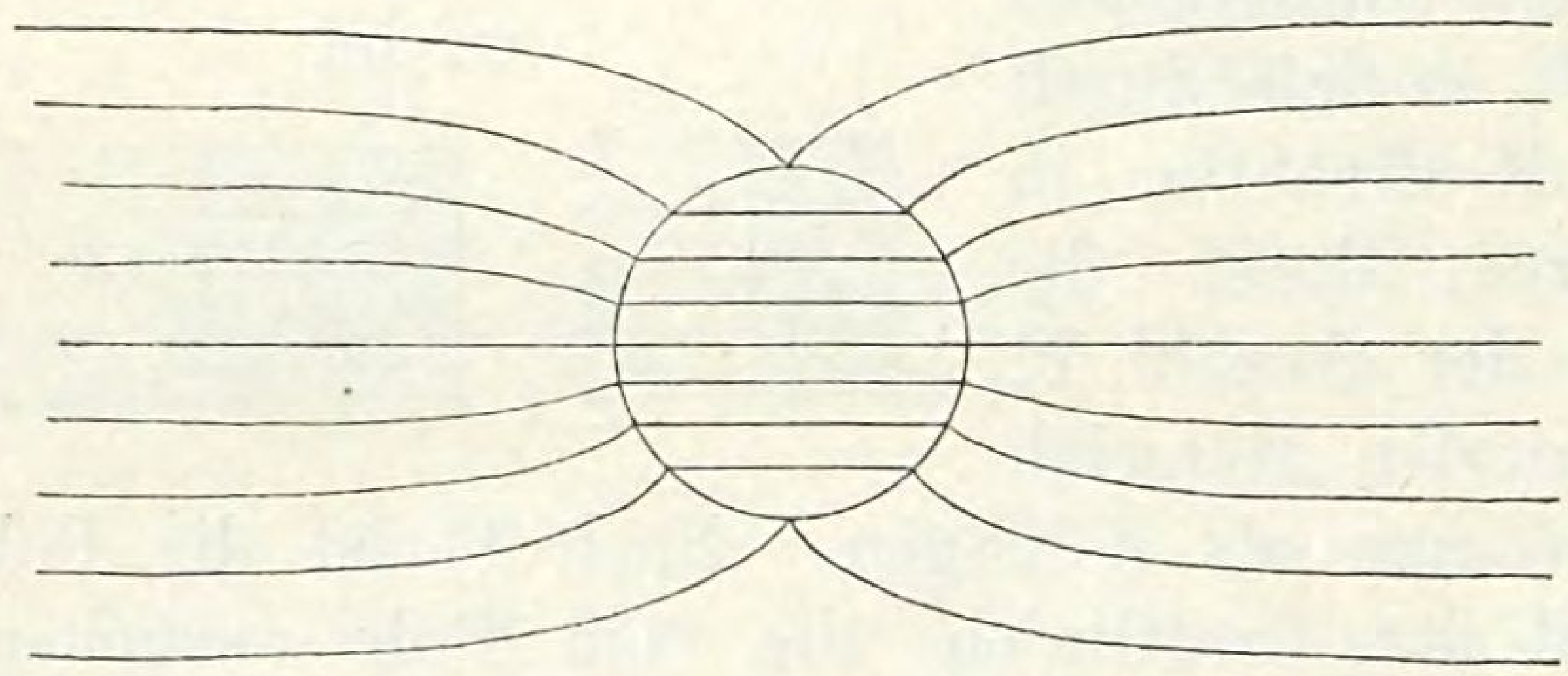
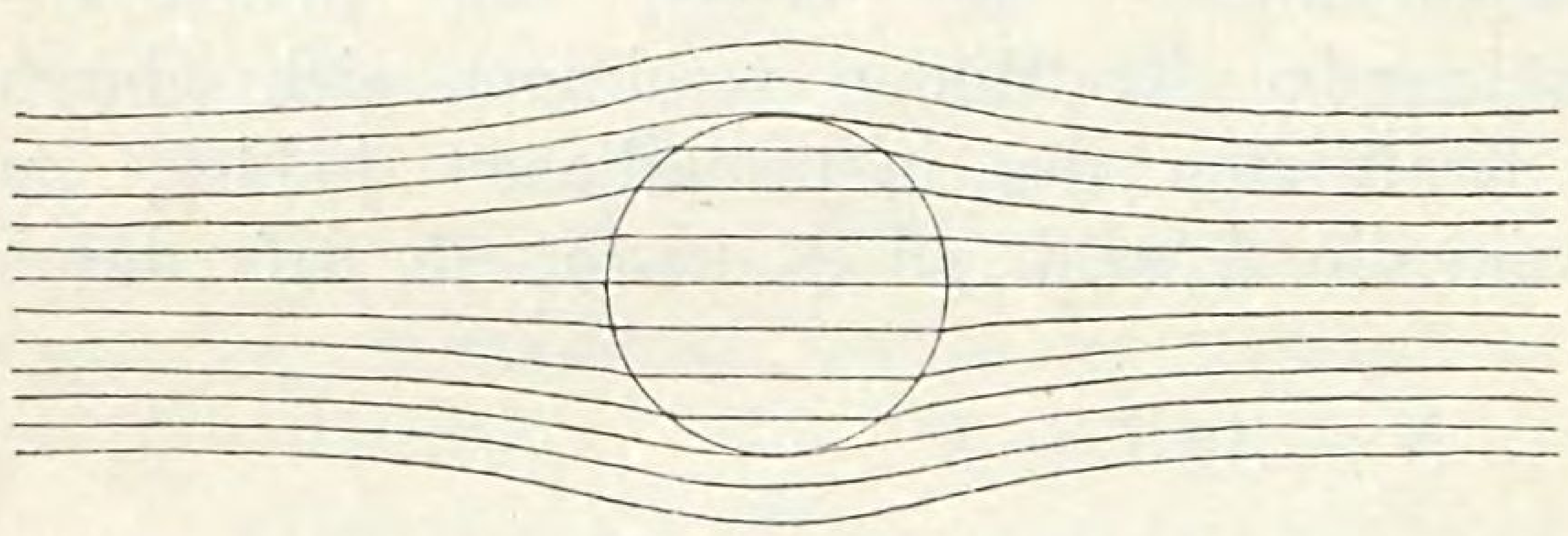


Fig. 183.



Bei massiven Cylindern würden sich für Para- und Diamagnetismus Figuren wie Nr. 182 und 183 ergeben, die sich selbst erläutern. Zu beiden vergleiche man Fig. 136.

Für paramagnetische Körper ist $\mu > 1$ also $\varkappa$ positiv, für diamagnetische ist $\mu < 1$ also $\varkappa$ negativ, für den leeren Raum ist $\mu = 1$, also $\varkappa = 0$.

Über die praktischen Anwendungen der Schirmwirkung vergleiche man die Lehrbücher.

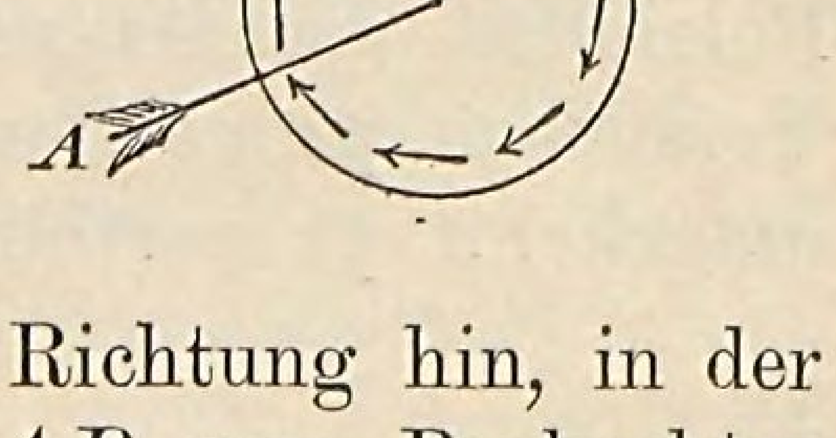
Kapitel XIII.

Elektromagnetische und elektrodynamische Wirkungen galvanischer Ströme.

247) Ablenkung der Magnetnadel durch Ströme. Im Jahre 1819 veröffentlichte Oerstedt die Beobachtung, dafs die magnetische Deklinationsnadel durch elektrische Ströme, besonders durch solche, die in der Ebene des magnetischen Meridians fliefsen, aus der Normallage abgelenkt werde. (Ursprung der elektrischen Telegraphie.) Ampère fafste die Art der Ablenkung in der sogenannten Schwimmregel zusammen, die in den Lehrbüchern erläutert ist. „Man denke sich einen Menschen in der Stromrichtung vorwärts schwimmend und das Gesicht dabei der Nadel zuwendend, dann wird der Nordpol nach links abgelenkt.“ In neuerer Zeit wendet man statt dessen die bequemere Rechthandregel an: „Man denke die rechte Hand so an den Stromleiter angelegt, dafs der Strom an den Fingerspitzen austritt, die Innenfläche der Hand aber der Nadel zugewendet wird, dann zeigt der ausgestreckte Daumen die Richtung an, in der der Nordpol abgelenkt wird.“ (Die entsprechende Linkhandregel für die Bewegung des beweglichen Stromleiters bei festgehaltenem Magnetstab bilde sich der Leser selbst.)

248) Kraftlinien und Niveauflächen langer geradliniger Ströme. Wird der Strom senkrecht durch eine horizontale Pappscheibe geführt, auf der sich Eisenfeilspäne befinden, so ordnen sich diese zu koncentrischen Kreisen an. Die Tangenten der Kreise geben die Einstellung der Magnetnadel an. Diese könnte in zweierlei Weise geschehen, regelt sich aber folgendermafsen: Das Nordende der Nadel zeigt nach der Richtung hin, in der sich der Uhrzeiger bewegt, sobald der Strom AB vom Beobachter

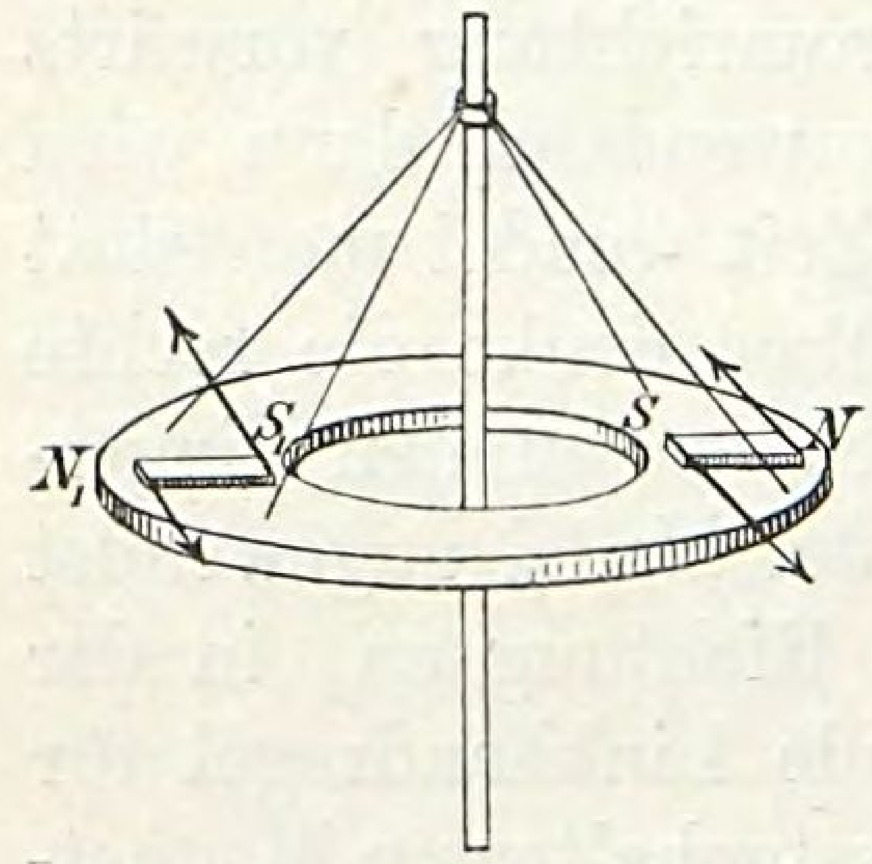
Fig. 184.



weg durch die Scheibe geht; es zeigt nach entgegengesetzter Richtung, sobald der Strom die Richtung BA einschlägt. Folglich:

Die Kraftlinien eines langen geradlinigen Stromes sind in jeder Normalebene koncentrische Kreise, die Niveauflächen bilden also ein durch den Draht gehendes Ebenenbüschel, im Normalschnitt selbst ein Strahlenbüschel. Für den Richtungssinn der Kraftlinien ist die Rechthandregel entscheidend. Da das Problem ein zweidimensionales ist, so kann es sich nur um die gleichwertige Einteilung der Normalebene in kleine Quadrate handeln, wie sie in Fig. 85 dargestellt ist. Die Dimensionen der Quadrate sind proportional dem Radius. Sind also w und w_1 die homologen Seiten zweier Quadrate, die in die Richtung der Kreistangenten fallen, so daſs sie die Kraftwege von Niveaufläche zu Niveaufläche bedeuten, so muſs nach Nr. 110 bezw. 112 $pw = p_1 w_1$ sein, oder $p : p_1 = w_1 : w$. Vergleicht man dies mit $w_1 : w = r_1 : r$, so folgt $p : p_1 = r_1 : r$, d. h. die ablenkenden Kräfte, die der Strom auf die Einheit des Nordmagnetismus ausübt, sind umgekehrt proportional dem Abstande vom Drahte. Das Diagramm der Kraft also müſste längs eines Radius auf eine gleichseitige Hyperbel führen. Ist dies alles richtig, so handelt es sich um das Vertauschungsproblem des zweidimensionalen Einpunktproblems.

Fig. 185.



Ein einfaches Experiment bestätigt die Vermutung. Fig. 185 stellt eine Scheibe dar, die am Stromleiter so aufgehängt ist, daſs sie sich um ihn als Achse drehen kann. Zwei Magnete sind radial aufgelegt, mit den Nordpolen z. B. nach auſsen, mit den Südpolen nach innen. Ist, wie vermutet, das Moment der einander unterstützenden Ablenkungen gleich Null, d. h. herrscht Gleichgewicht, so folgt, im Einklang mit dem Obigen, für das Moment der Ableitungskräfte in Bezug auf die beiden Pole jedes Magnets $pr + p_1 r_1 = 0$, d. h. absolut genommen $pr = p_1 r_1$. Die Vermutung ist richtig, da keine Drehung stattfindet. Wäre sie falsch, so würde ununterbrochene Drehung um den Strom als Achse erfolgen.

249) Die ablenkende Kraft und ihr Potential. Die auf die Poleinheit des Magnetismus ablenkend wirkende Kraft ist nach den Versuchen proportional der Intensität des Stromes und nach obigem umgekehrt proportional dem Abstande, sie ist also

1) $$p = \varkappa J \frac{1}{r},$$

wo $\varkappa$ eine Konstante ist. Die Kurven gleicher Intensität fallen mit den Kraftlinien zusammen, was bei dem Problem mehrerer Ströme nicht mehr der Fall sein wird. Die Gleichungen der Kraftlinien werden im Einklang mit dem früher behandelten Probleme (Nr. 112) in der Form

$$2)\qquad \varkappa J \lg r = c \quad \text{oder} \quad r = e^{\frac{c}{KJ}}$$

geschrieben, damit einer arithmetischen Reihe von Werten für c eine geometrische der Radien entspreche, wie es von der quadratischen Einteilung der Ebene verlangt wird.

Die Niveaulinien des Potentials erhalten die Gleichung

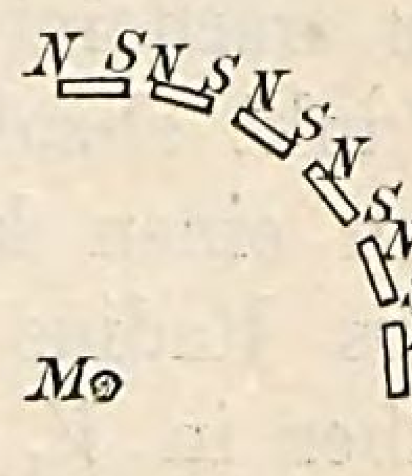
$$3)\qquad \varkappa J \vartheta = c \pm 2 n \pi \varkappa J \quad \text{oder} \quad \vartheta = \frac{c}{\varkappa J} \pm 2 n \pi,$$

denn der Wert von ϑ mufs bei einer Umdrehung um $2n\pi$ zu- oder abnehmen. Abgesehen von der Konstanten $\varkappa$ ist das Potential $V = J\vartheta \pm 2n\pi J$ zu setzen.

Setzt man $\varkappa J = 1$, so hat man einfacher die drei Gleichungen $p = \frac{1}{r}$, $\lg r = c$ oder $r = e^c$, $\vartheta = c \pm 2n\pi$, was den früheren entspricht, nur mit dem Unterschiede, dafs die Vertauschung der Kraft- und Niveaulinien vor sich gegangen ist.

250) Das magnetische Feld eines Stromes. Auch durch den elektrischen Strom wird das Feld des Dielektrikums in den Zwangszustand einer Polarisation versetzt und zwar ist diese eine magnetische. Denkt man sich das Feld als aus lauter Elementarmagneten bestehend, so richten sich diese im Sinne der Fig. 186 bei nach vorn gehendem Strome so ein, wie es dort dargestellt ist. Es entstehen also auch hier Zugspannungen in den Kraftlinien und Abstofsungen senkrecht dagegen. Diese Vorstellungsweise ist aber nur eine vorläufige und bedarf später der Verfeinerung.

Fig. 186.



Die Feldstärke ist nach obigem durch $F = p = \varkappa J \frac{1}{r}$ gegeben. Diese Polarisationswirkung des Stromes könnte man als die magnetomotorische bezeichnen. Angenommen, man könnte einen isolierten Nordpol in das Feld bringen, so würde dieser der vorhandenen Potentialdifferenzen wegen unaufhörlich um den Strom rotieren. Dies wird durch den dabei stets vorhandenen Südmagnetismus verhindert. Gelingt es jedoch, Apparate herzustellen, bei denen der Strom auf den Nord- und Südpol in demselben Sinne ablenkend wirkt, so kann man Drehungen erzielen, die dann eine ponderomotorische Wirkung des Stromes ergeben. Solche Apparate sind durch Faraday und

Ampère in verschiedenen Formen konstruiert worden. In allen Lehrbüchern der Physik werden sie ausführlich beschrieben, was hier nicht geschehen soll. Dasselbe gilt von solchen Vorrichtungen, bei denen der Stromleiter um den Magnet kreist.

Ist die Polstärke der gedrehten Magnete gleich m, und ist die Entfernung vom Drahte gleich r, so wirkt auf jeden Pol die Kraft

$$4) \qquad Fm = \varkappa J \frac{m}{r},$$

für die nach der Gefällformel

$$F = p = \frac{V_1 - V}{w} = \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{kleiner Weg in der Kraftlinie}}$$

auch geschrieben werden kann

$$5) \qquad Fm = \varkappa m \frac{J(\vartheta_1 - \vartheta)}{w}.$$

Der Übergang von Gleichung 4) zu 5) kann jedoch, wie sofort gezeigt wird, auch selbständig geschehen.

251) Vergleich des Stromes mit einem magnetischen Blatte. In Nr. 245 war gezeigt, dafs ein einseitiges, begrenztes, magnetisches Doppelblatt dasselbe Feld hat, wie der hier behandelte Strom. Dort hatte sich ergeben $V = 2\,\Phi\,(\pi - \psi)$, wenn die Winkel in Bogengröfsen am Einheitskreis gemessen wurden. Hier war $\Phi = d \cdot \delta$, wo d die Dicke des Blattes, δ die Dichte der magnetischen Belegung war, $\pi - \psi$ dagegen der Winkel bezw. Bogen, unter dem es erscheint. Um aus dem Potential die Feldstärke für irgend einen Punkt abzuleiten, bewege man diesen auf der kreisförmigen Kraftlinie um einen kleinen Bogen $w = r\gamma$, wo γ die kleine Winkeländerung des Radius bedeutet. Dabei geht das Potential $V = 2\,\Phi\,(\pi - \psi)$ über in $V_1 = 2\,\Phi\,(\pi - \psi - \gamma)$, so dafs die Potentialdifferenz

$$V - V_1 = 2\,\Phi\,[(\pi - \psi) - (\pi - \psi - \gamma)] = 2\,\Phi\gamma$$

wird. Die Feldstärke ergiebt sich demnach als

$$\frac{V - V_1}{w} = \frac{2\,\Phi\gamma}{r\gamma} = \frac{2\,\Phi}{r}.$$

Soll nun das Blatt mit dem Strome dieselbe Feldstärke haben, so hat man zu setzen

$$\frac{2\,\Phi}{r} = \frac{\varkappa J}{r},$$

d. h. es mufs sein

$$\Phi = \frac{\varkappa J}{2}, \quad \text{oder} \quad d\delta = \frac{\varkappa J}{2}.$$

Die Konstante $\varkappa$ hängt von der Wahl der Stromstärke ab, während die Dichte δ in magnetischen Einheiten gemessen war. Zwischen beiden Einheiten besteht also ein gewisser Zusammenhang. Berücksichtigt man diesen nicht, sondern wählt man die elektromagnetische Einheit der Stromstärke willkürlich, so wird in einem neuen Maſse gemessen, dessen Einheit die des elektromagnetischen Maſssystems ist. Wählt man die neue Einheit so, daſs $\Phi = J$ wird, so ist $\frac{\varkappa}{2} = 1$, also $\varkappa = 2$ zu setzen. Unten wird darüber ausführlicher gesprochen. Hier sollte zunächst nur der Zusammenhang beider Maſssysteme angedeutet werden. Dort wird sich auch zeigen, daſs die Analogie mit dem magnetischen Blatte eine noch viel weiter gehende ist.

252) **Allgemeine Folgerungen.** Jedem zweidimensionalen Mehrpunktsprobleme entspricht als Vertauschungsproblem ein solches für parallele geradlinige Stromleiter, jedem zweidimensionalen Linienproblem ein solches für parallele leitende Bänder.

Sämtliche schon behandelten Mehrpunktprobleme erhalten somit eine neue elektromagnetische Deutung. Des Verfassers „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ bietet auf jeder Figurentafel Beispiele über beide Arten von Problemen.

Die Gleichungen für Punktprobleme lauteten für die Niveaulinien und Kraftlinien nach Nr. 113

$$m_1 \lg r_1 + m_2 \lg r_2 + \cdots + m_n \lg r_n = c,$$

$$m_1 \vartheta_1 + m_2 \vartheta_2 + \cdots + m_n \vartheta_n = c.$$

Sie gehen hier, wo $\varkappa = 1$ gesetzt werden möge, über in

$$J_1 \vartheta_1 + J_2 \vartheta_2 + \cdots + J_n \vartheta_n = c$$

für die Niveaulinien des Potentials, und in

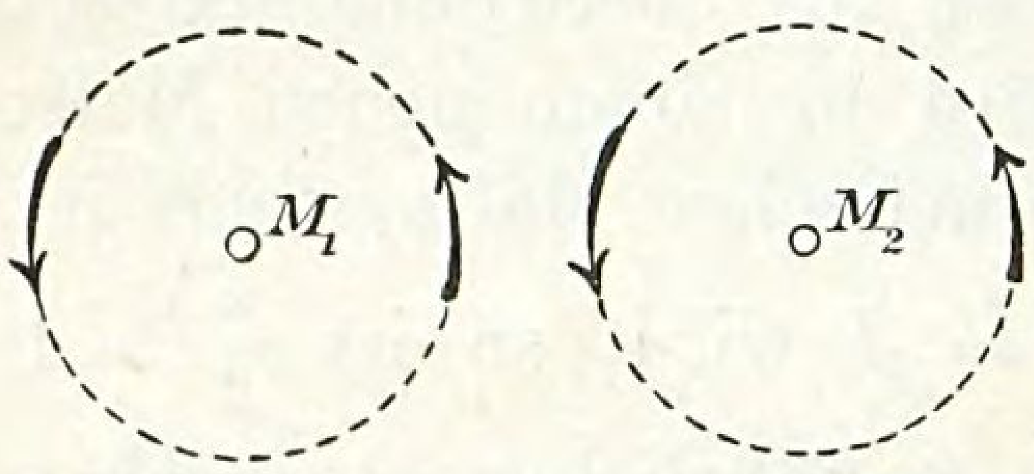
$$J_1 \lg r_1 + J_2 \lg r_2 + \cdots + J_n \lg r_n = c$$

für die Kraftlinien, wobei die Vertauschung berücksichtigt ist. Die Konstruktion mit Hilfe der quadratischen Einteilungen durch Strahlenbüschel und Kreisscharen erfolgt genau so, wie früher, durch das Ziehen der Diagonalkurven der entstehenden Maschennetze, von denen die eine Gruppe der Addition die andere der Subtraktion der Felder, (bei entgegengesetzten Strömen) entspricht. Neues ergiebt sich also nicht. Trotzdem sollen einige instruktive Beispiele gegeben werden.

253) Parallele Drähte mit gleich gerichteten gleich starken Strömen. Maſsgebend wird Fig. 125, d. h. die Niveaulinien

bilden ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln $\vartheta_1 + \vartheta_2 = c$, die Kraftlinien eine Schar konfokaler Lemniskaten zweiter Ordnung $\lg r_1 + \lg r_2 = c$ oder $r_1 r_2 = e^c$. Sind M_1 und M_2 die Drähte mit den ursprünglich kreisförmigen Kraftlinien, so sind die benachbarten der beiden Systeme entgegengesetzt gerichtet, ziehen also einander an. Demnach ist zu erwarten, daſs auch die Stromleiter sich anzuziehen scheinen, während eigentlich das elektromagnetisch polarisierte Mittel arbeitet. Das Experiment bestätigt den Satz:

Fig. 187.



Gleichgerichtete Ströme ziehen einander an.

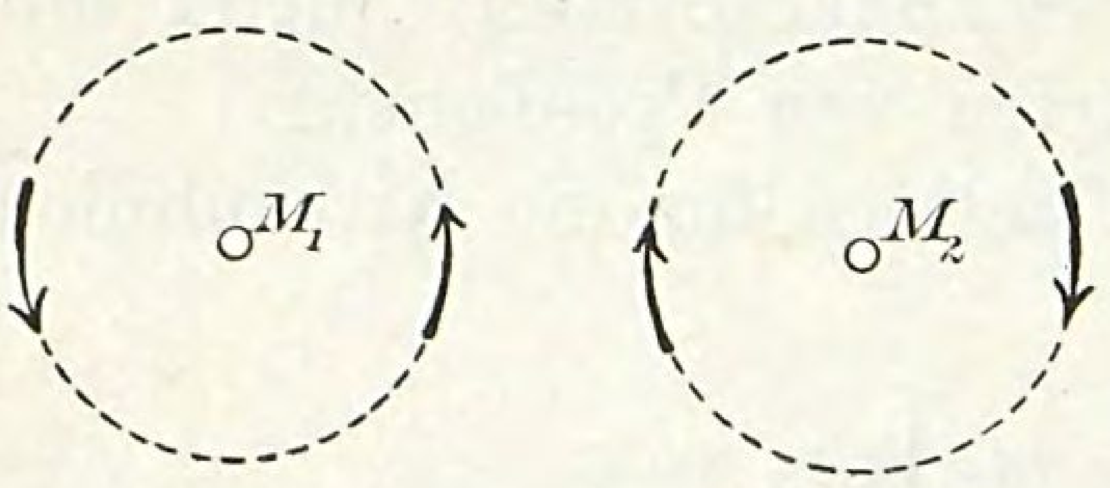
254) Parallele Drähte mit entgegengesetzten Strömen von gleicher Stärke. Hier ist Fig. 127 zu vergleichen. Die Niveaulinien des Potentials werden die Kreise des entsprechenden Kreisbüschels

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = c,$$

Die Kraftlinien bilden die orthogonale Kreisschar von der Gleichung

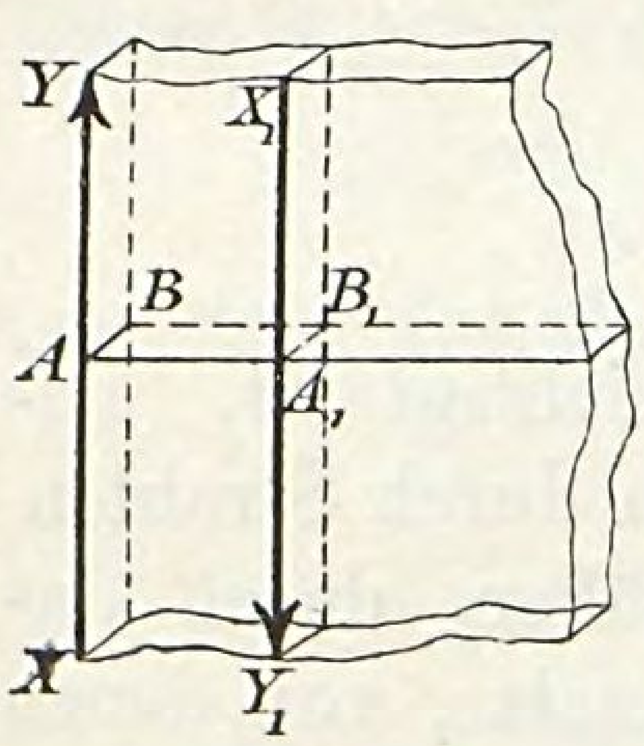
$$\lg r_1 - \lg r_2 = c \quad \text{oder} \quad \frac{r_1}{r_2} = e^c.$$

Fig. 188.



Nach Fig. 188 sind die benachbarten Kraftlinien von M_1 und M_2, die ursprünglich koncentrischen Kreisscharen angehören, gleich gerichtet, stoſsen also einander ab. Es steht zu vermuten, daſs diese Abstoſsung sich auf die Stromleiter überträgt und sichtbar wird, wenn diese beweglich sind. Das Experiment bestätigt dies, also gilt der Satz:

Fig. 189.



Entgegengesetzt gerichtete Ströme stoſsen einander ab.

Dieses gegenseitige Anziehen und Abstoſsen paralleler Ströme gehört schon zu den elektrodynamischen Wirkungen von Strom auf Strom.

Dieses Problem gewährt einen weiteren Einblick in die Theorie des magnetischen Blattes. Die Wirkung jedes Stromes kann durch ein einseitig begrenztes magnetisches Doppelblatt ersetzt werden, da aber die Stromrichtungen entgegengesetzt sind, haben die Doppelblätter beider Ströme entgegengesetzte Belegungen, d. h. die Wirkungen heben einander auf, soweit die Doppelblätter auſserhalb des zwischen XY und $X_1 Y_1$ liegenden unendlichen Streifens liegen, wo bloſs das Doppelblatt des einen übrig bleibt. Folglich:

Gleich starke entgegengesetzt gerichtete Ströme wirken wie ein zwischen beiden liegendes Doppelblatt von der Stärke

$$\Phi = \frac{\varkappa J}{2}.$$

Ihr Potential für einen Punkt P ist daher proportional dem Winkel, unter dem der Flächenstreifen von P aus gesehen wird.

Denkt man sich oben und unten in sehr grofser Entfernung die Ströme verbunden, so dafs sie einen einzigen Strom bilden, der in sich geschlossen ist (Stromkreis), so kann man sagen, die Wirkung dieses ebenen Stromkreises sei gleich der des von ihm umflossenen Doppelblattes von der Stärke $\Phi = \frac{\varkappa J}{2}$.

Das Problem ist ein zweidimensionales. Führt man den Normalschnitt AA_1B_1B, so hat man eine Doppelgerade, die entgegengesetzt wirkende Belegungen hat. Folglich:

Wird eine begrenzte Gerade AB auf der einen Seite mit nordmagnetischer, auf der andern mit südmagnetischer Belegung versehen, so sind die Kreise des durch die Endpunkte gehenden Kreisbüschels die Niveaulinien des Problems, während die Kreise der Orthogonalschar die Kraftlinien sind.

Auf diese Art magnetischer Doppelblätter kommt die Betrachtung noch einmal zurück. Vorher sollen noch einige andere Beispiele über parallele Drähte behandelt werden.

255) Andere Beispiele. Fig. 129 stellt das Problem von vier parallelen Strömen in parallelogrammförmiger Anordnung dar. Das eine diagonal liegende Paar ist in der einen, das andere in der entgegengesetzten Richtung durchflossen.

Fig. 130 behandelt sechs Drähte, von denen je drei in der einen bezw. entgegengesetzten Richtung durchflossen werden. Die Figur erläutert sich selbst.*)

Fig. 131 giebt das elektromagnetische Feld für ein stromdurchflossenes Band von sehr grofser Breite in der Nähe seiner Begrenzung. Die Strömung wird dabei als so erfolgend vorausgesetzt, wie es der dort behandelten elektrostatischen Verteilung entspricht. Beide Kurvengruppen sind konfokale Parabeln.

Fig. 134 stellt die Störung eines homogenen Feldes durch eine geradlinige Reihe von Strömen dar (Drahtgitter), wobei jedoch nur

*) In solchen Fällen kann man je zwei entgegengesetzte gleich starke Ströme durch das zwischen beiden liegende Doppelblatt ersetzen, wobei sich aus dem Normalschnitt Sätze über zweidimensionale Probleme ergeben, bei denen es sich um Doppelgerade handelt, die entgegengesetzte homogene Belegungen haben.

einer der Streifen gezeichnet ist. Jeder Einzelstrom absorbiert im Beispiele die Strömung seines Streifens vollkommen.

In Fig. 135 handelt es sich um drei gleich starke Drahtströme, von denen der mittlere entgegengesetzte Richtung hat, wie die beiden anderen.

An Fig. 136 erkennt man, wie ein homogenes Feld durch zwei dicht nebeneinander liegende Parallelströme von entgegengesetzter Richtung gestört wird. Zwei Deutungen sind möglich, je nachdem man die Strömung des Feldes als horizontal oder als vertikal betrachtet, wobei die Verbindungslinie der Drähte entgegengesetzt zu drehen ist und in die Strömungsachse fallen muſs.

Fig. 137 stellt dasselbe dar, jedoch steht die Verbindungslinie der Drähte um 90^0 geneigt gegen die Stromrichtung.

In Fig. 140 handelt es sich um die Strömung in einem elektrischen Bande und die elektromagnetische Polarisation der Umgebung.

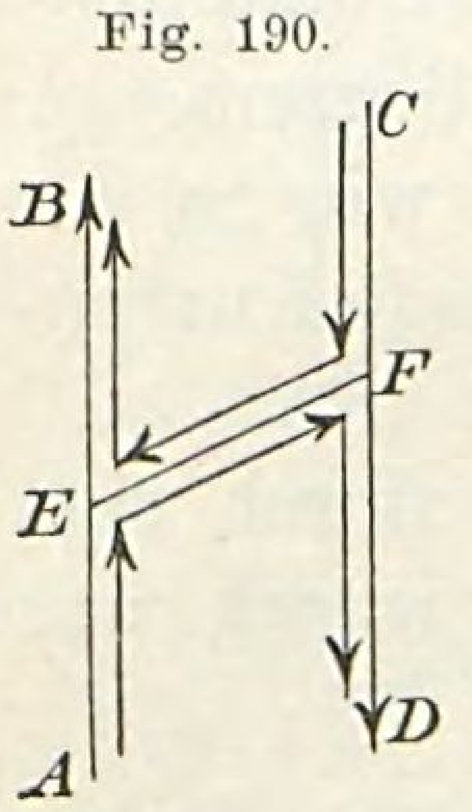
Auch Fig. 141 läſst eine entsprechende Deutung für Bandströmungen zu.

Bei den Punktproblemen kann man auch die bandförmigen Strömungen untersuchen, die den Vertauschungsproblemen entsprechen.

Die genannten Beispiele, die ins Endlose vermehrt werden können, werden von der Art und Weise der elektromagnetischen Polarisation in der Umgebung von Strömen ein hinreichendes Bild geben. In der „Theorie der isogonalen Verwandtschaften“ findet der vorgeschrittene Leser auch die wichtigsten der mit den elliptischen Funktionen zusammenhängenden Fälle.

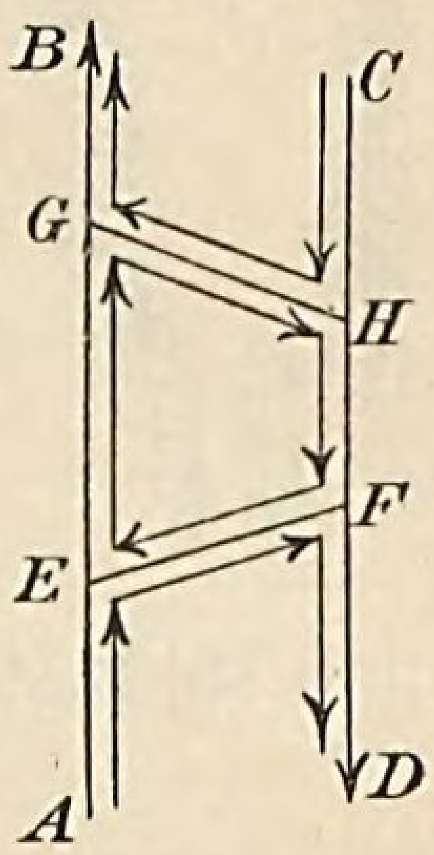
256) Übergang zu geschlossenen Stromkreisen. AB und CD seien gleichgerichtete Ströme von derselben Intensität J. Nach Nr. 251 können sie durch das von ihnen umgrenzte magnetische Doppelblatt von Stärke $\Phi = \frac{1}{2} \varkappa J$ ersetzt werden. Bringt man nun eine verbindende Doppelgerade EF dazu, welche entgegengesetzte Ströme von derselben Intensität leitet, so heben sich die Wirkungen dieser Hilfsströme für jeden Raumpunkt auf, und auch das Gesamtpotential V für jeden Punkt des Raumes bleibt ungeändert. Die den Strömen EF und FE entsprechenden magnetischen Doppelblätter erhalten die Dichtigkeit $\delta + (-\delta) = 0$, sind also als nicht vorhanden zu betrachten. Folglich: Die beiden Ströme $AEFD$ und $CFEB$ wirken wie die ursprünglichen Ströme AB und CD und wie das zugehörige Doppelblatt. Wird nun das eine Doppelblatt von P aus unter dem körperlichen Winkel φ_1 gesehen, das andere unter φ_2, so

Fig. 190.



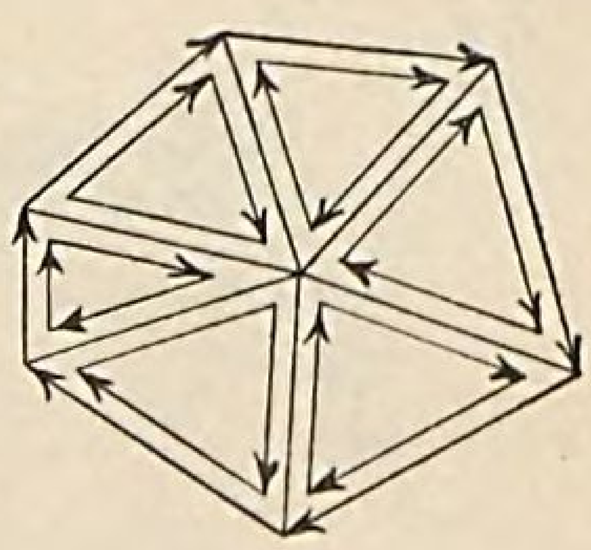
zerlegt sich das Anfangspotential V in zwei Teile $V_1 = V \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}$ und $V_2 = V \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$, die sich also wie die zugehörigen körperlichen Winkel verhalten. Da nun, wie auch die Gerade EF gelegt werde, die Potentialsumme für die beiden Ströme gleich der der beiden Doppelschalen ist, so bleibt nur der Schlufs übrig, dafs auch die Einzelpotentiale übereinstimmen, so dafs z. B. das Potential des Stromes $AEFD$ für jeden Punkt des Raumes gleich dem der entsprechenden Doppelschale ist. Folglich ist das Potential des Stromes $AEFD$ ebenso wie das der Doppelschale proportional dem körperlichen Winkel, unter dem der Strom gesehen wird.

Fig. 191.



Führt man noch einen zweiten Schnitt GH in der Weise, dafs ein geschlossener Strom $EGHF$ von Vierecksgestalt entsteht, so kann man dessen Wirkung gleich der Differenz der Wirkung der Blätter $AGHD$ und $AEFD$ setzen. Die betreffenden Schlüsse bleiben bestehen. Fallen H und F zusammen, so ist auch das Dreieck erledigt.

Fig. 192.



Ein Blick auf Fig. 192 zeigt, dafs jedes stromumflossene Polygon in Dreiecke zerlegt werden kann. Folglich gilt zunächst von ebenen Flächen, die von einem Strom umflossen werden, der Satz:

Die Wirkung eines Stromkreises kann ersetzt werden durch die eines magnetischen Doppelblattes von der Stärke $\Phi = \frac{1}{2} \varkappa J$, welches vom Stromkreise umgrenzt ist. Das Potential des Stromes wie die des Blattes für jeden Raumpunkt P ist gleich $\Phi\varphi$ oder $\frac{1}{2} \varkappa J \varphi$, wo φ den körperlichen Winkel bedeutet, unter dem die Stromkreisfläche von P aus gesehen wird.

Liegt P in der Ebene des Stromkreises, d. h. im Blatte selbst, so erscheint dieses unter dem körperlichen Winkel $\varphi = \frac{4 \cdot 1^2 \cdot \pi}{2} = \pm 2\pi$. Das Potential ist also für jeden Punkt der umspannten Fläche gleich $\frac{1}{2} \varkappa J 2\pi = \pm \varkappa \pi J$. Die Gleichung $\frac{\varkappa}{2} J \varphi = c$ giebt die Gleichung der Niveauflächen, zu denen auch die Ebene selbst gehört. Dafs das Potential in der Ebene selbst zweideutig genannt ist, reicht nicht aus, es ist sogar unendlichdeutig. Angenommen, es habe den Wert $\varkappa \pi J$; macht man dann um einen der Drähte einen Umgang im Sinne des wachsenden Potentials, so geht man über zu $\varkappa \pi J + 2\pi \varkappa J$, während, der entgegengesetzte Gang auf $\varkappa \pi J - 2\pi \varkappa J = - \varkappa \pi J$ führt. Das Potential hat also dort den Wert $\varkappa \pi J \pm 2 n \varkappa J$, wo n eine beliebige

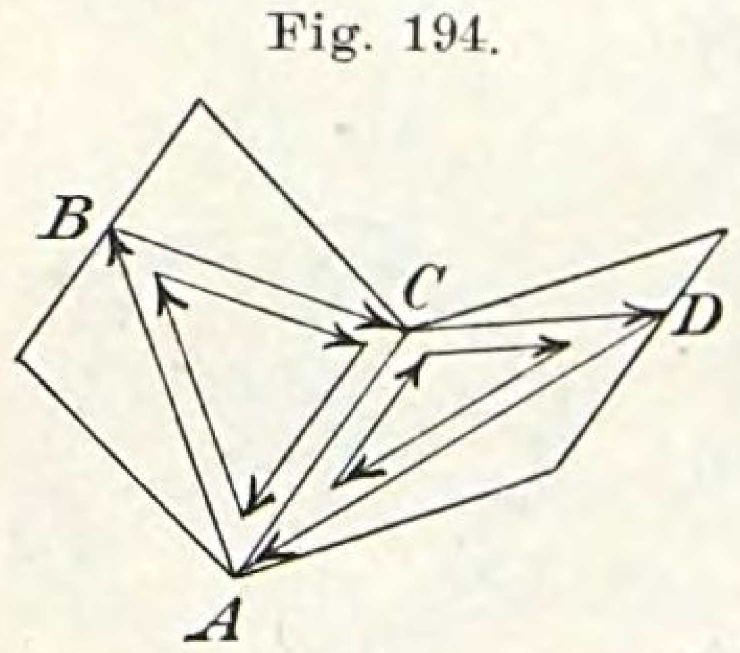
ganze Zahl ist. Dies gilt nun von jedem Raumpunkte. Diese Periodizität bezw. Vieldeutigkeit hat ihren Grund in der des Winkels $\vartheta + 2n\pi$ für einen Draht, kann also nicht überraschen. Von diesem Zusatz $2n\pi$ soll künftig abgesehen werden. Für die Fortsetzung der Blattebene ist aus Symmetriegründen das Potential gleich Null. Diese reicht bis ins Unendliche, wo aber ebenfalls der Potentialwert gleich Null ist. Der Ausdruck $\varkappa\pi J$ bedeutet also die Arbeit, die nötig ist, die nordmagnetische Einheit aus dem unendlichen Bereich bis in die Ebene des eigentlichen Blattes zu führen. Dies Arbeit ist positiv auf der Seite der Nordbelegung, negativ auf der Seite der Südbelegung des Blattes.

Fig. 193.



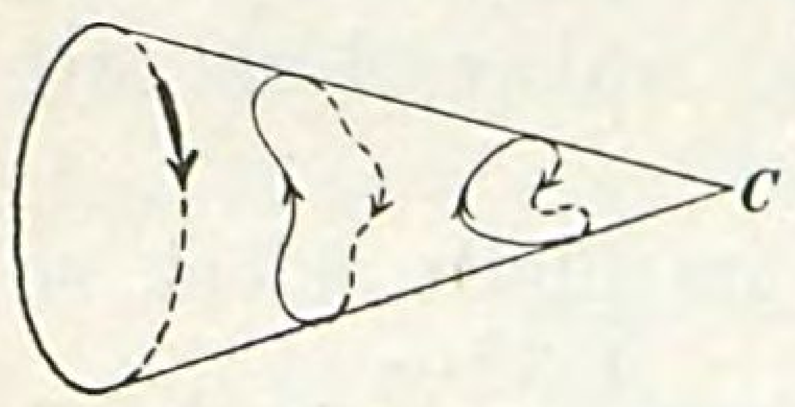
257) Nichtebene Stromkreise. Ist das Stromviereck ein windschiefes, so läfst sich ebenfalls die Zerlegung in zwei Dreiecke durchführen, die aber nicht mehr in dieselbe Ebene fallen. Der Potentialsatz gilt für jedes einzelne Dreieck, also auch für die Summe beider Blätter, denn auch die körperlichen Winkel φ_1 und φ_2 werden algebraisch addiert. Ganz ebenso ist es, wenn das Polygon von sehr vielen Seiten auf einer beliebigen krummen Fläche liegt, die nun als Blatt behandelt werden kann. Stets ist das Potential des Stromes gleich $\frac{1}{2}\varkappa J\varphi$, wo φ der körperliche Winkel ist, unter dem das Blatt erscheint.

Fig. 194.



Die Flächen $V = 0$ bezw. $V = \varkappa\pi J$ brauchen nun nicht mehr mit der Blattfläche und ihrer Erweiterung zusammenzufallen, auch sind sie keine Ebenen mehr. Sie gehören der Gruppe $V = c$ an. Ohne weiteres ist klar, dafs sämtliche geschlossene Ströme, die einen allgemeinen Kegel mit Spitze C bei beliebiger Gestalt in seiner Fläche umkreisen, in Bezug auf die Spitze dasselbe Potential $\frac{1}{2}\varkappa F\varphi$ haben, sobald die Intensität J für alle dieselbe ist.

Fig. 195.



258) **Aufgabe.** Das Potential und die hereinziehende Kraft eines Kreisstroms von der Intensität J für einen beliebigen Punkt c seiner Normalachse zu berechnen.

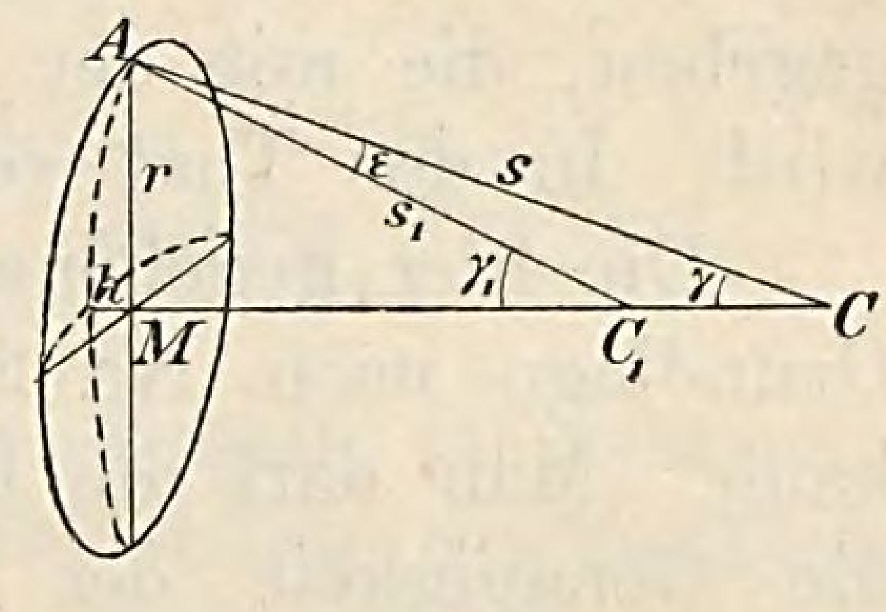
Auflösung. a) Man denke sich das magnetische Doppelblatt in Gestalt der durch den Kreis gelegten Kalotte, deren Mittelpunkt C ist. Nach Nr. 44 wird diese, wenn Winkel $ACM = \gamma$ ist, von C aus

unter dem körperlichen Winkel $\varphi = 4 \cdot 1^2 \pi \frac{\text{Kalotte}}{\text{Kugelfläche}} = 4\pi \frac{2 s \pi h}{4 s^2 \pi}$ $= \frac{2\pi h}{s}$ gesehen, wo h die Pfeilhöhe der Kalotte, also $h = s - s \cos\gamma$ ist. Daraus folgt $\varphi = 2\pi(1 - \cos\gamma)$. Das Potential im Punkte C ist also

$$V = \tfrac{1}{2} \varkappa J 2\pi (1 - \cos\gamma) = \pi \varkappa J (1 - \cos\gamma).$$

b) Um die ablenkende Kraft für die Poleinheit in C zu berechnen, die senkrecht gegen die Ebene ACM wirkt (wie auch der Versuch zeigt), benutze man die Gefälleformel

Fig. 196.



$$p = \frac{V - V_1}{w},$$

wo w ein kleiner Weg CC_1 ist. Man erhält

$$p = \pi \varkappa J \frac{(1 - \cos\gamma) - (1 - \cos\gamma_1)}{CC_1} = \pi \varkappa J \frac{\cos\gamma_1 - \cos\gamma}{CC_1}.$$

Hier ist

$$\cos\gamma_1 - \cos\gamma = -2 \sin\frac{\gamma_1 + \gamma}{2} \sin\frac{\gamma_1 - \gamma}{2}$$

$$= -2\sin\left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\frac{\varepsilon}{2} = -2\left[\sin\gamma \cos\frac{\varepsilon}{2} + \cos\gamma \sin\frac{\varepsilon}{2}\right] \sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$$= -2\left[\sin\gamma \cos\frac{\varepsilon}{2} \sin\frac{\varepsilon}{2} + \cos\gamma \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Hier kann $\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$ als unendlich klein zweiter Ordnung gleich Null gesetzt werden. Es bleibt stehen $-2\sin\gamma \cdot \frac{1}{2}\sin\varepsilon = -\sin\gamma \cdot \sin\varepsilon$. Nun ist nach dem Sinus-Satze $\sin\varepsilon = \frac{CC_1}{s_1} \cdot \sin\gamma = \frac{CC_1}{s_1} \cdot \frac{r}{s}$, also ist $\sin\gamma \cdot \sin\varepsilon = \frac{r}{s} \cdot \frac{CC_1}{s_1} \cdot \frac{r}{s} = \frac{r^2 CC_1}{s^2 \cdot s_1}$, also abgesehen vom Vorzeichen

$$p = \pi \varkappa J \cdot \frac{r^2 CC_1}{s^2 \cdot s_1} \cdot \frac{1}{CC_1} = \frac{r^2 \pi \varkappa J}{s^2 s_1}.$$

Für unendlich kleines CC_1 ist $s_1 = s$ zu setzen, die ablenkende Kraft wird also

$$p = \frac{r^2 \pi \varkappa J}{s^3} = \frac{F \cdot \varkappa J}{s^3},$$

die Kraft für Punkte der Achse ist also proportional der Kreisfläche des Stroms und umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von den Stromteilchen. (Dieses Resultat hat noch allgemeinere Geltung und ist von Wichtigkeit geworden für die Theorie der hydrodynamischen Wirbelringe.)

Für den Punkt M folgt $p = \frac{r^2 \pi \varkappa J}{r^3} = \frac{\pi \varkappa J}{r}$ als anziehende Kraft, während das Potential dort gleich $\varkappa \pi J$ war.

Laplace hat aus den Beobachtungen von Biot und Savart, also auf rein experimenteller Grundlage, das sogenannte Biot-Savartsche Gesetz abgeleitet und ihm die Form

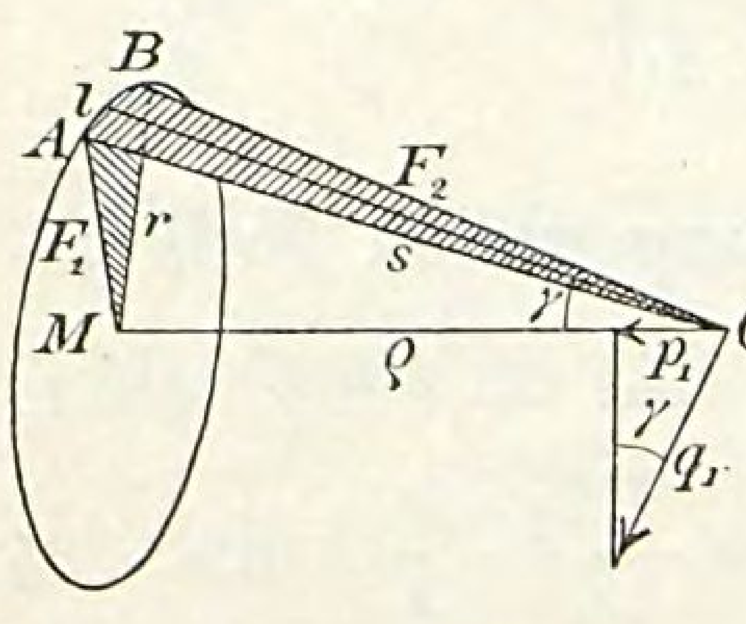
$$p = \frac{2 F \varkappa_1 J}{s^3} = \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3}$$

gegeben, die mit der obigen übereinstimmt, sobald $2 \varkappa_1 = \varkappa$ gesetzt wird. In der That verhalten sich die beiden Konstanten wie $1 : 2$.

Die hier gegebene Entwickelung ist eine rein theoretische, deren Grundlage nach Nr. 240 sehr leicht experimentell geprüft werden kann. Man darf die Übereinstimmung als einen schönen Beweis für die Genauigkeit der französischen Forschungen ansehen. Selbstverständlich kann man auch von der Biot-Savartschen Formel ausgehen und das in Nr. 248 entwickelte Grundgesetz aus ihr ableiten. Dies soll nur in einer Anmerkung geschehen.

259) Erläuterungen zum Biot-Savartschen Gesetz. a) Der ganze Kreisstrom giebt die auf den Einheitspol wirkende Kraft

Fig. 197.



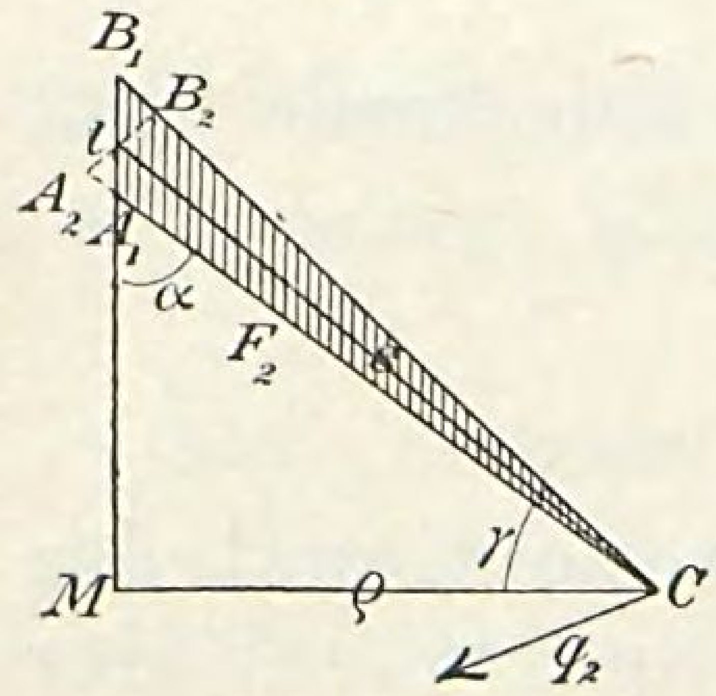
1) $$p = \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3}.$$

Ist l der n^{te} Teil des Stromweges, so ist der Anteil

$$p = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 r^2 \pi \varkappa_1 J}{s^3} = \frac{2 F_1 \varkappa_1 J}{s^3},$$

wo F_1 der zu l gehörige Sektor ist. Die von l ausgehende Kraft q_1 liegt aber in der Vertikalebene, nämlich senkrecht zur Fläche ABC, p_1 ist nur die Projektion von q_1 auf CM, also ist $q_1 = \frac{2 F_1 \varkappa_1 J}{s^3} \cdot \frac{1}{\sin \gamma}$, oder da in Fig. 197 $F_2 = \frac{F_1}{\sin \gamma}$ ist, $q_1 = \frac{2 \varkappa_1 J F_2}{s^3}$.

Fig. 198.



Für C und für die Gröfse von q_1 ist es gleichgültig, was für einem Kreise l angehört, wenn nur s und F_2 dieselben Werte behalten. Man kann z. B. die Fläche ABC aufrichten, indem man l senkrecht macht; das einzige, was sich ändert, ist, dafs dann q_1 in die Horizontalebene fällt. Fig. 198 stellt die neue Zeichnung dar. Dafs $A_1 B_1$ nicht in der eigentlichen Lage $A_2 B_2$ gezeichnet ist, bleibt, da l unendlich klein

ist, ohne Einfluſs, denn der Flächeninhalt F_2 ist unverändert geblieben. Also ist wiederum

$$q_2 = \frac{2\varkappa_1 J F_2}{s^3} = \frac{2\varkappa_1 J}{s^3} \cdot \frac{l\varrho}{2} = \frac{\varkappa_1 J l \varrho}{s^3} = \frac{\varkappa_1 J l s \sin\alpha}{s^3} = \frac{\varkappa_1 J l \sin\alpha}{s^2}.$$

Nach diesem Gesetz wirkt jedes Teilchen des normal durch den Mittelpunkt einer Kreisscheibe gehenden Stromes auf die magnetischen Einheitspole am Rande. Will man die Wirkung des gesamten Stromes auf einen Pol erhalten, so hat man die Variabele

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{\sqrt{y^2+\varrho^2}^3} = (y^2+\varrho^2)^{-\frac{3}{2}} = y^{-3}\left(1+\frac{\varrho^2}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \text{ bezw. } \varrho^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{y^2}{\varrho^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

in einer Reihe zu entwickeln, die konvergent sein muſs, die Summenformel anzuwenden und die Reihe zu summieren. Diese umständliche Rechnung soll nicht vorgenommen werden, da sie nur den Wert einer Probe hat.*) Unten ist sie für Kenner der höheren Analysis als Anmerkung durchgeführt. Das Resultat ist $q = \frac{\varkappa J}{\varrho}$, was mit den Anfangsannahmen dieses Kapitels zusammenfällt. Da die höheren Rechnungen der Anmerkung überflüssig sind, ist hiermit das ganze Gebiet elementar erledigt. Mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes läſst sich die elektromotorische Kraft der später zu behandelnden Induktionsströme berechnen.

260) Ersatz des Kreisstromes durch einen unendlich kleinen Magnet. In Nr. 241 wurde gezeigt, daſs ein kleiner Magnet

*) Analytisch zeigt sich folgendes: Setzt man $l = dy$, $s = \sqrt{\varrho^2+y^2}$, so handelt es sich für den Draht von A bis zu unendlicher Höhe um die Gesamtwirkung

$$\sum q = 2\varkappa_1 J \int_0^\infty \frac{\varrho\, dy}{2\sqrt{\varrho^2+y^2}^3} = \varkappa_1 J \varrho \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{\varrho^2+y^2}^3} = \varkappa_1 J \varrho \left| \frac{y}{\varrho^2\sqrt{\varrho^2+y^2}} \right|_0^\infty$$

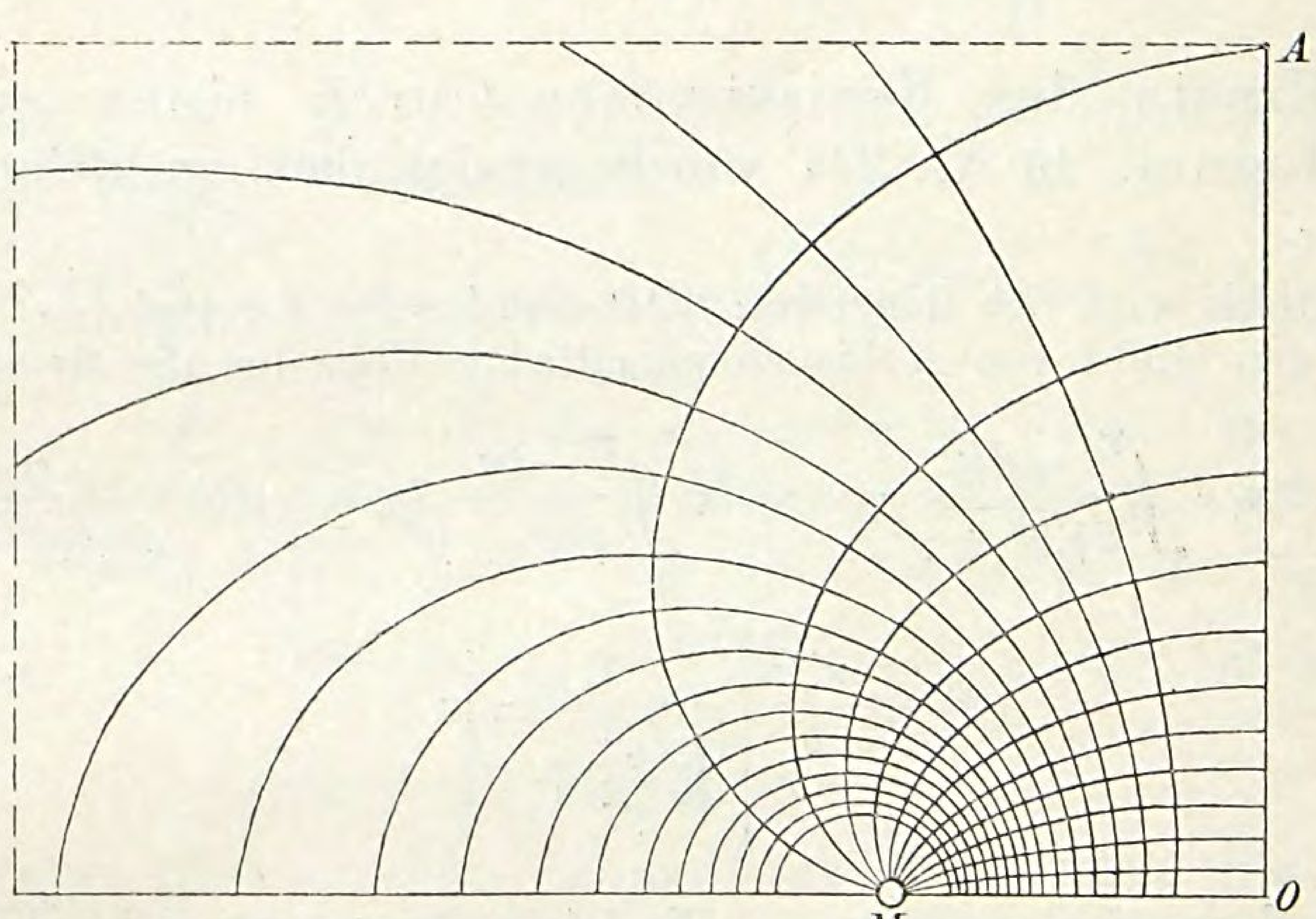
$$= \frac{\varkappa_1 J}{\varrho} \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{\varrho^2}{y^2}+1}} \right|_0^\infty .$$

Die vorletzte Form giebt o für $y = o$, die letzte für $y = \infty$ giebt $\frac{\varkappa_1 J}{\varrho}$. Dies ist die Wirkung des oberen Drahtteils. Der von A nach $-\infty$ gehende giebt eben so viel, die Wirkung ist also $\frac{2\varkappa_1 J}{\varrho}$. Setzt man $2\varkappa_1 = \varkappa$, so folgt für den unbegrenzten Draht $q = \frac{\varkappa J}{\varrho}$, was mit der ursprünglichen Theorie übereinstimmt. Diese Umkehrung zeigt, daſs die oben durch Kunstgriff gefundene Formel richtig ist, ebenso bestätigt sich die obige Gleichung $2\varkappa_1 = \varkappa$.

von Länge $2l$ auf einen in der Achse liegenden Einheitspol die Anziehung $p = \pm 4 \frac{ml}{r^3}$ ausübt, wenn m seine Polstärke, r die gegen l grofse Entfernung r ist. Führt man das magnetische Moment $M = 2ml$ ein, so handelt es sich um $\frac{2M}{r^3}$. Oben war für den Kreisstrom die Wirkung $\frac{2\varkappa_1 JF}{s^3} = \frac{2\varkappa_1 J\varrho^2\pi}{s^3}$ ermittelt worden. Für grofse Entfernung ist $s = r$ zu setzen, was $\frac{2\varkappa_1 J\varrho^2\pi}{r^3}$ giebt. Sollen die Wirkungen gleich sein, so hat man $M = \varkappa_1 JF$ zu setzen, wo F die Stromkreisfläche ist. Die Wirkung eines Kreisstromes läfst sich also durch einen kleinen Magnet ersetzen, dessen Moment proportional der Gröfse JF ist. Dies gilt aber nur für gröfsere Entfernungen, so dafs die Methode des magnetischen Blattes vorzuziehen ist.

261) Kraftlinien des Kreisstromes. Nachdem der Potentialwert eines Kreisrings für sämtliche Raumpunkte durch eine allgemeine Formel grundsätzlich bestimmt und für die Achsenpunkte und gewisse Ebenen wirklich ausgerechnet worden ist, können die Niveauflächen und die aus ihnen folgenden Kraftlinien für Kreisströme dargestellt werden. In Fig. 199 ist ein Quadrant der Zeichnung der Kraftlinien

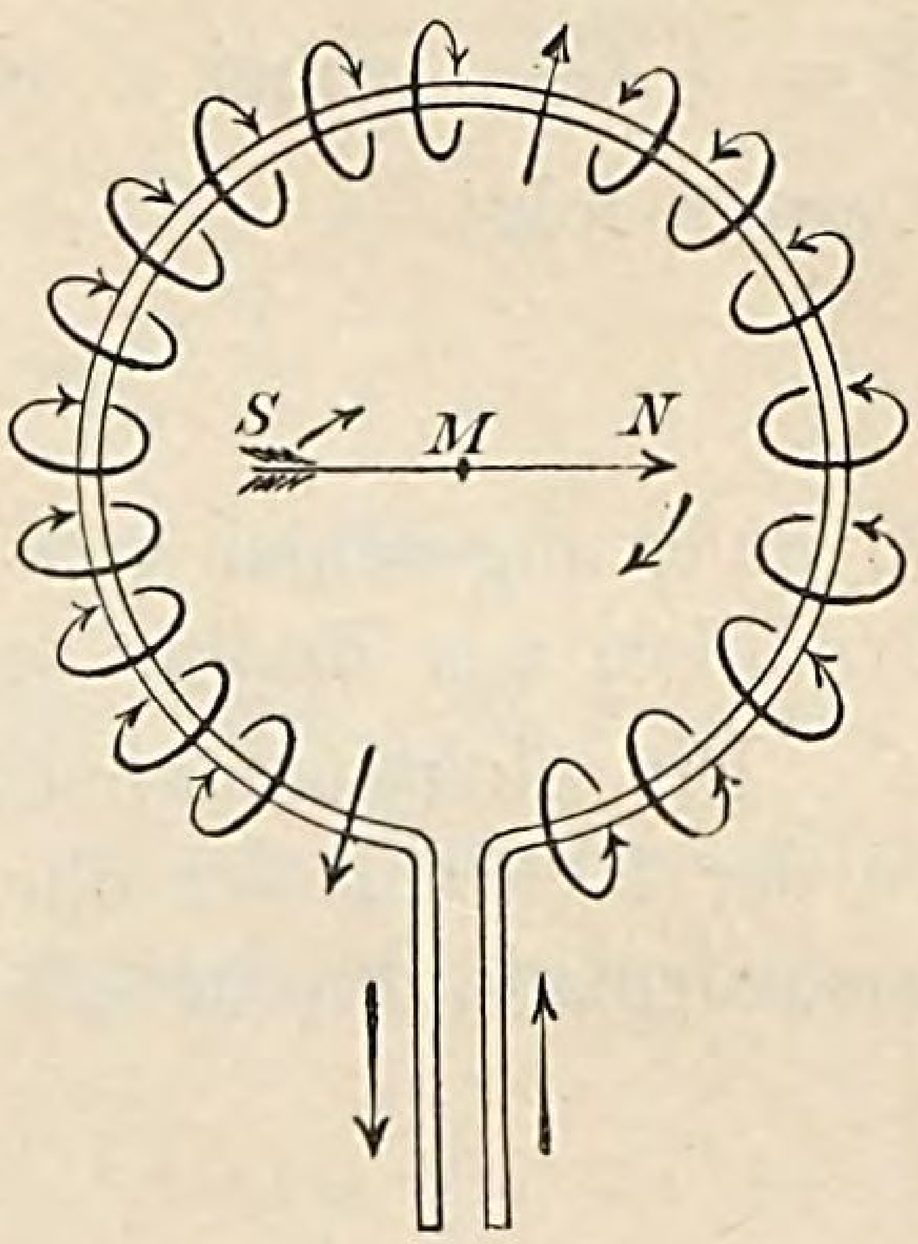
Fig. 199.



eines symmetrischen Normalschnitts durch M dargestellt. Die Rotation um OA und das Legen von Meridianschnitten vollendet das Zellennetz. Das Kurvenbüschel giebt die Niveau-, die Orthogonalschar die Kraftlinien. In der Nähe des kreisförmigen Drahtes haben diese Kreisgestalt. In Fig. 200 sind die um den Draht herum gehenden Kraft-

linien skizziert. Den Pfeilen folgend, wird der Nordpol der Magnetnadel nach vorn, der Südpol, ihnen entgegen, nach hinten gedrängt. Der von den Pfeilringen gebildete Drehungskörper (Wulst) bietet eine hydrodynamische Analogie zu den Helmholtzschen Wirbelringen. Die Strömungsgeschwindigkeit in einem solchen ist proportional der bewegenden Kraft p des elektromagnetischen Problems. In gröſserer Entfernung spielt der über die Proportionalität mit $\frac{1}{s^3}$ bezw. $\frac{1}{r^3}$ abgeleitete Satz seine Rolle. Er ist einer der wichtigsten der neueren Hydrodynamik. Die Bewegung der Wirbelfäden, die den Kraftlinien eines Drahtstroms, und die der Wirbelringe, die denen eines Kreisstroms folgt, ist von Helmholtz zuerst behandelt worden und gehört zu den bedeutendsten Leistungen dieses Forschers, der damit der Hydrodynamik den ersten Fortschritt seit Lagranges Arbeiten gegeben hat. Die Betrachtung kehrt noch einmal zu diesem Gegenstande zurück.

Fig. 200.



262) Die elektromagnetische Maſseinheit. Die Wirkung eines Kreisstroms auf die Poleinheit in seinem Mittelpunkte ist nach obigem

$$p = \frac{\varkappa J \pi}{r} = \frac{2 \varkappa_1 J \pi}{r},$$

je nachdem man die frühere oder die Biot-Savartsche Konstante $\varkappa_1$ nimmt. Ist der Radius r des Kreises gleich 1 cm, so ist $p = \varkappa J \pi = 2 \varkappa_1 J \pi$. Setzt man $\varkappa = 2$ bezw. $\varkappa_1 = 1$, was nach Nr. 251 $\Phi = J$ macht, so wird für $J = 1$ die Kraft $p = 2\pi$. Dies kann man zur Definition der elektromagnetischen Maſseinheit des C. G. S.-Systems benutzen. Sie lautet:

Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke ist diejenige Stromstärke, die auf einem Kreise von 1 cm Radius flieſsend auf die im Mittelpunkte befindliche magnetische Poleinheit eine Kraft von 2π Dynen ausübt.

Zugleich wird nach obigem die Stärke Φ des entsprechenden magnetischen Doppelblattes gleich 1, seine Wirkung gleich $\varphi \cdot 1 = 2\pi$. Die Stromstärke 1 wirkt also ebenso, wie ein magnetisches Doppelblatt von der Stärke 1 (und ebenso, wie ein kleiner Magnet vom Momente 1, denn auch dessen Wirkung wird nach Nr. 260 gleich

$\frac{2\varkappa_1 J \varrho^2 \pi}{s^3}$, was für $\varrho = 1$, $\varkappa_1 = 1$ und $s = 1$ in 2π übergeht, aber weniger genau ist).

Für $\varkappa_1 = 1$ geht die Formel für die Feldstärke im Mittelpunkte über in $F = \frac{2\pi J}{r}$, für n Windungen, die dicht beieinander liegen, in $F = \frac{2\pi n J}{r}$, wobei r den mittleren Radius der Windungen bedeutet. Daraus folgt

$$J = \frac{rF}{2\pi n},$$

so dafs, abgesehen vom Nenner $2\pi n$, die Intensität proportional dem Produkte aus Radius und Feldstärke ist.

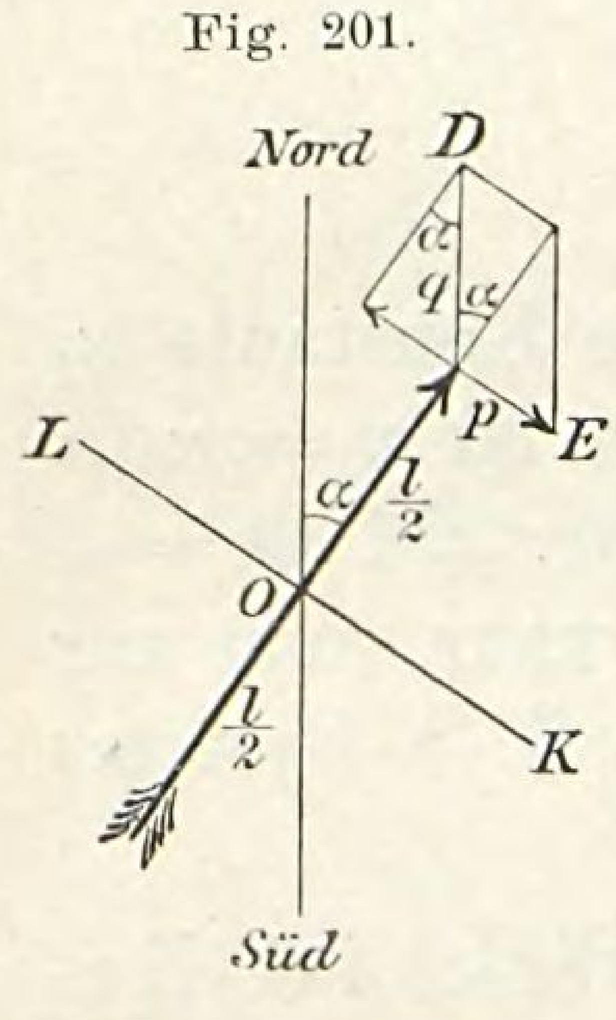
Die elektromagnetische Einheit der Praxis heifst Ampère und ist der 10[te] Teil der oben erklärten Einheit. Ist also i die in Ampères ausgedrückte Intensität eines Stroms, so ist die Feldstärke

$$F = \frac{2\pi n i}{10\, r}.$$

Der Ausdruck ni wird als die „Anzahl der Ampèrewindungen" bezeichnet. Ein Ampère erzeugt aus Wasser in der Sekunde 0,09328 mg = 0,174 ccm Knallgas bei normalem Druck und normaler Temperatur.

263) Sinusboussole. Die Beschreibung des Apparates findet man in den Lehrbüchern der Physik. Zunächst steht die Nadel auf Null und im magnetischen Meridian. Der Strom lenkt sie ab. Das Instrument wird so lange nachgedreht, bis die Nadel wieder auf Null steht. Dieser Drehungswinkel sei α. Befindet sich die Nadel in der Mitte des Stromkreises, so ist bei Polstärke m nach Nr. 262 das Moment der Ablenkung $\frac{l}{2} \cdot \frac{2\varkappa_1 J m \pi n}{r}$, wo n die Anzahl der Windungen des Drahtes ist. Das entgegengesetzt wirkende Moment des Erdmagnetismus q ist $\frac{l}{2}\, qm \sin\alpha$.

Fig. 201.



Für den Gleichgewichtsfall ist beides gleich zu setzen, dann folgt

$$J = \frac{qr}{2\varkappa_1 \pi n} \sin\alpha.$$

Die Stromstärke ist also proportional dem Sinus des Winkels α und kann somit leicht bestimmt werden. (KL ist die Schlufsstellung der Stromkreise, daher AE senkrecht gegen OA.)

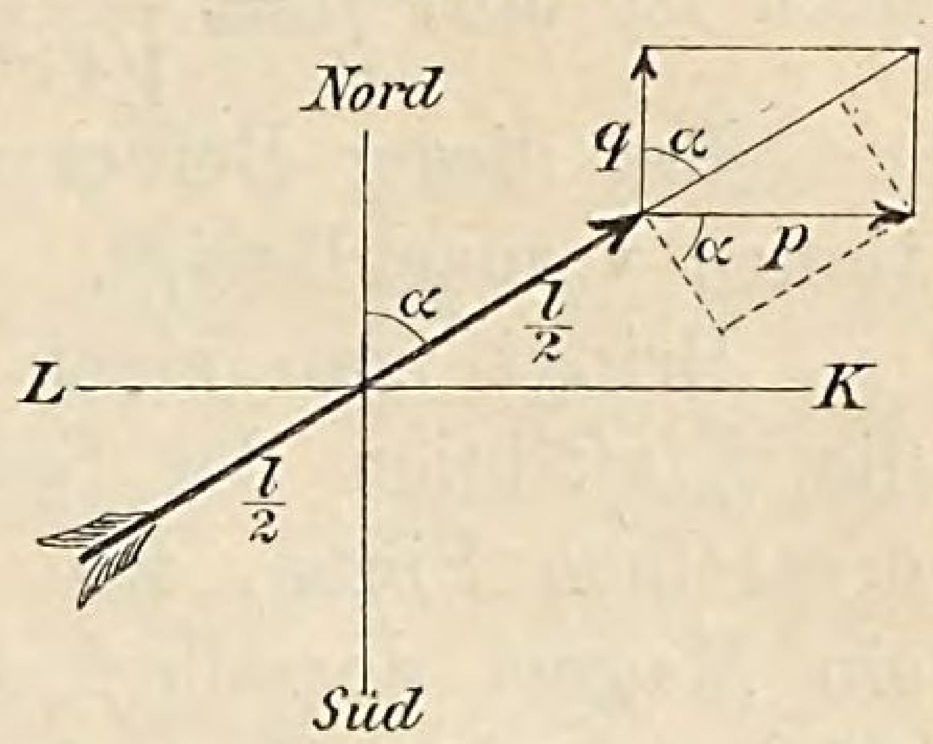
264) Tangentenboussole. Der Apparat wird nicht nachgedreht, so daſs p horizontal bleibt. Beim Gleichgewicht wird

$$mq\,\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{l}{2}\cdot\frac{2\varkappa J m\pi n}{r}\cos\alpha,$$

also

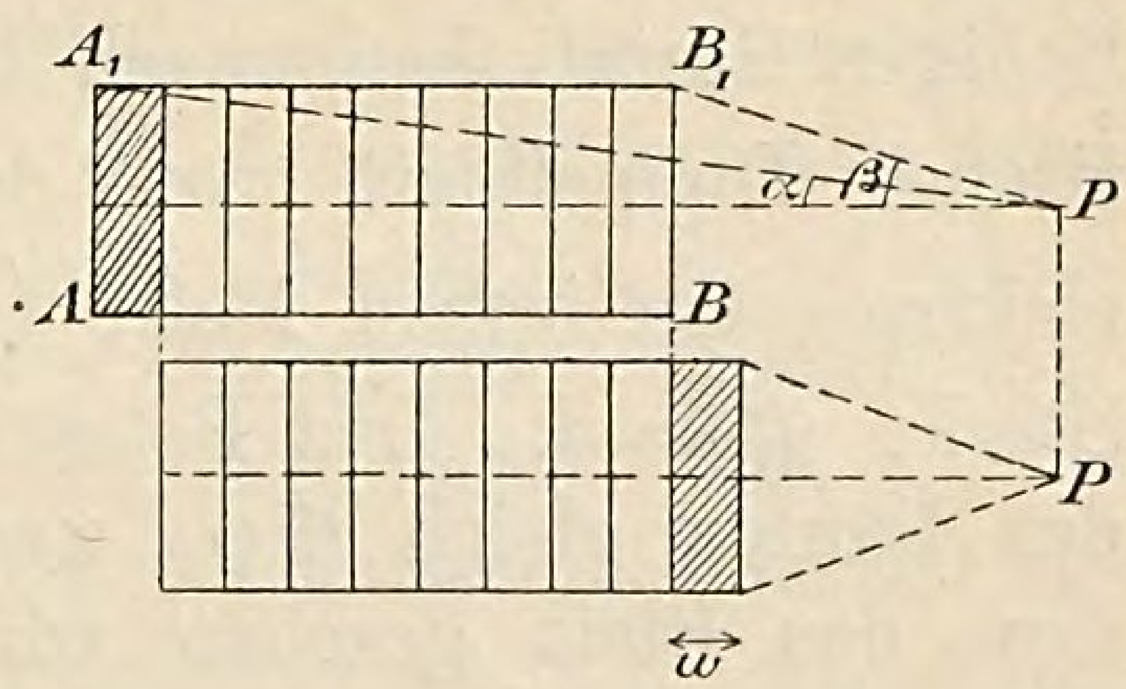
$$J = \frac{1}{\varkappa_1}\cdot\frac{qr}{2\pi n}\tan\alpha.$$

Fig. 202.



265) Elektromagnetische Wirkung einer Spule (Spirale). Statt der Spiralwindungen denke man sich n Kreisströme. Ist $\frac{\varkappa}{2} = 1$ gesetzt, so handelt es sich für jeden Kreis um $V = J\varphi$, wo φ der körperliche Winkel ist, unter dem er von P aus gesehen wird. Das Gesamtpotential also ist $J\sum\varphi$. Verschiebt man die Spule um den kleinen Weg w, der die Entfernung der Kreise voneinander angiebt, so ist es ebenso, als ob man nur den schraffierten Kreis um die ganze Länge der Spule verschoben hätte. Dies giebt die Potentialdifferenz

Fig. 203.



$$V_a - V_b = J(\varphi_a - \varphi_b).$$

Nach Nr. 44 und 258 ist aber

$$\varphi_a = 2\pi(1 - \cos\alpha) \quad \text{und} \quad \varphi_b = 2\pi(1 - \cos\beta),$$

also $\varphi_a - \varphi_b = 2\pi(\cos\beta - \cos\alpha)$, so wird die Potentialdifferenz gleich

$$2\pi J(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Jetzt denke man sich die ganze Spule um den sehr kleinen Weg $w = \frac{l}{n}$ verschoben, was dieselbe Arbeit giebt, dann ist die überwundene Kraft

$$p = \frac{V_a - V_b}{w} = \frac{2\pi J(\cos\beta - \cos\alpha)}{w} = \frac{2\pi n J(\cos\beta - \cos\alpha)}{l}.$$

Bei D ist $\beta = 90^0$, also $\cos\beta = 0$, dort ist also $p = -\frac{2\pi n J\cos\alpha_1}{l}$.

Bei C ist $\alpha = 90^0$, es folgt für diese Stelle $p = +\frac{2\pi n J\cos\beta}{l}$. In der Mitte sind die Winkel Supplementwinkel, also

$$\cos\beta - \cos(180 - \beta) = \cos\beta + \cos\beta = 2\cos\beta,$$

und jeder Cosinus hat dabei den Wert $\pm \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4r^2+l^2}}$. Demnach ist dort $p = \frac{4\pi n J}{\sqrt{4r^2+l^2}}$.

Bei dieser Berechnung sind die noch nicht besprochenen Induktionen vernachlässigt.

Bringt man einen Kern weichen Eisens in die Spule, so treten die Kraftlinien der Spule in das Eisen und polarisieren dieses in demselben Sinne, wie vorher den Luftraum. Das Eisen wird also ein Magnet derselben Art, wie die Spule. Über das Maſs der Verstärkung der Gesamtwirkung findet man empirische Formeln und Tabellen in den Lehrbüchern. Die Verstärkung kann auf das 30fache gehen. Dort sehe man auch die Zeichnung der Kraftlinien nach.

266) Bemerkung über die potentielle Energie geschlossener Ströme im magnetischen Felde. Die Wirkung eines geschlossenen Stromkreises von der Intensität J und von beliebiger Gestalt kann nach Nr. 256 ersetzt werden durch ein magnetisches Doppelblatt von der Stärke $\Phi = \frac{1}{2}\varkappa J$, oder wenn im elektromagnetischen Maſse $\left(\text{mit } \frac{1}{2}\varkappa = 1\right)$ gerechnet wird, von der Stärke $\Phi = J$. Das Potential des Blattes ist aber für jeden Punkt des Raums gleich $\Phi\varphi$, wenn φ der körperliche Winkel ist, unter dem das Blatt gesehen wird. Dies gilt nun auch für den Strom. Befindet sich nun in dem Raumpunkte P die magnetische Masse m, so ist der Potentialwert des Blattes für diese m Einheiten gleich $\Phi\varphi m$. Umgekehrt ist dies auch der Potentialwert der Masse m in Bezug auf das in seinem Felde liegende Blatt.

Statt des Ausdrucks Potentialwert kann man auch „potentielle Energie“ sagen. In der Entfernung 1 von dem Punkte P ist die Feldstärke der in ihm befindlichen Masse m gleich $\frac{m}{1^2} = m$. Dies ist zugleich die Anzahl der Kraftlinien, die durch die Fläche der um P gelegten Einheitskugel gehen. Da nun das Blatt auf dieser Einheitskugel die scheinbare Fläche φ einnimmt (körperlicher Winkel, unter dem das Blatt gesehen wird), so gehen von P nach dem magnetischen Blatte $m\varphi$ Kraftlinien, und ebensoviele durchsetzen den Kreisstrom, d. h. jede in diesem aufgespannte Fläche. Dadurch ist der von P nach dort gehende Kraftfluſs bestimmt. Die Bedeutung des gegenseitigen Potentials ist die der Arbeit, die nötig ist, entweder das Blatt aus dem Felde des festgehaltenen Magnetpols P in unendliche Entfernung zu versetzen oder den Pol P unter Festhaltung des Blattes ins Unendliche zu bewegen.

Sind mehrere Punkte P mit verschiedenen Massen m im Felde des Kreisstroms, so handelt es sich um die potentielle Energie

$$V = \sum m\varphi\Phi = \Phi\sum m\varphi = J\sum m\varphi = J\sum q = JQ,$$

wo $q = m\varphi$ jeden einzelnen Kraftfluſs, $Q = \sum q$ den gesamten Kraftfluſs bezeichnet. Anziehung oder Abstoſsung des Blattes in Bezug auf jede der Massen m hängt davon ab, ob m auf der ungleichnamigen oder gleichnamigen Seite des Blattes liegt. Denkt man sich das Batt fest, so bewegen sich die Punkte P. Denkt man sich diese fest, so wird das Blatt ein Bewegungsbestreben zeigen, dessen Stärke sich aus $\frac{V_2 - V_1}{w}$ ergiebt, wo w eine kleine Verschiebung, $V_2 - V_1$ die betreffende Potentialdifferenz ist.

267) Potential zweier Stromkreise aufeinander. Ebenso wie das Potential eines Stromes von Intensität J in Bezug auf einen Pol von Stärke m gleich der Arbeit $J\varphi$ ist, die man nötig hat, den Punkt ins Unendliche zu entfernen, so ist auch das Potential eines Stromkreises auf einen andern gleich der Arbeit, die es erfordert, bei Festhaltung des einen den andern ins Unendliche zu entfernen. Wie nun $J\varphi$ proportional J ist, so ist für den andern Strom $J_1\varphi_1$ proportional J_1. Die gegenseitige Einwirkung zweier Stromkreise ist also sowohl proportional J, als auch proportional J_1, d. h. man kann setzen

$$V = cJJ_1,$$

wo c eine Konstante ist, die von der Gestalt, der Gröſse und der Lage beider Ströme gegeneinander abhängt. (Induktionskoeffizient aus später anzugebenden Gründen von Form und Lage abhängig.)

Sind die Stromkreise eben, und ist der Bewegungssinn in beiden derselbe, d. h. stehen die ungleichnamigen Belegungen der Doppelschalen einander gegenüber, so nennt man das Potential negativ, und die Ströme ziehen einander an. Im andern Falle stoſsen sie einander ab. Ändert man ihre Lage gegeneinander (oder die Gestalt, oder die Gröſse), so geht $V = c \cdot J \cdot J_1$ über in $U = \varkappa JJ_1$. Die Potentialdifferenz

$$(\varkappa - c)\, JJ_1$$

heiſst die elektrodynamische Arbeit der Ströme. Diese Arbeit muſs, wenn bei der Rückkehr in den alten Zustand die Arbeit verschieden von Null ist, in irgend welcher Form in Erscheinung treten. Teilweise geschieht dies in Form von Induktionsströmen.

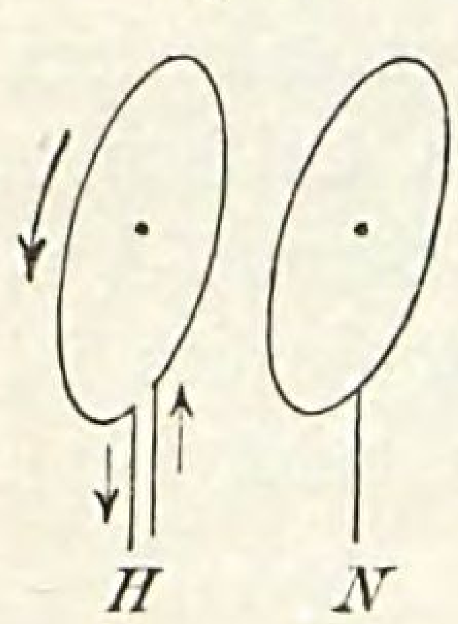
Haben beide Ströme dieselbe Intensität, so ist $V = c_1 \cdot J^2$. Denkt man sich beide identisch bezüglich der Lage, Gestalt und Gröfse, so ist dies zugleich der Ausdruck für das Potential des Stromes auf sich selbst. Befinden sich daher im Raume zwei Ströme J_1 und J_2, so ist die gesamte potentielle Energie

$$V = cJ_1J_2 + c_1J_1^2 + c_2J_2^2,$$

wo die Konstanten c_1 und c_2 von der Gestalt und Gröfse jedes einzelnen Stromes abhängen, c aufserdem von der gegenseitigen Lage beider abhängt.

268) Induktionsströme. Im Stromkreise H bewege sich ein Strom so, dafs seine Wirkung auf den geschlossenen Drahtkreis N die eines Nordpols sein würde, wenn N ebenfalls einen Strom in sich hätte. Ist dies nicht der Fall, so würde keine Arbeit nötig sein, um N von H mit konstanter Geschwindigkeit zu entfernen oder an H heranzubewegen. In Wahrheit ist Arbeit zu jeder dieser Bewegungen nötig, d. h. jedesmal ist ein Widerstand zu überwinden. (Lenzsches Gesetz.) Während der Annäherung mufs also in N ein entgegengesetzter Strom induziert worden sein (Abstofsung), während des Entfernens ein gleichgerichteter (Anziehung). Ebenso, wie die Annäherung, wirkt die Verstärkung der Intensität des Hauptstroms H, ebenso, wie das Entfernen, wirkt die Schwächung der Intensität in H, die eine ruft im Nebendraht einen entgegengesetzten, die andere einen gleichgerichteten Strom hervor. Zwischen der geleisteten Arbeit und der Energie des Induktionsstroms, bezw. zwischen der Intensitätsänderung und der Energie des Induktionsstroms müssen Beziehungen bestehen, die durch die nachstehende Annäherungsbetrachtung aufgesucht werden sollen.

Fig. 204.



Ist i die augenblickliche Intensität des Induktionsstroms und E seine elektromotorische Kraft, so ist die Energie dieses Stromes gleich Ei (Leistung für die Sekunde).

Ist gleichzeitig J die Intensität des Hauptstroms, so ist das Potential beider Ströme aufeinander gleich Jiq, wo q von der Gröfse, Gestalt und Lage der Stromkreise abhängt, vom Material der Leiter aber unabhängig ist. Ändert man zugleich die Lage (und damit q) und die Intensität J, so geht bei unverändertem i das Potential Jiq über in $J_1 i q_1$ und die Potentialdifferenz ist $i(J_1 q_1 - Jq)$, also ist die auf die Sekunde reduzierte Arbeit gleich

$$i\frac{J_1 q_1 - Jq}{t_1 - t},$$

wo $t_1 - t$ der kleine Zeitunterschied ist. Dieser sekundlichen Leistung mufs die des Induktionsstroms sehr genau äquivalent sein, d. h. es mufs sein

$$Ei = i \frac{J_1 q_1 - Jq}{t_1 - t},$$

und daraus folgt als elektromotorische Kraft (Leistungsfähigkeit für die Stromeinheit) des Induktionsstroms

$$1) \qquad E = \frac{J_1 q_1 - Jq}{t_1 - t}.$$

Wird nur die Lage (oder die Gröfse, oder die Gestalt) geändert, so wird

$$2) \qquad E = J \frac{q_1 - q}{t_1 - t}.$$

Wird nur die Intensität (nicht die Lage, Gröfse und Gestalt) geändert, so wird

$$3) \qquad E = q \frac{J_1 - J}{t_1 - t}.$$

Man kann $\frac{J_1 - J}{t_1 - t}$ als die Geschwindigkeit der Intensitätsänderung bezeichnen. Da $J =$ Kapazität $\cdot \frac{\text{Potentialänderung}}{\text{Zeitänderung}}$, gleich $C \frac{V_1 - V}{t_1 - t}$ ist, was als Cv bezeichnet werden möge, so ist $\frac{J_1 - J}{t_1 - t} = E \frac{v_1 - v}{t_1 - t}$ als Beschleunigung der Potentialänderung zu betrachten. [Man vergleiche $v = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$, d. h. Geschwindigkeit gleich $\frac{\text{Lagenänderung}}{\text{Zeitänderung}}$, ferner $g = \frac{v_1 - v}{t_1 - t}$, d. h. Beschleunigung gleich $\frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitänderung}}$, darin liegt die Reduktion der veränderlichen Geschwindigkeit und Beschleunigung auf die Sekunde unter Festhaltung des augenblicklichen Wertes.]

269) Selbstinduktion und Extraströme. Beginnt der elektrische Strom zu fliefsen, so hat er in später zu besprechender Weise das ihn umgebende Feld elektromagnetisch zu polarisieren. Damit ist ein gewisser Aufwand an Energie verbunden. Die den Strom eröffnenden Teilchen verlieren also an Geschwindigkeit und Energie. Es entsteht also eine Art von Rückstau, der als Gegenstrom gedeutet und durch einen solchen ersetzt werden könnte. Erst wenn die Polarisation der Umgebung vollendet ist, tritt ein stationärer Zustand ein. Die Einwirkung dieses Gegenstroms läfst den Hauptstrom nur langsam zur vollen Intensität gelangen. Da jener Strom, der sogenannte Extrastrom, beim Schliefsen des Stromkreises entsteht (Beginn des Hauptstroms), so heifst er Schliefsungsstrom.

Unterbricht man den Hauptstrom, d. h. öffnet man seinen Stromkreis, so werden keine elektrischen Teilchen mehr durch die galvanische Einwirkung vorwärts getrieben. Wie aber der Strom vorher die elektromagnetische Polarisation des Feldes induzierte, so induziert dieses jetzt umgekehrt einen gleichgerichteten Strom. Das elektromagnetische Feld giebt also einen Teil der vorher an dieses abgegebenen Energie zurück. Dieser zweite gleichgerichtete Strom heifst der Öffnungstrom. Auch für seine Entstehungsweise sollen unten Erklärungsversuche gemacht werden.

Er unterscheidet sich vom Schliefsungsstrom dadurch, dafs dieser einen allmählich anwachsenden Rückstau bedeutete, während der Öffnungsstrom nach plötzlichem Abschlufs plötzlich entsteht.

Beide haben keine elektromagnetische Polarisation auszuüben, so dafs sie fast ungeschwächt vorwärts eilen. [Dieses Nichtnötighaben einer elektromagnetischen Polarisation teilen beide mit den Induktionsströmen des vorigen Abschnitts, deren Wirkung aus denselben Gründen eine plötzliche ist. Dem Schliefsen des Hauptstroms entspricht ein entgegengesetzter Schliefsungsinduktionsstrom in dem Nebenkreise, dem Öffnen ein gleichgerichteter. Auch hier ist der letztere der plötzlicher wirkende. So kommt es, dafs bei dem Ruhmkorffschen Funkeninduktor in der Regel nur Öffnungsströme die Funkenstrecke durchbrechen.]

Für die durch Selbstinduktion infolge von Intensitätsänderungen entstehenden Ströme gilt die Formel 3) des vorigen Abschnitts. Für q setzt man, da die Lage nicht geändert wird, eine Konstante L ein, den Koeffizient der Selbstinduktion des Leiters, so dafs

$$4) \qquad E = L \frac{J_1 - J}{t_1 - t}$$

die elektromotorische Kraft des Selbstinduktionsstroms wird. War die Anfangsenergie Null, so handelt es sich um den Schliefsungsstrom mit

$$5) \qquad E_s = L \frac{J_1}{t_1 - t}.$$

Ist die Schlufsenergie gleich Null, so handelt es sich um den Öffnungsstrom

$$6) \qquad E_ö = - L \frac{J_1}{t_1 - t}.$$

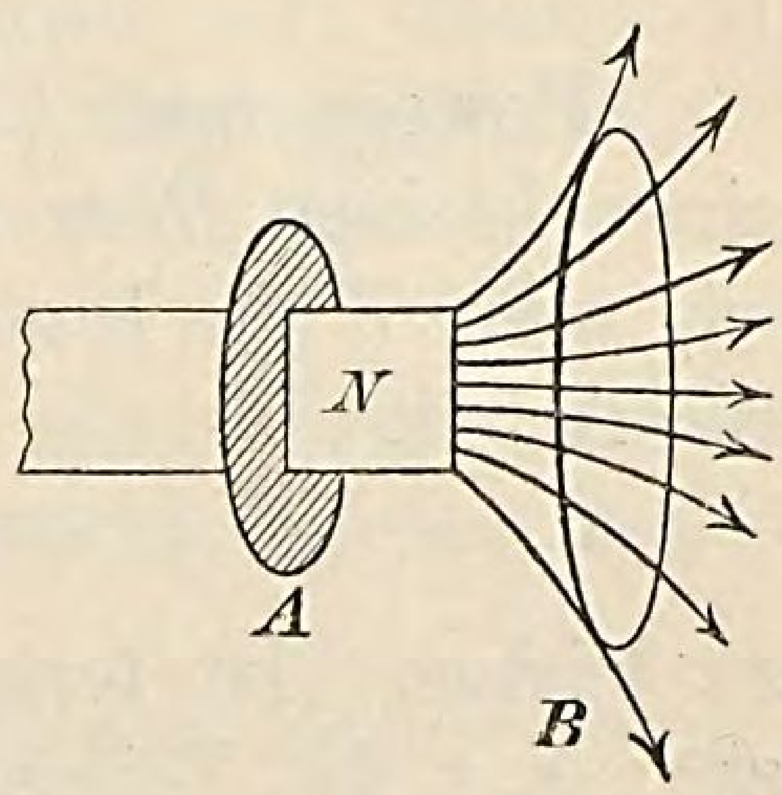
Da für den letzteren $t_1 - t$ kleiner ist, so ist $E_ö > E_s$, was mit den obigen Bemerkungen übereinstimmt. Die Formel 4) ist von Bedeutung für die Dauer der elektrischen Schwingung.

Maxwellsche Anschauungen über die Induktionsströme werden später auseinandergesetzt. Dabei wird jeder Rest von Unklarheit aus

den Vorstellungen über den Energieaustausch zwischen dem Strome und dem magnet-elektrischen Felde schwinden. Durch Bifilarwickelung kann die Selbstinduktion fast vernichtet werden, so daſs sie unter keiner Bedingung auf einer Trägheit der Elektrizität beruht.

270) Erklärung der Induktionswirkungen nach Faraday. Nach Faraday erklärt man sich das Entstehen der Induktionsströme durch das Zunehmen oder Abnehmen der Kraftlinien bei der Bewegung des Drahtkreises durch deren System oder bei Intensitätsänderungen. Nähert man den Stromkreis B dem Nordpole N oder dem ihn vertretenden Stromkreise A, so wird er durch mehr Kraftlinien durchsetzt als vorher. Entfernt man ihn, so wird er von weniger Kraftlinien durchsetzt. Jeder Vermehrung oder Verminderung der Kraftlinien während der Bewegung entspricht das Entstehen eines Induktionsstroms in dem einen, wie im andern Sinne. Die Bewegung im homogenen Felde bringt demnach keinen Induktionsstrom hervor. Über den Sinn des Stroms ist dasselbe zu sagen, wie vorher.

Fig. 205.



Die neueren Lehrbücher bringen wohl ausnahmslos die Zeichnung des Kraftliniensystems eines Magnetstabes und des Kreisstroms in den verschiedensten Lagen und veranschaulichen so die Entstehung der Induktionsströme unter den verschiedensten Verhältnissen. Auf diese Figuren und die dortigen Erläuterungen sei verwiesen.

Diese Betrachtungen geben nicht das Maſs der Änderungen an, welches man mit Hilfe der früheren Betrachtungen bestimmen kann. Dies soll jetzt durchgeführt werden.

271) Berechung der elektromotorischen Kraft des in einem Leiterelemente bei Bewegung im magnetischen Felde erzeugten Stroms aus der Anderung der Kraftlinienzahl.

Der Induktionsstrom habe die unbekannte Intensität J. Das untersuchte Leiterelement habe die Länge l, der Magnetpol von Stärke m habe von l die Entfernung s, die Verbindungslinie s bilde mit l einen Winkel α, dann ist nach Nr. 259 die gegenseitige Einwirkung von der Stärke

$$P = m\frac{\varkappa_1 J l \sin\alpha}{s^2},$$

oder im elektromagnetischen Maſse, wo $\varkappa_1 = 1$ angenommen ist

$$P = \frac{m}{s^2}\cdot J l \sin\alpha.$$

Man vergleiche Fig. 198 für festgehaltenen Pol C, wobei sich l mit der Kraft P senkrecht gegen die Kraftlinie CA_1 nach hinten bewegen würde. Setzt man für $\frac{m}{s^2}$ die Feldstärke F des Poles, so handelt es sich um

$$P = FJl \sin \alpha.$$

Ist l senkrecht gegen die Kraftlinie CA_1 gerichtet, so ist $\sin \alpha = 1$, also

$$P = FJl.$$

Bewegt man l seinem Bewegungsantriebe P entgegengesetzt um einen kleinen Weg w (senkrecht gegen die Ebene der Zeichnung), so ist, wenn J die Intensität des entstehenden Induktionsstroms bedeutet, die Arbeit

$$A = FJlw$$

zu leisten. Ist ferner E die elektromotorische Kraft des Induktionsstroms, t die Zeitdauer, J die Intensität, so ist zugleich die Leistung in der Zeit t

$$A = EJt.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$E = Fl\frac{w}{t} = Flv,$$

wo $\frac{w}{t} = v$ die Geschwindigkeit der kleinen Bewegung bedeutet. Folglich:

Wird ein Leiterelement l im magnetischen Felde senkrecht gegen die Kraftlinien bewegt, so ist die Kraft des induzierten Stromes gleich dem Produkte aus Feldstärke, Länge l und Geschwindigkeit der Bewegung.

Dabei ist aber wl das vom Elemente durchschnittene Rechteck, durch welches $lwF = n$ Kraftlinien gehen. Demnach ist

$$E = \frac{n}{t}.$$

Folglich:

Die elektromotorische Kraft des bei jener Bewegung induzierten Stromes ist gleich der auf die Sekunde reduzierten Anzahl der durchschnittenen Kraftlinien.

Jede kleine Parallelverschiebung von l läſst sich aber zerlegen in eine Verschiebung in der Richtung der Kraftlinien und eine senkrecht gegen diese gerichtete. Da nur bei der letzteren Bewegung Arbeit geleistet wird und zugleich nur dabei Kraftlinien durchschnitten werden, und zwar ebenso viel, wie bei der eigentlichen Bewegung, so hat der Satz allgemeine Geltung. Ist l schräg gegen die Kraftlinien gerichtet, so ist die Verminderung der genannten Anzahl für die wirkliche Be-

wegungsfläche ebenso grofs, wie bei der senkrecht zu den Kraftlinien gehenden Teilbewegung. Also auch dies ändert den Satz nicht. Er gilt für jede beliebige kleine Verschiebung des beliebig liegenden Elementes *l* gegen die Kraftlinien. Die Richtung des Stromes in *l* ergiebt sich daraus, dafs er so gerichtet sein mufs, dafs Arbeit zu überwinden ist. Das Feld bewegt den Strom nach der Linkhandregel, die Arbeitsrichtung ist entgegengesetzt. Daraus ergiebt sich folgende Rechthandregel:

Legt man die rechte Hand so an den Leiter, dafs die Kraftlinien in die Handfläche eintreten und der Daumen nach der Richtung der beabsichtigten Bewegung zeigt, dann zeigen die Finger nach der Richtung des im Leiter induzierten Stromes.

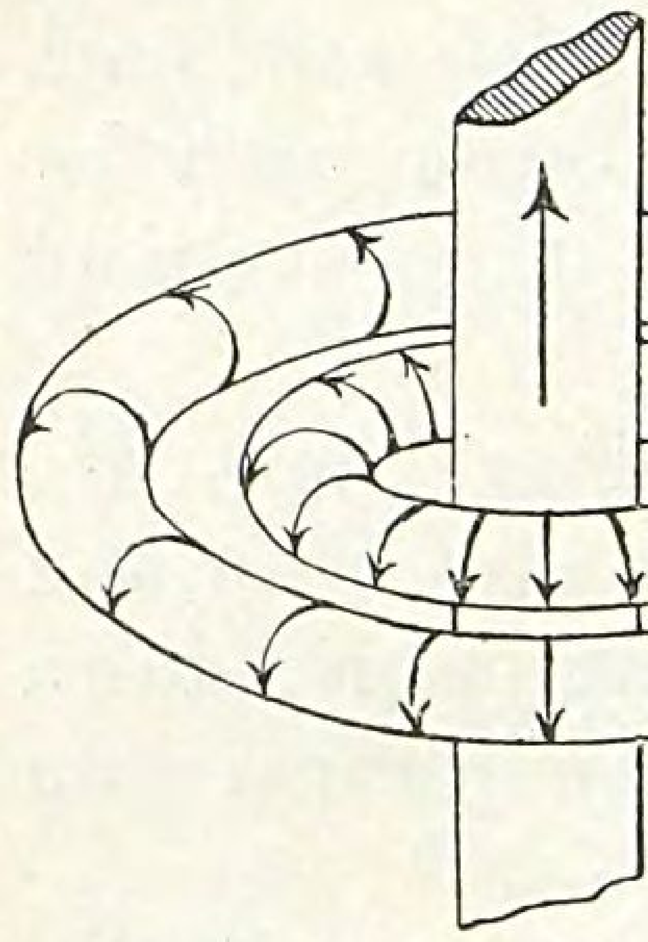
In den neueren physikalischen Lehrbüchern findet man Abbildungen, an denen die Probe auf die Regel gemacht werden kann. (Vgl. Börner.)

Diese Faradayschen Regeln sind aber lediglich eine Beschreibung des Vorgangs, sie erklären die Induktionsströme nicht, sie veranschaulichen den Vorgang nicht in hinreichender Weise. Wie in so vielen Fällen, läfst sich auch hier eine Veranschaulichung durch mechanische Bewegungsprozesse durchführen, die zugleich den durch die Hertzschen Versuche gewonnenen Resultaten Rechnung trägt. Eine solche soll im Anschlufs an Maxwellsche und Ampèresche Vorstellungen im folgenden versucht werden. Damit wird nicht etwa behauptet, dafs solche Molekularbewegungen des Äthers in Wirklichkeit stattfinden, sondern nur, dafs man sich den Vorgang mit ihrer Hilfe verständlich machen kann. Dadurch gewinnen wir einen ersten Einblick in die Maxwellschen Wirbelfelder und lernen den wechselnden Austausch der Energie zwischen Strom und Feld in überzeugenderer Weise verstehen.

272) Neuere Vorstellungen über das elektromagnetische Feld. Nach Ampère kann man sich jeden Elementarmagnet durch Strömungen ersetzt denken, die ihn nach Art der Solenoide umkreisen. Da nun um den geradlinigen Stromleiter die elektromagnetische Polarisation so geschieht, dafs die Elementarmagnete sich in koncentrischen Kreisen lagern, so wird jeder dieser Kreise, wenn man jeden kleinen Magnet durch sein Solenoid ersetzt, in einen Wirbelring verwandelt, jede Normalebene in ein Feld koncentrischer Wirbelringe, wie es in Fig. 206 dargestellt ist, nur sind dort die Moleküle im Verhältnis zum Draht viel zu grofs gezeichnet. Gleichartig polarisierten Kraftlinien entsprechen also Wirbelringe mit in gleichem Sinne erfolgender Drehung. Entgegengesetzt polarisierten Kraftlinien entsprechen entgegengesetzt drehende Wirbelringe.

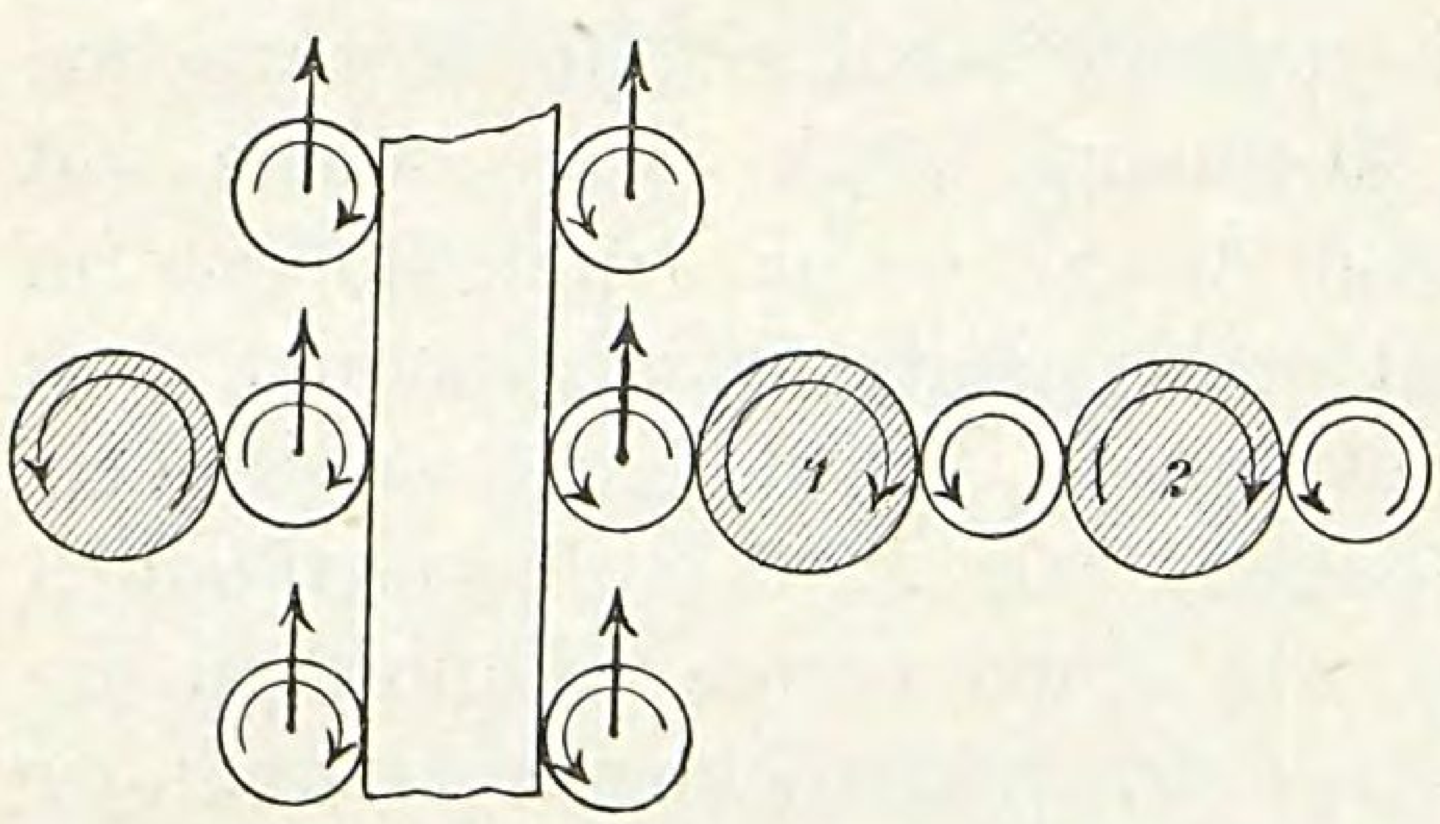
Die Analogie mit der Mechanik läſst es nicht recht denkbar erscheinen, wie Ring 1 den Ring 2 in Bewegung versetzen könne, wenn man nicht hypothetische Zwischenpartikelchen einschaltet, die wie Zwischenräder die Bewegung übertragen. Denn daſs ein schrittweises Übertragen stattfindet, während Fernewirkungen ausgeschlossen sind, geht aus den Hertzschen Untersuchungen über die zeitliche Ausbreitung hervor. Auch zwischen dem Draht und dem ersten Ringe, wo ein treibendes Agens, der Strom, bestehen muſs, bringt man naturgemäſs Zwischenpartikelchen an, und diese vertreten den Strom, der nach den neueren Anschauungen nicht im Drahte, sondern an diesem hinflieſst.

Fig. 206.



In Fig. 207 sind die schraffierten Kreise Durchschnitte der Ringe, die übrigen sind die in Ansicht gesehenen Zwischenpartikelchen. Man denke sich, um eine rohe Veranschaulichung zu erhalten, sämtliche bewegten Teilchen nach Art der Zahnräder mit Zähnen versehen, die Drahtoberfläche ebenfalls nach Art der Zahnstangen, dann würden bei der angedeuteten Drehung die an letzterer befindlichen Partikelchen aufwärts rollen und den ersten Ring in Drehbewegung versetzen. Dieser setzt die nächsten Zwischenpartikelchen in Drehung, diese den folgenden Wirbelring u. s. w. Während die am Drahte befindlichen Teilchen nach oben steigen und stets durch neue abgelöst werden, bleiben die ferner liegenden am Platze, weil sie von den beiderseitigen Ringen festgehalten werden und links ebensoviel herabsinken, wie sie rechts emporsteigen.

Fig. 207.



Diese Zahnradvorstellung ist aber zu roh, denn sie ist zwangläufig und bei starr gedachten Zähnen würde der gesamte Mechanismus in demselben Momente in Gang gesetzt werden. Es ist also besser, jetzt das Bild von Reibungsrädern zu wählen, die nach Art der Reibungskuppelungen allmählich aufeinander einwirken.

Aus dieser Vorstellung heraus lassen sich zahlreiche Erscheinungen erklären, worüber einige Andeutungen gegeben werden sollen.

a) Die beiden Extraströme. Angenommen, der Stromkreis

wird geschlossen und der galvanische Strom in Gang gesetzt, dann rollen die am Draht befindlichen elektrischen Teilchen, die man sich als Ätherteilchen vorstellen kann, vorwärts. Da die ersten die Aufgabe erhalten, die Wirbelringe in Bewegung zu setzen, verlieren sie an Drehungs- und Fortbewegungsgeschwindigkeit. Sie geben einen Teil der Energie an das elektromagnetische Feld ab. (In gewissem Sinne mufs man also hier den mechanischen Energiebegriff und damit den des Arbeitsaufwandes und der zu überwindenden Trägheit, wohl auch eine Art von Reibungswiderstand einführen.) Durch die Verlangsamung der vorwärts rollenden Anfangsteilchen des Stromes tritt eine Art von Rückstau ein. Dieser Rückstau könnte rechnerisch durch die Einwirkung eines Gegenstroms ersetzt werden. Dies ist der sog. **Schliefsungsextrastrom**, der den **Hauptstrom** nur allmählich zur vollen Geschwindigkeit gelangen läfst. Diese tritt ein, sobald die benachbarten Wirbelringe des Feldes die ihnen zukommende Geschwindigkeit erreicht haben.

Wird jetzt der Strom geschlossen, so werden durch die galvanische Einwirkung keine Teilchen mehr vorwärts geschleudert. Denkt man sich jedoch bisher ruhende am Drahte befindlich, oder irgendwie in den Zwischenraum eintretend, so werden diese von dem ersten Wirbelringe gefafst, in Drehung versetzt und den Nachzüglern des galvanischen Stroms nachgeschleudert. Dies ist der **Öffnungsextrastrom**, der ohne Energieverlust eintritt, da das gesamte Feld, welches er passiert, noch in voller Wirbelbewegung befindlich ist. Er setzt also weit plötzlicher ein, als der Hauptstrom, er zeigt dabei bei geringerer Intensität weit gröfsere elektromotorische Kraft und kann die durch das Öffnen entstandene Funkenstrecke überspringen. (Öffnungsfunke.)

Damit sind die beiden Extraströme zwanglos erklärt. Zugleich ergiebt sich ohne weiteres, dafs, wenn der Hauptstrom eine plötzliche Intensitätsänderung erfährt, ein Extrastrom eintreten mufs. Der Verstärkung entspricht ein dem Schliefsungsstrom, der Schwächung ein dem Öffnungsstrom analoger Extrastrom.

Will man die Extraströme schwächen, so biegt man den Draht in der Mitte um und wickelt ihn doppelt (bifilar) auf, so dafs der Hauptstrom in den benachbarten Windungen entgegengesetzt läuft. Dadurch werden entgegengesetzte Drehungen der Wirbelringe im Zwischenfelde erzeugt, die sich teilweise aufheben, wobei Reibungsarbeit verrichtet werden mag. Das Feld hat jetzt nicht die nötige Energie, um einen stärkeren Extrastrom hervorzubringen.

Da bei Anwendung von Wechselströmen die Intensität plötzlich von $+J$ auf $-J$ springt, werden die Extraströme dabei mit etwa doppelter elektromotorischer Kraft auftreten, als bei dem einfachen Wechsel von Öffnen und Schliefsen des Stromes. Um die damit ver-

bundene Widerstandsvergröfserung einzuschränken, hat man hier bifilare Wickelung als zweckmäfsig und notwendig zu benutzen.

Die beiden Extraströme entstehen also dadurch, dafs an das umgebende Feld Energie abgegeben wird. Handelte es sich um magnetische Verschiebungsarbeit, wie bei der älteren Vorstellungsweise, so würde die Energieaufspeicherung eine potentielle sein. Bei der jetzt vorgetragenen Auffassung dagegen ist die abgegebene Energie als kinetische aufzufassen. Diese Energie wird beim zweiten Extrastrome nur teilweise an den Draht zurückgegeben. Der Rest wird aufgebraucht, um ferner und ferner liegende Wirbelringe in Bewegung zu versetzen, bis in gröfserer Entfernung die Erscheinung schwächer und schwächer wird. Darauf kommen wir zurück bei der Besprechung der elektrischen Strahlung.

b) Feldstärke. Hat ein Wirbelring n_1 Moleküle, der benachbarte n_2, so überträgt sich bei der Zahnrad-Vorstellung naturgemäfs seine Kraft p_1 so, dafs der zweite Ring mit einer Kraft p_2 wirkt, die sich aus $p_1 : p_2 = n_2 : n_1$ berechnen läfst. Nun ist aber $n_2 : n_1 = r_2 : r_1$, also folgt $p_1 : p_2 = r_2 : r_1$, d. h. die Feldstärke ist umgekehrt proportinal der Entfernung vom Drahte. Dies ist das dem vorliegenden Kapitel an die Spitze gesetzte Grundgesetz.

c) Induktionsströme. Man denke sich in einiger Entfernung rechts vom Hauptstrome A einen parallelen Draht (Nebendraht), der entweder geradlinig und erst im unendlichen Bereiche geschlossen oder wenigstens erst in grofser Entfernung geschlossen sein soll. Man schliefse den Kreis des Hauptstroms. Was wird geschehen? Erst wird Wirbelring 1, dann 2, dann 3 u. s. w. in Bewegung gesetzt. Sobald die links am Nebendrahte befindlichen Zwischenpartikelchen in die Drehung versetzt werden, die in Fig. 207 angedeutet ist, schiefsen sie am Nebendrahte abwärts und bilden den **entgegengesetzten Schliefsungsinduktionsstrom.** Lange hält er nicht an, denn sobald sich die jenseits des Nebendrahtes sich bildenden Wirbelringe arrangiert und in Drehung versetzt haben, entsteht auf der entgegengesetzten Seite des Drahtes ein nach oben gerichteter Strom. Jetzt fliefst im Drahte ebensoviel Strom nach unten, wie nach oben, die beiden Strömungen gleichen sich also aus und ihre Wirkung ist Null.

Wird jetzt der Hauptstrom durch Öffnung des Kreises unterbrochen, so beruhigt sich erst der Ring 1, dann der Ring 2 u. s. w. Sobald die links am Drahte befindlichen Zwischenteilchen zur Ruhe kommen, während die rechts davon befindlichen noch in lebendiger Bewegung sind, überwiegt der durch die letzteren dargestellte Strom, und so entsteht der **gleichgerichtete Öffnungsinduktionsstrom**, der nach Beruhigung des Feldes gleichfalls aufhört.

Befinden sich an der Stelle des einen Nebendrahtes zwei, die zu derselben Wickelung gehören und gleiche Entfernung von A haben, so werden bei der Schliesung auf ihrer linken Seite doppelt so viele Partikelchen in Bewegung gesetzt, als vorher, die elektromotorische Kraft also verdoppelt. Dasselbe kann auf drei, vier u. s. w. Drähte ausgedehnt werden. Es wird eben in der gleichen Zeit eine entsprechend gröſsere Elektrizitätsmenge in Gang gesetzt. So erklärt sich die Zweckmäſsigkeit zahlreicher Windungen in der Nebenspirale.

Da die Induktionsströme das Feld nicht erst zu polarisieren haben, also keinen Rückstau erleiden, setzen sie kräftig ein, besonders der Öffnungsinduktionsstrom, der die Eigenschaften des Öffnungsextrastroms teilt und lange Funkenstrecken überspringen kann und kräftige physiologische Wirkungen giebt.

Damit sind z. B. die Erscheinungen am Ruhmkorffschen Funkeninduktor zwanglos erklärt, besonders das kräftige Überspringen der Öffnungsfunken in der Funkenstrecke der Nebenrolle. Damit ist zugleich der Übergang zur Betrachtung dei Transformatoren ermöglicht, worüber man die Lehrbücher vergleiche. (Bei konstanter Leistungsfähigkeit $E \cdot J$ kann E groſs und J klein, oder umgekehrt E klein und J groſs sein.) Da die Induktionsströme einen Teil der Energie des Feldes aufnehmen und ebenso an irgendwelchen Stellen Energie an dieses abgeben können, so rufen sie selbstverständlich im Felde Erscheinungen hervor, die mit den durch den Hauptstrom veranlaſsten in Interferenz treten.

d) Elektrische Schwingungen im nicht geschlossenen Nebendrahte. Man denke sich im Hauptdrahte einen Wechselstrom in Gang gesetzt, dessen Phasenzahl Tausende für die Sekunde betrage. (Tesla hat 15 000 sekundliche Perioden erzielt.) Die Wirbelringe des Feldes schwingen also sehr häufig in der Sekunde in wechselndem Sinne. Wie werden sich die Induktionsströme des Nebendrahtes verhalten, wenn dieser oben und unten begrenzt ist? Die den Schlieſsungsinduktionsstrom bildenden Teilchen können (da gewissermaſsen die Zahnstange zu Ende ist) nicht weiter gelangen, es entsteht also ein Rückstau, der geradezu als reflektierter Strom betrachtet werden kann. Bei der Rückkehr wird er mit den inzwischen hervorgebrachten Induktionsströmen in Interferenz treten. Er kann z. B. den in entgegengesetzter Richtung hervorgerufenen Öffnungsinduktionsstrom unterstützen oder schwächen. Unterstützt er ihn, so wirkt der Draht als Resonator, er wirkt also ähnlich, wie die Resonatoren der Akustik. Wie diese für eine bestimmte Schwingungszahl abgestimmt werden können, so kann dasselbe mit dem Nebendrahte geschehen, indem man seine Länge variieren läſst. Bringt man irgendwo an diesem eine kleine Funkenstrecke an, so sind die Funken stark bei gut wirkendem

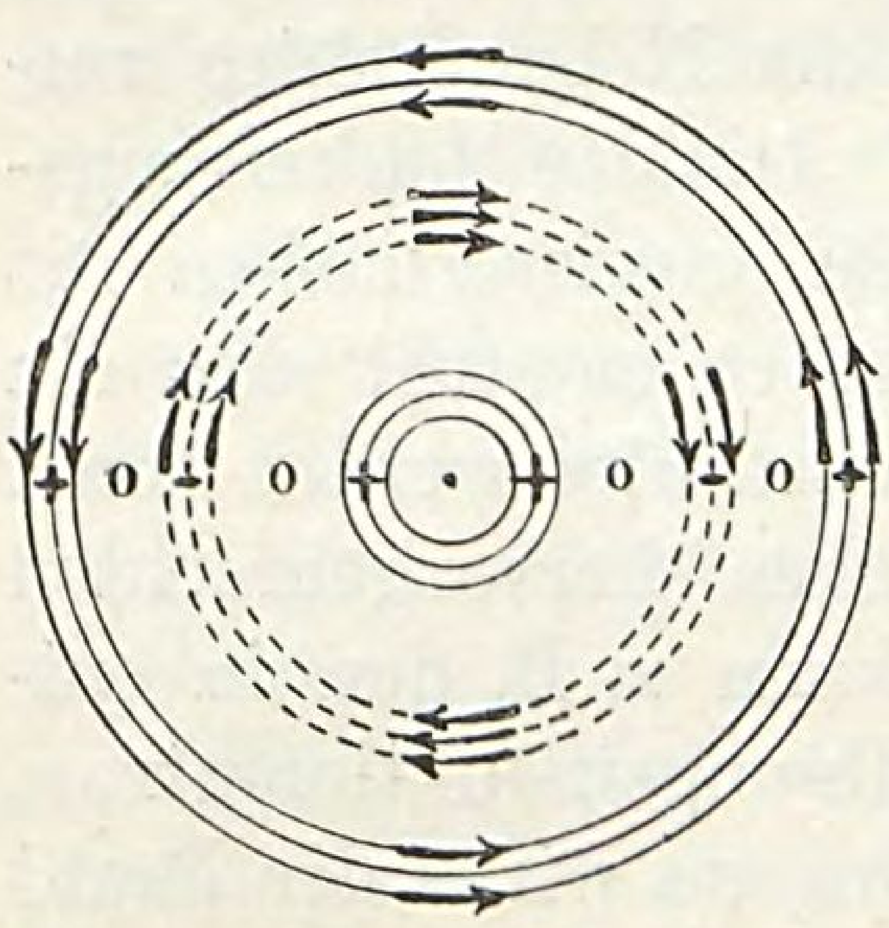
Resonator, schwach bei schlecht wirkendem, gar nicht vorhanden bei entgegengesetzt wirkendem. Man kann im Drahte stehende Schwingungen mit Knoten und Bäuchen erzielen, wie in der Akustik. Über deren experimentelle Nachweisung durch Geifslersche Röhren und dgl. vergleiche man die Lehrbücher.

Angenommen, die Induktionsströme wanderten mit 300 000 km oder $3 \cdot 10^8$ m Geschwindigkeit, so würden bei 30 000 sekundlichen Halbperioden für den Hin- und Rückweg 10 000 m Weg, also 5000 m freie Drahtlänge nach oben (bezw. unten) nötig sein, um den Resonator abzustimmen. An dieser Länge scheiterten die Versuche, bis man endlich im Anschlufs an Feddersen die elektrischen Oszillationen des überspringenden Funkens benutzte, die Zahl der Schwingungen zu vertausendfachen, so dafs Hertz mit Resonatoren von einigen Metern Länge arbeiten konnte. Auch erwies es sich als zweckmäfsig, an den Enden des Nebendrahtes Kugeln anzubringen, so dafs der Rückstau der das freie Ende erreichenden Stromteilchen verzögert, die Kapazität also erhöht wurde. Darüber soll aber erst unten gesprochen werden.

Selbstverständlich werden durch Verstärkung und Schwächung des Hauptstroms ebenfalls Induktionsströme erzeugt. Ebenso wirkt die Annäherung oder das Entfernen des Nebendrahtes an den Hauptdraht bezw. von ihm weg. Das Eintreten in schneller drehende Ringe beim Annähern trifft erst die linke Seite des Drahtes und giebt dort eine Verstärkung des entgegengesetzt gerichteten Induktionsstroms, auch wird die Anzahl der berührten Sektoren verstärkt. Beim Entfernen tritt auf der linken Seite eine entsprechende Schwächung ein, die den gleichgerichteten Stromteil überwiegen läfst.

In ähnlicher Weise kann man sämtliche Induktionserscheinungen erklären.

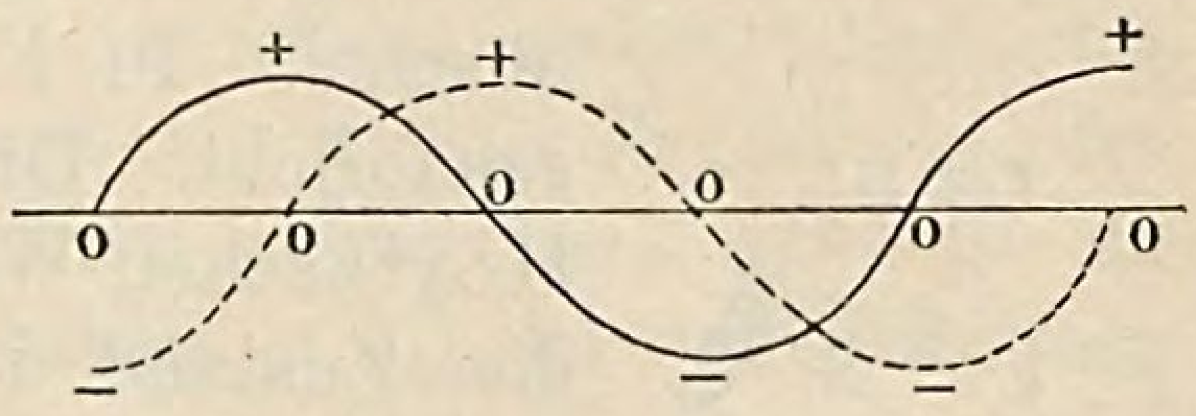
Fig. 208.



e) Elektromagnetische Wellen und elektrische Verschiebungswellen. Die Wechselströme rufen im elektromagnetischen Felde, d. h. in jedem Normalschnitt des Hauptstroms die besprochenen abwechselnd entgegengesetzten Drehungsbewegungen hervor. Wie in der offenen Orgelpfeife die akustischen Verdichtungs- und Verdünnungswellen fortschreitend einander folgen, so wandern im Normalschnitt des Drahtes Impulse vorwärts, die abwechselnd zu positiver und negativer Drehung der Ringe Anlafs geben. Schon dieses Fortschreiten kann man als einen Teil der elektrischen Strahlung, als elektrische Wellenbewegung auffassen. Zwischen jedem positiven und dem benachbarten negativen Maximum

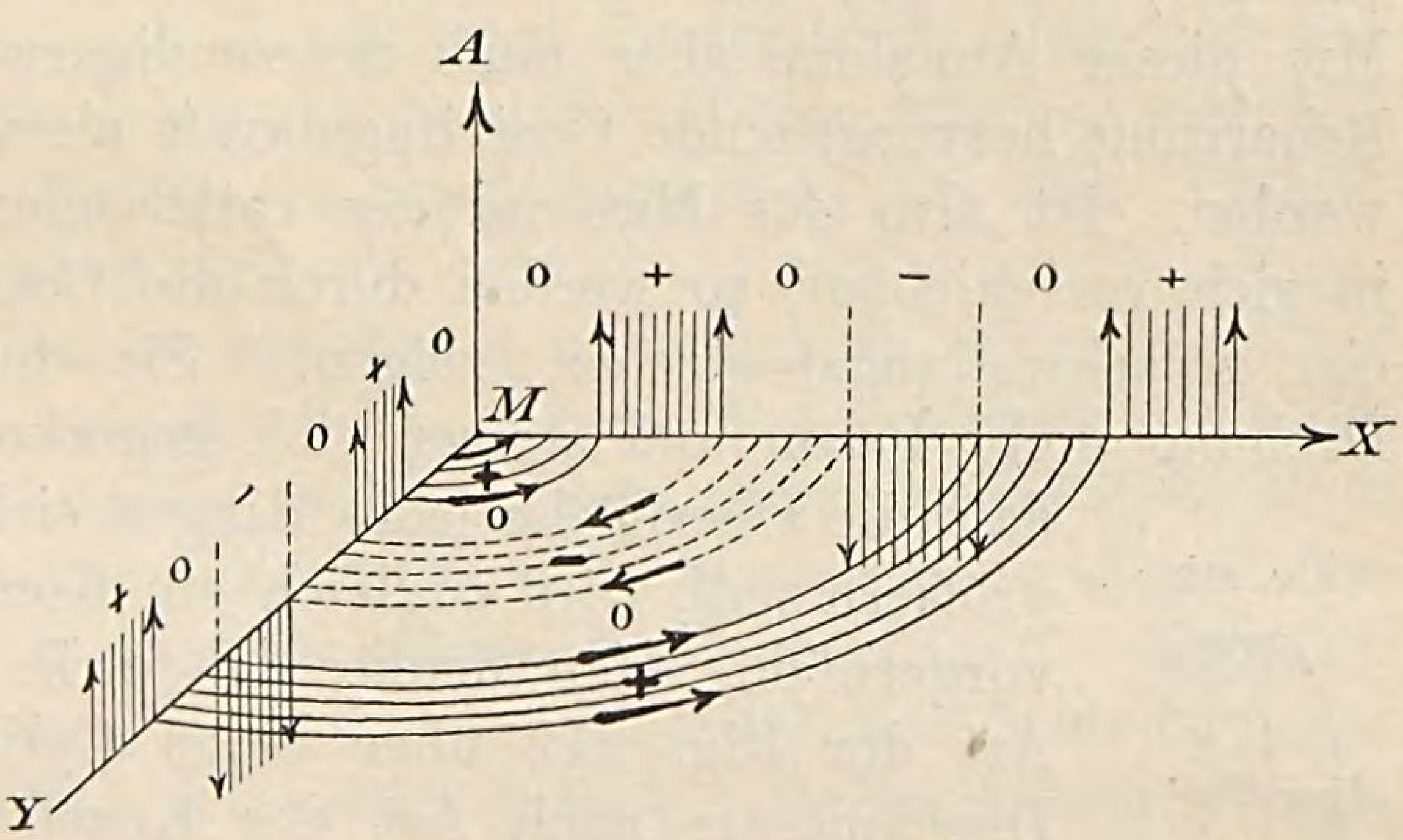
der Drehungsbewegung muſs ein Ruhezustand existieren. Stellt man die positiven Ringe durch ausgezogene Kreise, die negativen durch punktierte Kreise, die ruhenden gar nicht dar, so hat man in Fig. 208 den Zustand des Feldes für einen gewissen Zeitpunkt. In der Zeit der Maximalwirkungen giebt das Feld die meiste Energie an den besprochenen Nebendraht ab, und während die des Feldes abnimmt, wächst die des induzierten Stromes. Dieser erreicht demnach seine gröſste Energie etwa in der Zeit, wo das Feld die Energie Null hat. In Fig. 209 ist dies in Form von Sinuslinien dargestellt. Die ausgezogene bedeutet den Zustand des Feldes an bestimmter Stelle zu verschiedenen Zeiten, die punktierte den Zustand im Drahte an derselben Stelle zu verschiedenen Zeiten. Der Unterschied beträgt eine Viertelphase.

Fig. 209.



Um beide Schwingungsarten zu veranschaulichen, kann man Fig. 210 benutzen. Dort bedeutet die Zeichnung in der Normalebene des Drahtes A den Zustand des elektromagnetischen Feldes zu einer bestimmten Zeit, während die senkrecht dagegenstehenden Linien zunächst den Zustand von den das Feld durchstechenden Drähten bedeuten.

Fig. 210.



Wie nun in den leitenden Drähten Induktionsströme entstehen, so entstehen im Dielektrikum entsprechend gerichtete positive und negative Verschiebungen von geringer Gröſse, wie sie früher besprochen wurden. Folglich:

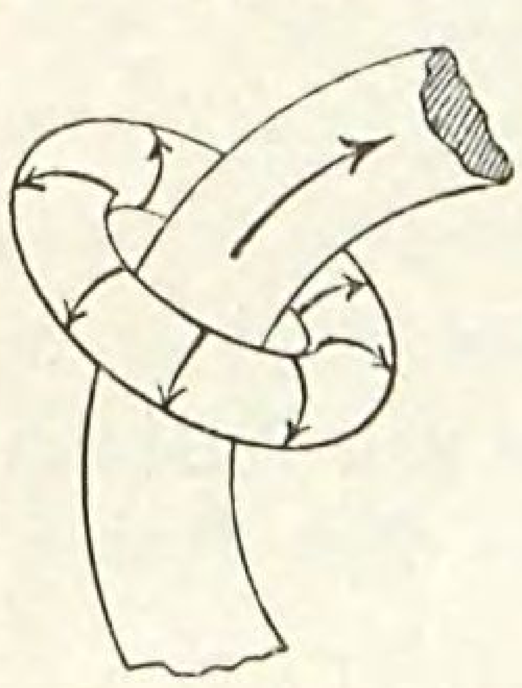
Jedes elektromagnetische Feld induziert senkrecht gegen die Hauptebene seiner Wirbelringe im Dielektrikum elektrische Verschiebungsschwingungen von gleicher Phasendauer, die jedoch um eine Viertelphase verschoben stattfinden. Umgekehrt wird jedes Feld mit Verschiebungsschwingungen senkrecht dagegen stattfindende elektromagnetische Schwingungen (entgegengesetzte Drehungen in den Wirbelringen) hervorrufen.

Bezeichnet man also in Fig. 210 die Linie MX als einen elek-

trischen Strahl, so zeigt derselbe in der Meridianebene AMX elektrische Schwingungen, in der Ebene XMY elektromagnetische Wellen. Da die Wellenschraffierung in beiden Ebenen senkrecht gegen die Strahlrichtung liegt, so spricht man auch hier von Transversalwellen, die in der Richtung MX fortschreiten.

f) Vorgang bei Kreisströmen. Bei Kreisströmen bilden die Ebenen der Wirbelringe nicht eine Parallelschar, sondern ein Ebenenbüschel. In Fig. 211 ist das Lagenverhältnis veranschaulicht. Die nachstehenden Erörterungen über die Hertzschen Wellen werden nähere Aufklärungen über den Zustand des Feldes bringen.

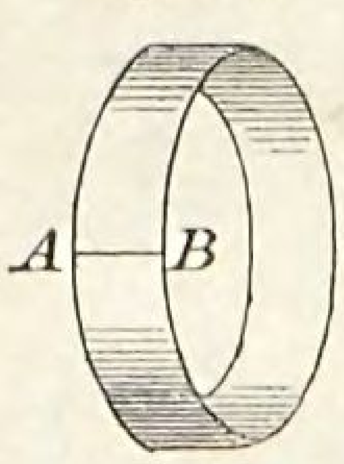
Fig. 211.



Dem Leser bleibe es überlassen, die Zeichnung zu vervollständigen und zu zeigen, dafs in der Nähe des Mittelpunktes die Wirbelringe zu je zweien gleichgerichteten Drehungssinn haben, so dafs, wie ein zwischengelegtes Hilfspartikelchen zeigt, ein gegenseitiges Unterstützen stattfindet.

g) Zugspannungen und Abstofsungsbestreben zwischen den Kraftlinien des elektromagnetischen Feldes. Bei den Wirbelringen handelte es sich um Aufnehmen und Abgeben von Energie, also war eine Art von Beharrungsvermögen anzunehmen. Mit dieser Annahme aber mufs notwendigerweise auch die aus der Beharrung hervorgehende Centrifugalkraft als vorhanden angenommen werden. Ist also das Material der rotierenden Ringe elastisch oder in sich verschiebbar, so werden durch die Centrifugalkraft die Ringe ein Anschwellungsbestreben zeigen. Sie brauchen bei stärkerer Drehung mehr Raum und stofsen sich gegenseitig ab. Dadurch nun, dafs die Oberfläche jedes Ringes sich in diesem Sinne vergröfsern will, wird zugleich ein Kontraktionsbestreben hervorgerufen. Man denke sich z. B. ein Gummiband nach Art der Fig. 212 über einen Cylinder gespannt, dessen Durchmesser nach Art des Kegels allmählich an Länge zunimmt. Je gröfser die Peripherie des Gummibandes wird, um so mehr wird seine Breite AB abnehmen. Jede Wirbelfläche also erhält ein Kontraktionsbestreben, der Ring will seine Mittellinie verkürzen. Damit sind beide Arten von Spannungen in den Kraftlinien erläutert und erklärt.

Fig. 212.

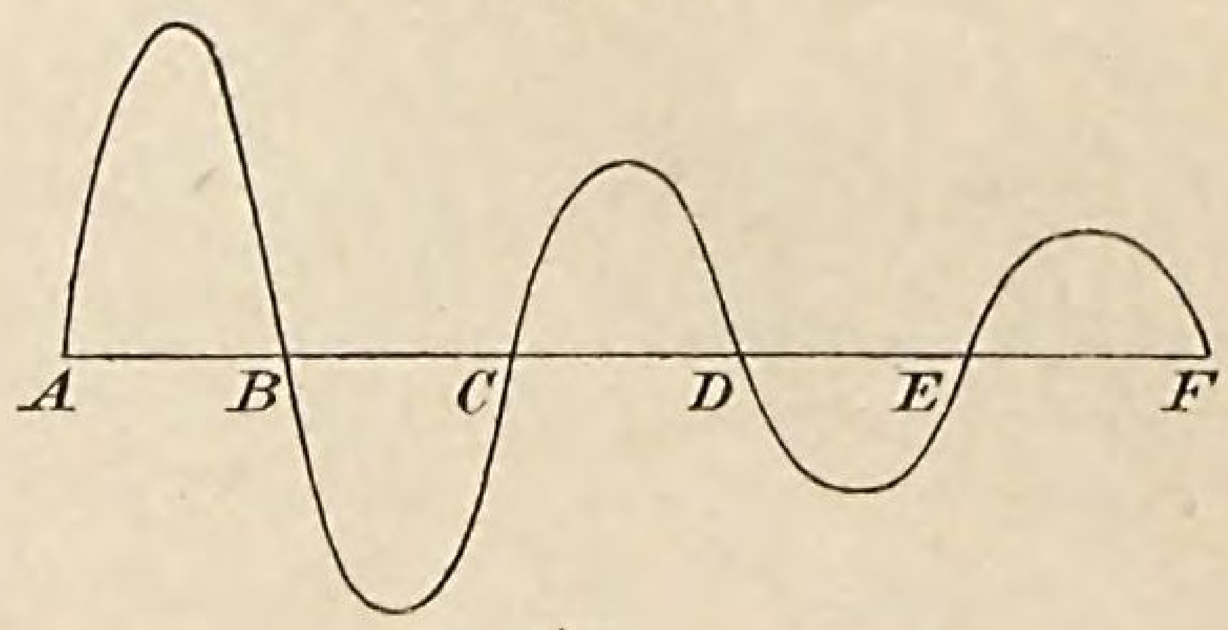


Der gleichzeitig in den Meridianebenen stattfindende elektrische Zwangszustand wird nach Art des elektrostatischen zu erläutern sein und bedarf keiner weiteren Besprechung.

273) Elektrische Funken und Hertzsche Schwingungen. Feddersen hat, wie schon bemerkt, die Beobachtung gemacht, dafs

bei Anwendung schnell rotierender Spiegel das Bild des überspringenden elektrischen Funkens als eine Reihe getrennter elektrischer Linien gleichen Abstandes erscheint. Er vermutete daher, dafs jede elektrische Entladung als eine Oszillationsentladung zu betrachten sei, was durch weitere Beobachtungen bestätigt wurde. Das oben Gesagte reicht hin, die Sache aufzuklären. Der elektrische Funke durchbricht unter hoher Spannung das Dielektrikum wie ein gewaltiger elektrischer Strom, so dafs sich rings um ihn Wirbelringe von aufserordentlicher Drehungsenergie bilden. Ist der Ausgleich der nach älterer Anschauung gegenüberstehenden Elektrizitäten erfolgt, so entsteht die Erscheinung des Öffnungsextrastroms, indem z. B. der erste Wirbelring die im umschlossenen Raume befindlichen elektrischen Teilchen vorwärts schleudert und den ursprünglich negativ geladenen zweiten Konduktor positiv ladet. Hat sich das Wirbelfeld hinlänglich beruhigt, so veranlafst die neue positive Ladung einen entgegengesetzt überspringenden Funken, der auch das Feld in entgegengesetzte Wirbeldrehung versetzt, die nun entsprechend wirkt. So wiederholen sich in äufserst kurzer Zeit zahlreiche Oszillationen, die mit einem stark abnehmenden Wechselstrom verglichen werden können und ein Veranschaulichungsbild in den Pendelschwingungen der Mechanik haben.

Fig. 213.



Solches geschieht nicht nur bei der Entladung einer Leydener Flasche, sondern auch bei den Öffnungsfunken der Nebenrolle eines Ruhmkorffschen Funkeninduktors. Folgen solche in der Zahl 1000 aufeinander, und bedeutet jeder 1000 Schwingungen, so hätte man einen Wechselstrom von der Periodenzahl einer Million. Man hat es aber bei den Teslaschen Versuchen bis 50 Milliarden Schwingungen in der Sekunde gebracht. Betrachtet man die funkengebenden Konduktoren mit ihren Ladungen im Zustande der Ruhe, so bilden sich im Raume die in Fig. 70 dargestellten Kraftlinien. Dieses System hat man sich jetzt beweglich, die zu seiner Entstehung nötigen Einwirkungen der Moleküle aufeinander als im Raum fortschreitend zu denken. Wie die magnetelektrischen Schwingungen nach ihrer Bildung vom Leiter abgelöst dem unendlichen Bereiche zuströmen, so ist es auch mit diesen Kraftlinien der Fall. Werden die Kugeln entladen, so ist es, als ob man plötzlich zwei Konduktoren entgegengesetzter Ladung herangebracht hätte, was Einschnürung und Ablösung der Anfangsteile bei den aufeinander folgenden Kraftlinien veranlafst. (Vgl. das Ein- und Abschnüren der Kraftlinien bei der Aneinanderbewegung der

in Fig. 166 dargestellten Magnete.) Dieser eine Teil geht zur Funkenstrecke zurück, der Rest bewegt sich dem unendlichen Bereiche zu, ist also vom Apparate selbst abgelöst.

Es ist ähnlich wie in der Akustik. Denkt man sich die Wellen in einer Orgelpfeife durch einen hin und her schwingenden Kolben hervorgebracht, so schreitet die Verdichtungswelle vorwärts, die Luftteilchen machen nur Oszillationen um eine feste Lage. Ein Teil der Luftteilchen kehrt mit dem Kolben zurück, während die übrigen Teile mit der Welle noch vorwärts wandern. Dasjenige, was hier vorwärts wandert, ist die elektrische Polarisation der Moleküle des Dielektrikums, die sich bei der Entladung teilweise nach der Funkenstrecke zurückzieht, während die losgelösten Teile der Polarisationslinien weiter wandern.

Fig. 214a.

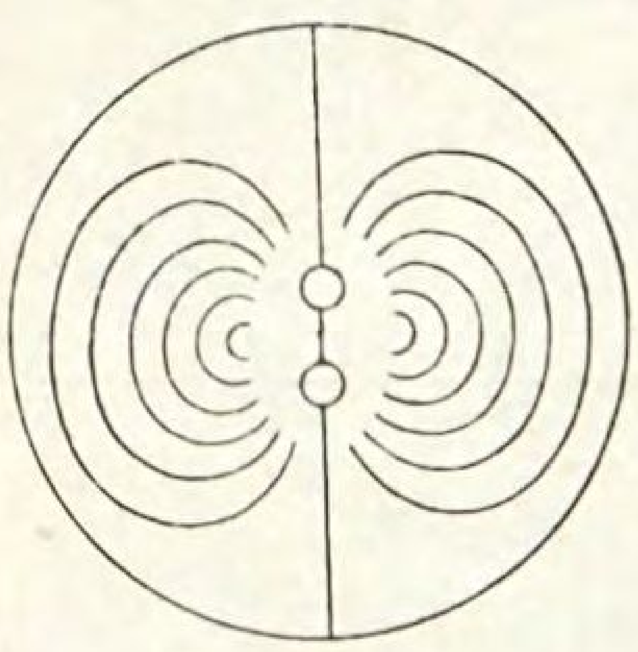
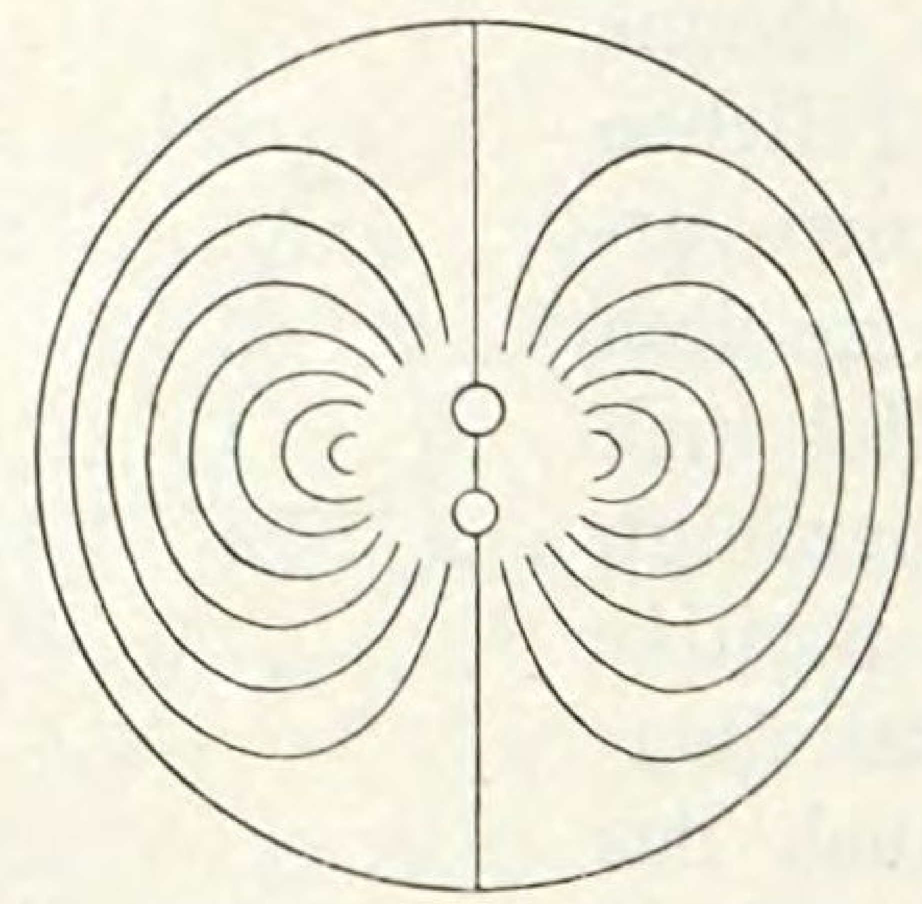


Fig. 214b.



Wie dies geschieht erkennt man aus den folgenden, im Anschlusse an Hertz dargestellten Zeichnungen. In jeder Figur deutet der äufserste Kreis die Kugel an, bis zu deren

Fig. 214c.

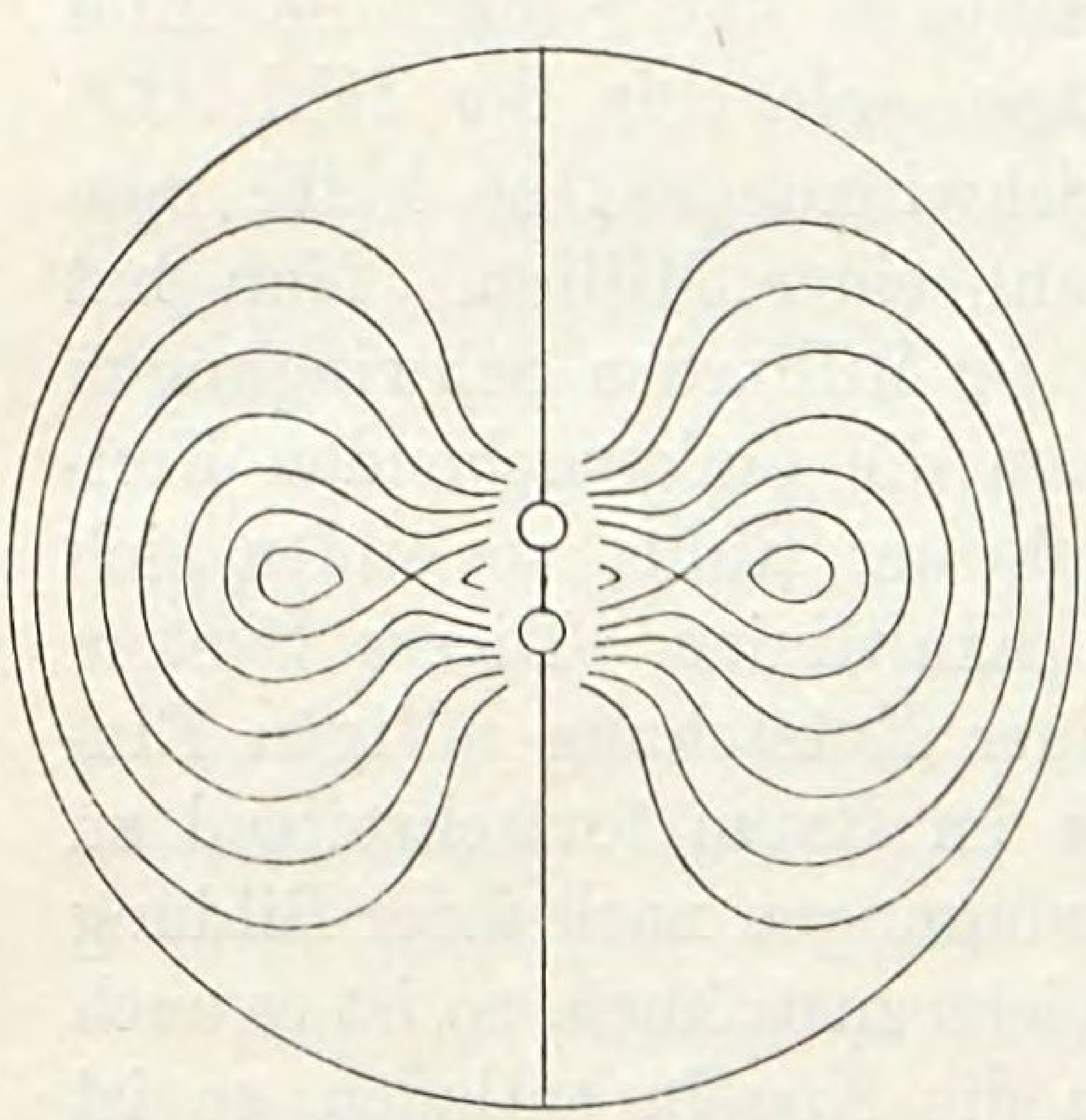
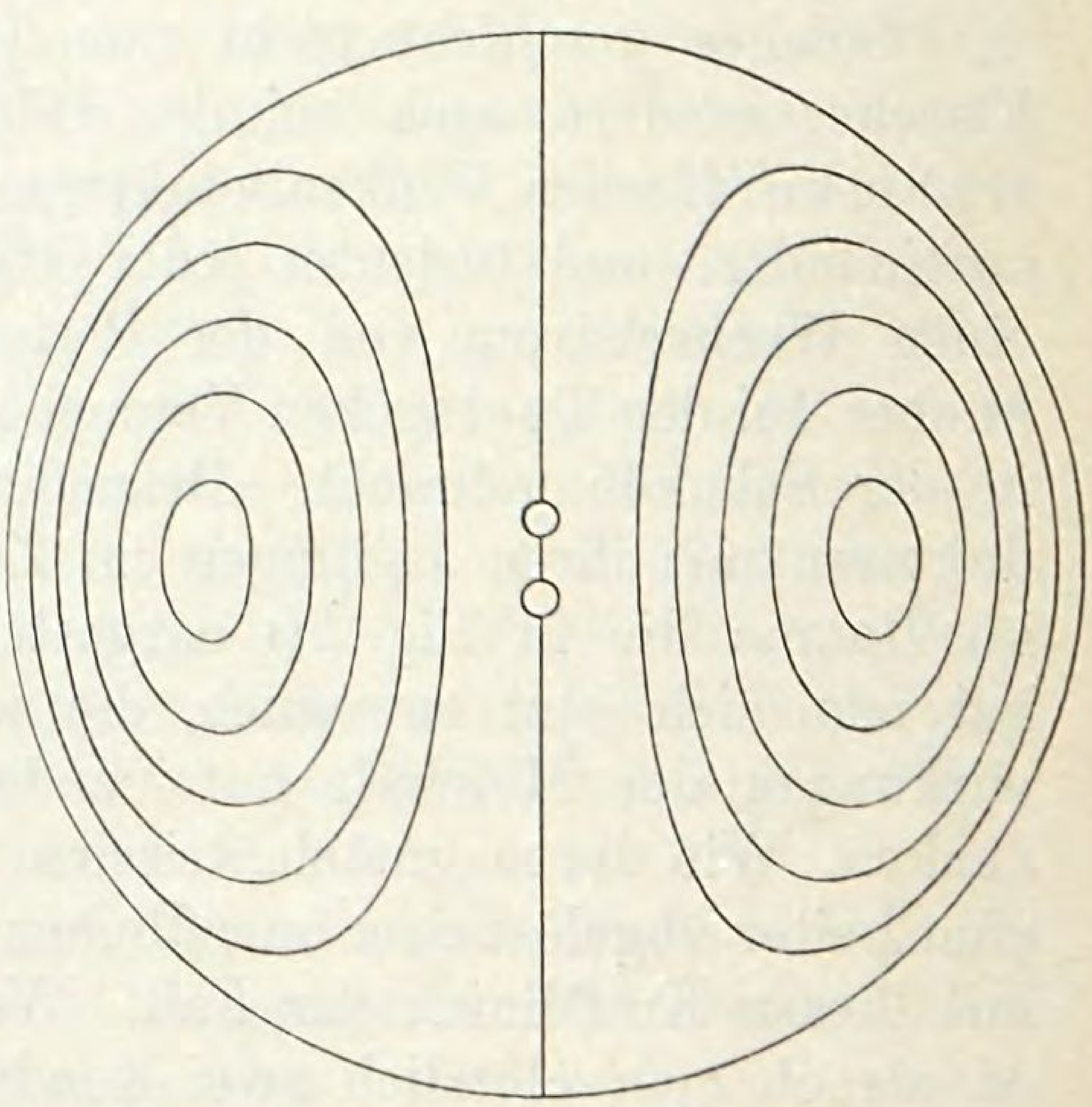


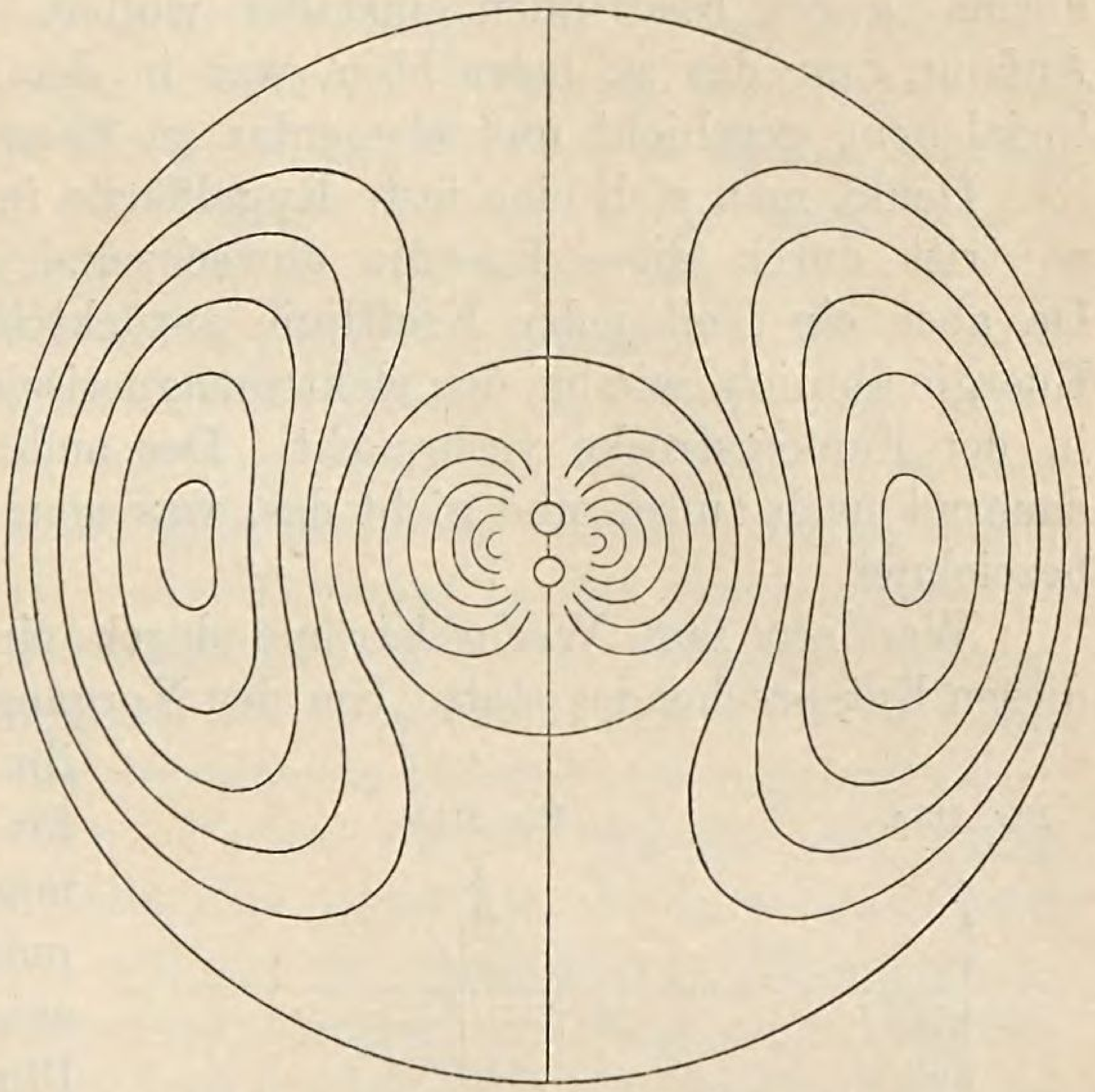
Fig. 214d.



Oberfläche die Wirkung der ersten Ladung vorgeschritten ist. Die Geschwindigkeit ihres Anwachsens giebt die Fortpflanzungsgeschwin-

digkeit der elektrodynamischen Einwirkungen in dem betreffenden Raume. In Fig. 214c ist die Entladung bereits erfolgt, so daſs die Ladung der zweiten Kugel beginnen will. Die innersten Kraftlinien haben sich nach erfolgter Einbuchtung bereits je in zwei Teile getrennt, von denen der eine zur Funkenstrecke zurückkehrt, der andere als geschlossene Linie nach auſsen wandert. Ist dieser Ablösungsprozeſs vollendet, so wird Fig. 214d maſsgebend. In der folgenden Figur ist die Wirkung der Ladung des zweiten Konduktors bereits sichtbar. Die Richtung der Kraftlinien ist der früheren entgegengesetzt zu denken. Die benachbarten Kraftlinien der beiden Systeme sind daher gleich gerichtet, es findet also gewissermaſsen Abstoſsung, ein Drängen nach auſsen statt. Die nun folgenden Figuren zeichne der Leser selbst. Die Bedeutung der Kraftlinien besteht darin, daſs in ihnen jene elektrischen Molekularverschiebungen stattfinden, von denen schon oft gesprochen wurde. Die Lagerung der Moleküle entspricht in jedem Momente der Tangente der in diesem Zeitpunkte passierenden Kraftlinie.

Fig. 214e.



Man denke sich durch den Mittelpunkt jeder Figur eine horizontale Normalebene zur Zeichnung gelegt. Auf dieser stehen sämtliche Kraftlinien senkrecht. Sie ist die Hauptebene für die elektromagnetische Wellenbewegung, die von den Funkenwechselströmen herrührt. Damit vergleiche man Fig. 210, die beide Vorgänge schematisch darstellt. Beide unterstützen sich gegenseitig, denn die elektrische Verschiebung wirkt wie ein elektromagnetische Drehungen hervorrufender Strom, umgekehrt ruft die elektromagnetische Welle elektrische Verschiebungen hervor. Die Nullstellen der einen Bewegung entsprechen den Maximalstellen der anderen. Folglich:

Die elektrodynamischen und elektromagnetischen

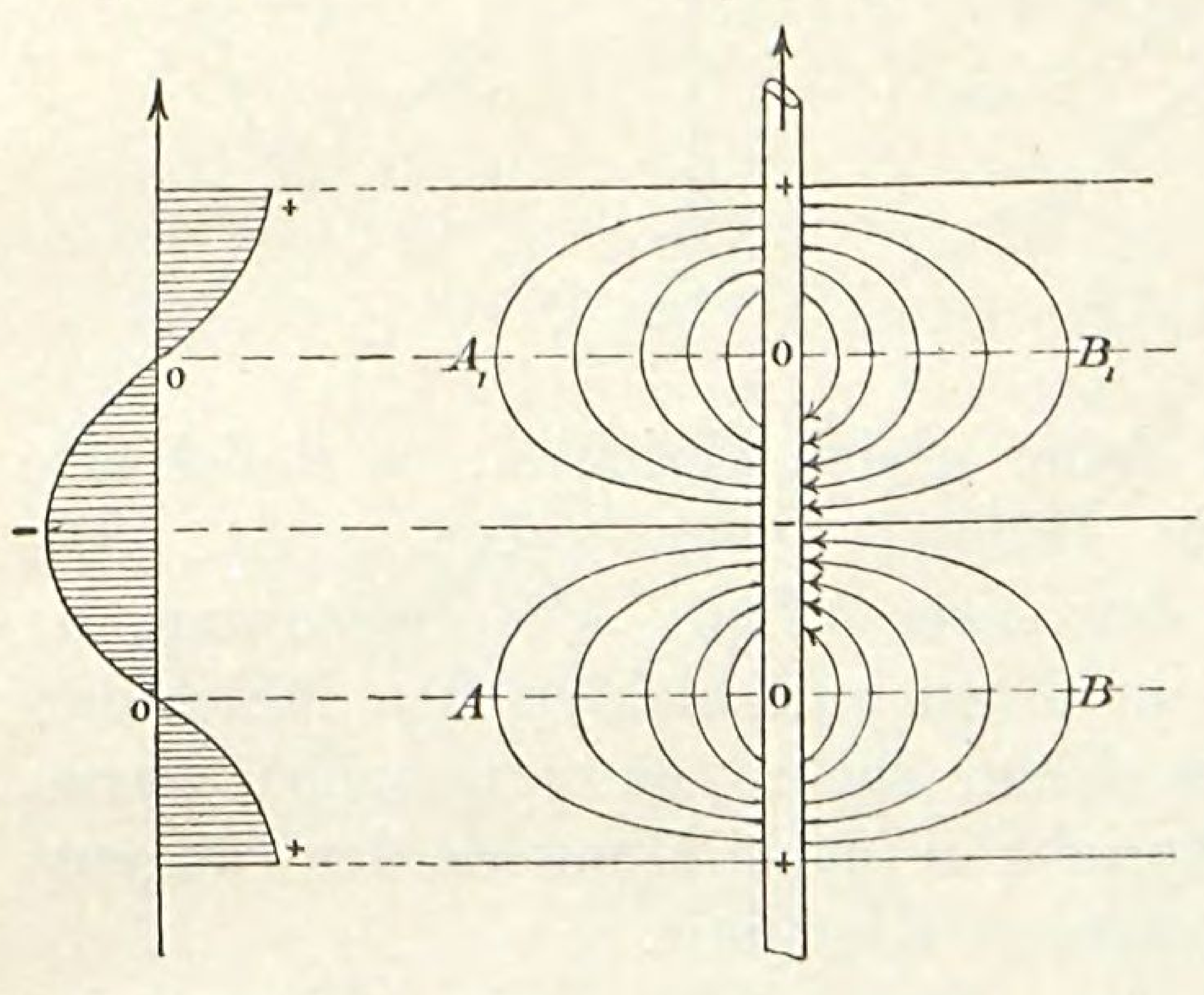
Schwingungen pflanzen sich mit derselben Geschwindigkeit im Raume fort.

Für die der besprochenen Äquatorialebene benachbarten Raumstellen findet dasselbe statt, in gröſserer Entfernung wird die Gestaltung der elektromagnetischen Wellen komplizierter, da sie sich überall normal gegen Kraftlinien einstellen wollen. Es genügt aber für den Anfang, nur das zu betrachten, was in der Nachbarschaft der Äquatorialebene geschieht und elementar zu übersehen ist.

Denkt man sich eine feste Kugelfläche in der Nähe des Centrums, so tritt durch diese Energie abwechselnd nach auſsen und innen. Da aber ein Teil jeder Kraftlinie zurücktritt, so wird ein Teil der Energie ähnlich, wie bei den elektromagnetischen Drehungsbewegungen, in der Funkenstrecke verbraucht. Der andere Teil der Energie tritt dauernd nach auſsen und giebt das, was man als elektrische Strahlung bezeichnet.

Wandern nun Wechselströme durch einen Draht, so findet bei diesen Entsprechendes statt. Um den Vorgang zu begreifen, denke man ihn sich statisch, indem man für einen bestimmten Moment die Ladung jedes Drahtpunktes sich der Sinuslinie entsprechend denkt, so daſs Plus- und Minusstellen in gleichen Abständen aufeinander folgen und zwischen je zweien eine Nullstelle liegt. Dies ist in Fig. 215a dargestellt. Fig. 215b giebt die dazu gehörigen elektrostatischen Kraftlinien in ihrem ungefähren Verlaufe. In der Ebene AB denke man sich die entsprechende elektromagnetische Polarstation. Denkt man sich nun die starr gedachte Figur mit dem Strome flieſsend, so hat man ein ungefähres Bild dessen, was geschieht. Dabei übernehmen AB und A_1B_1 die Rolle der Äquatorialebenen des vorigen Problems. Die Figur ist durch Rotation um die Drahtachse vervollständigt zu denken.

Fig. 215a. Fig. 215b.



Bei einem kontinuierlich und stationär in derselben Richtung flieſsenden Strome sind sämtliche Normalebenen mit elektromagnetischen Wirbelringen erfüllt zu denken und senkrecht gegen diese Ebene bleibt an jeder Stelle dauernde elektrische Verschiebung bestehen. Dies dürfte hinreichen, von dem Zustande des Mediums in der Umgebung von Drähten ein vorläufiges Bild zu geben.

Ist nun das Licht, wie seit Maxwell angenommen wird, eine elektrische Erscheinung, so müssen dabei sowohl die elektromagnetischen, als auch die elektrodynamischen Schwingungen stattfinden. Ist z. B. Licht polarisiert, so finden sowohl in der Polarisationsebene, als auch in der senkrecht dagegen stehenden, Schwingungen statt. Denn angenommen, die einen wären nicht vorhanden, so würden sie auf der Stelle durch die anderen induziert werden. Während also bisher zwei Schulen, die Neumannsche und die Fresnelsche, sich darüber stritten, ob die Schwingungen des polarisierten Lichtes in der einen oder in der anderen Ebene stattfänden, zeigt sich jetzt, dafs sie in beiden stattfinden, und zwar in der einen elektrodynamische, in der anderen elektromagnetische. Licht, strahlende Wärme und Elektrizität unterscheiden sich nur durch die Schwingungszahlen, die beim Licht nach Billionen, bei der Elektrizität nach Millionen zählen. Angenommen, man wäre imstande, durch Vervollkommnung der Hertzschen und Teslaschen Versuche die Schwingungen der Funkenentladungen derart zu vermehren, dafs Billionen auf die Sekunde kämen, so würde man direkt die Erscheinungen der strahlenden Wärme und des Lichtes erhalten, d. h. die Hertzschen Wellen würden Wärme- und Lichtempfindungen hervorrufen. Ob dies jemals zu erreichen sein wird, bleibe dahingestellt. Ebenso soll auf die verschiedenen Äthertheorien, die mit diesen Ergebnissen zusammenhängen, nicht eingegangen werden. Wohl aber soll der Versuch gemacht werden, über gewisse Geschwindigkeitsverhältnisse aufzuklären.

274) Hilfsbetrachtung aus der Mechanik. Bei der Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit sind Centrifugal- und Centripetalkraft gleich $\frac{4 m r \pi^2}{t^2}$, die Beschleunigung beider ist $g = \frac{4 r \pi^2}{t^2}$, also die Umlaufszeit $t = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Ist für eine zweite Kreisbewegung $t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{r_1}{g_1}}$, so stimmen beide Zeiten überein, wenn $\frac{r}{g} = \frac{r_1}{g_1}$ ist, d. h. wenn die Radien sich verhalten wie die Beschleunigungen, oder auch wie die Centrifugalkräfte.

Projiziert man eine solche Bewegung auf einen Durchmesser des Kreises, so erhält man bekanntlich die Sinusversusbewegung. Dabei wird zugleich die Centrifugalkraft auf den Durchmesser projiziert, was für die Lage α des Radius die Komponente $p \cos \alpha$ giebt. Nur diese ist auf die Bewegung von Einfluſs, nicht aber die andere Komponente $p \sin \alpha$. Die Geschwindigkeit in jedem Punkte wird

$$v = c \sin \alpha = \frac{2 r \pi}{t} \sin \alpha = \frac{2 r \pi}{2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}} \sin \alpha = \sin \alpha \sqrt{\frac{g}{r}},$$

die Beschleunigung wird $g \cdot \cos\alpha$, sie ist also ebenso, wie die Kraft, proportional dem Abstande vom Mittelpunkte. Ist also g die Beschleunigung im Abstande r, so ist die Dauer für den Hin- und Rückgang $t = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$. Dies gilt von jeder Schwingungsbewegung. Ist für zwei solche $\frac{r}{g} = \frac{r_1}{g_1} = c$, oder wenn jetzt die Entfernung von M mit x bezeichnet wird, ist für beide $\frac{x}{g} = \frac{x_1}{g_1} = c$, so sind die Schwingungen von gleicher Zeitdauer (Isochronismus). Es kommt also bei regelmäſsiger Zunahme der Beschleunigung g, die gleich $\frac{x}{c}$ gesetzt werden kann, nicht auf die Gröſse des Ausschlags an, die Zeitdauer ist stets

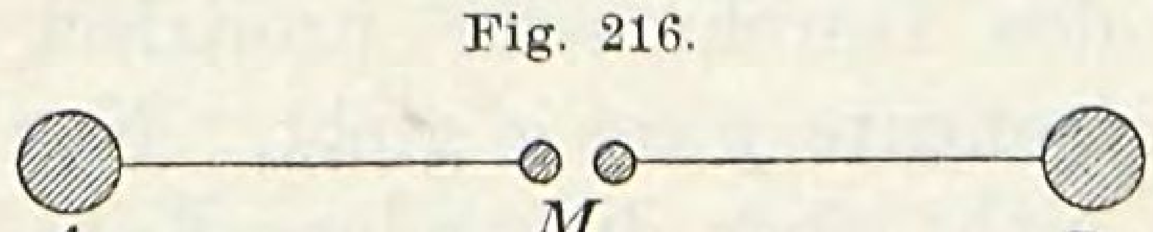
$$t = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{\left(\frac{x}{c}\right)}} = 2\pi\sqrt{c}.$$

Man vergleiche den Isochronismus kleiner Pendelschwingungen, der Schwingungen elastischer Lamellen, die Longitudinalschwingungen von Spiralfedern.

Auch in Nr. 32 war ein solches Beispiel behandelt worden. In jeder Entfernung x handelte es sich dort um eine Beschleunigung $\frac{g}{r}x$, die für $x = r$ auf $g = 9{,}81$ anwuchs; deshalb muſste dort die Schwingungsdauer werden $t = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{860 \cdot 7500}{9{,}81}}$. Dies ist das Vierfache von dem für die Zeit bis zum Erreichen des Mittelpunktes geltenden Werte, der dort richtig angegeben ist. Man kann hinzufügen, daſs im dortigen Schachte jede Schwingungsbewegung, auch bei kleinstem Ausschlage, dieselbe Dauer t hat.

Das Resultat gilt nicht nur für Kräfte und Beschleunigungen von Bewegungen, sondern von Änderungen aller möglichen Gröſsen, sobald nur während des Vorgangs die Beschleunigung stets proportional dem erreichten Werte der betreffenden Gröſse ist. Ist x der Momentanwert der Gröſse und die Beschleunigung $g = \frac{x}{c}$, so ist $t = 2\pi\sqrt{c} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$.

Fig. 216.



275) Anwendung auf die Periode der elektrischen Schwingungen bei den Hertzschen Versuchen. Bei M befinde sich die Funkenstrecke eines Ruhmkorffschen Apparates. A und B seien angeschraubte Kugeln, in denen sich, wie oben beschrieben, die bei jeder

Funkenentladung zwischen A und B oszillierende Elektrizität staut. Wie groſs ist die Zeitdauer der Schwingung? (Der Vorgang ist eine Angelegenheit der Selbstinduktion.)

In der Elektrostatik war $C = \frac{M}{V}$, d. h. Kapazität gleich Elektrizitätsmenge für die Änderung des Potentials um eine Potentialeinheit, also ist $M = C \cdot V$, folglich $\frac{M}{t} = C \cdot \frac{V}{t}$. Hier soll $\frac{M}{t}$ die in der Zeit 1 überströmende Menge, also $\frac{V}{t}$ den Zuwachs an Potential für die Sekunde bedeuten, so daſs man besser schreiben kann $J_1 - J = C \frac{V_1 - V}{t_1 - t}$, d. h. Intensitätsunterschied gleich Kapazität $\cdot \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}}$, wofür man auch $J_1 - J = C \cdot v$ schreiben kann, wenn v den Bruch und damit die Geschwindigkeit der Potentialänderung für einen gegebenen Moment bedeutet. (Vgl. Nr. 267 und 268.) Nun war nach Nr. 268

$$E = L \frac{J_1 - J}{t_1 - t},$$

d. h. die elektromotorische Kraft gleich dem Koeffizienten der Selbstinduktion multipliziert mit der Geschwindigkeit der Intensitätsänderung (L ist die Konstante für das System AB). Da aber $J_1 - J = C(v_1 - v)$ ist, so folgt

$$E = L \frac{J_1 - J}{t_1 - t} = CL \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = CLg.$$

Hier bedeutet g die Geschwindigkeit der Geschwindigkeitsänderung von V, d. h. die Beschleunigung der Potentialänderung, und diese Beschleunigung ist nun

$$g = \frac{E}{CL},$$

oder, wenn man die veränderliche Gröſse E mit x bezeichnet,

$$g = \frac{x}{CL} = \varkappa x.$$

Nimmt man nun an, das Hin- und Herpendeln der Elektrizität geschehe nach dem Gesetz der im vorigen Abschnitt betrachteten Sinusversusbewegung, was man nach den Analogien mechanischer Art annehmen darf, so folgt nach vorigem Abschnitt, ganz unabhängig davon, welche Ausschlagsgröſse $E = x$ erreicht, als Schwingungsdauer

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{x}{\left(\frac{x}{CL}\right)}} = 2\pi \sqrt{CL}.$$

Folglich: Die Schwingungsdauer ist proportional der Quadratwurzel aus dem Produkte der Konstanten L der

Selbstinduktion für das System AB und der Kapazität desselben.

Die Zahl der Schwingungen ist

$$n = \frac{1}{t} = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}.$$

Ist also $2l = 2AB$ die Länge des Hin- und Hergangs, so ist die Geschwindigkeit der Elektrizitätsbewegung in dem betrachteten System im Mittel

$$v = \frac{2nl}{t} = \frac{nl}{\pi\sqrt{CL}}.$$

Sind demnach zwei von den Gröfsen v, C, L bekannt, so kann man die dritte berechnen.

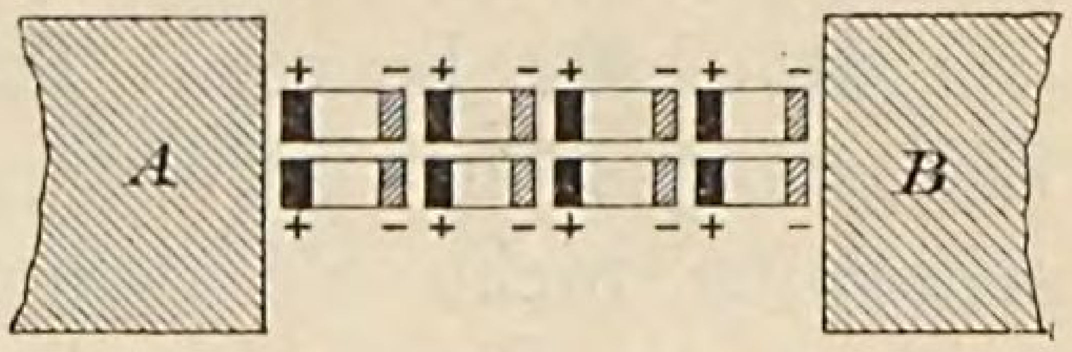
276) **Bemerkungen.** Mit diesem Einblick in die Schwingungsverhältnisse soll dieser Abschnitt beschlossen werden. Angedeutet mag werden, dafs eine Formel für die Geschwindigkeit der Elektrizität im Raume existiert, die der Schlufsformel ganz analog und vielleicht auch der elementaren Behandlung zugänglich ist. Die Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional dem Ausdrucke $\sqrt{\varkappa\mu}$, wo $\varkappa$ das spezifische Induktionsvermögen, μ der Peremabilitätskoeffizient im Dielektrikum ist.

Die Gröfsen $\varkappa$ und μ hängen ebenso wie v innig mit dem absoluten Mafssystem zusammen. Nach elektromagnetischem Mafs gemessen ist $\mu = 1$, elektrostatisch gemessen ist $\varkappa = 1$. Mifst man dagegen $\varkappa$ elektromagnetisch, so ist $\varkappa_1 = \frac{1}{v_2}\cdot$ Hier bedeutet v das Verhältnis der Einheiten der Elektrizitätsmenge in den beiden genannten Mafssystemen (vgl. Anhang) also $v = 3{,}004 \cdot 10^{10}$ im C. G. S.-System. Diese Zahl ist nach Cornu sehr genau gleich der Geschwindigkeit des Lichtes im luftleeren Raume (vgl. Anhang). Will man dieses Resultat als Beobachtungsergebnis gelten lassen, so würde auch dieser Punkt erledigt sein. Die Theorie soll aber alles aus den Grundhypothesen rechnend ableiten. So giebt z. B. Poincaré im Anschlufs an Neumann für L die Formel $L = 2l\left(\overset{e}{\lg}\frac{4l}{d} - 1\right)$, wo l die Länge, d die Dicke des Drahtes im System AB bedeutet. Vorgeschrittene Leser finden die mathematischen Ableitungen bei Poincaré: Elektrizität und Optik. Auch Wüllner verzichtet auf die theoretische Ableitung und verweist auf die genannte Schrift.

Nach den Hertzschen Erfolgen bedarf die Kinematik der Ätherteilchen, auf welche die Elektrizitätslehre mathematisch gegründet werden soll, einer vollständig neuen und durchgreifenden Bearbeitung, durch welche z. B. auch die Neumannschen Bedenken beseitigt werden. Kaum zu bestreiten ist der grofse Erfolg der Faradayschen An-

sichten über das Dielektrikum und der Maxwellschen Begründung derselben. Zunächst ist durch Hertz nachgewiesen, was Faraday vermutete, daſs die früher als Leiter betrachteten Stoffe eigentlich Nichtleiter der elektrischen Schwingungszustände sind, denn diese Schwingungen werden von Metallen reflektiert, wie die Lichtschwingungen von einem Spiegel, während die Dielektrika sie durchlassen, brechen u. s. w. Demnach bedarf auch die elektrostatische Polarisation, die in Nr. 59 und 129 besprochen wurde, jetzt noch einer endgültigen Korrektur. Dort wurde eine elektrische Belegung auf den Konduktoren angenommen, die polarisierend auf das Dielektrikum einwirkte. Die betreffenden Zeichnungen sind nach Hertz bezw. Maxwell dahin abzuändern, daſs wenn auf A eine positive Belegung angenommen war, diese nicht dort, sondern auf den benachbarten Molekülen des Dielektrikums sich befindet. Jetzt wird sich dieser Auffassungsweise, die dort noch nicht berücksichtigt war, kein Zweifel mehr entgegenstellen.

Fig. 217.



Blickt man nun noch einmal auf die kinetische Betrachtungsweise des elektrischen Feldes zurück, so wird man bemerken, daſs dort der Kraftbegriff kaum noch eine Rolle spielt, daſs dagegen Verkoppelungen der Äthermoleküle untereinander die Übertragung der Bewegungen besorgen. Das Streben neuerer Forscher geht überhaupt dahin, den Kraftbegriff aus der Mechanik zu entfernen und nur noch Bewegungsvorgänge zu beschreiben.

Auch Kirchhoff schreibt in der Vorrede zu seiner Mechanik: „... Aus diesem Grunde stelle ich es als die Aufgabe der Mechanik hin, die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen zu beschreiben, und zwar vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben. Ich will damit sagen, daſs es sich nur darum handeln soll, anzugeben, welches die Erscheinungen sind, die stattfinden, nicht aber darum, die Ursachen zu ermitteln.“

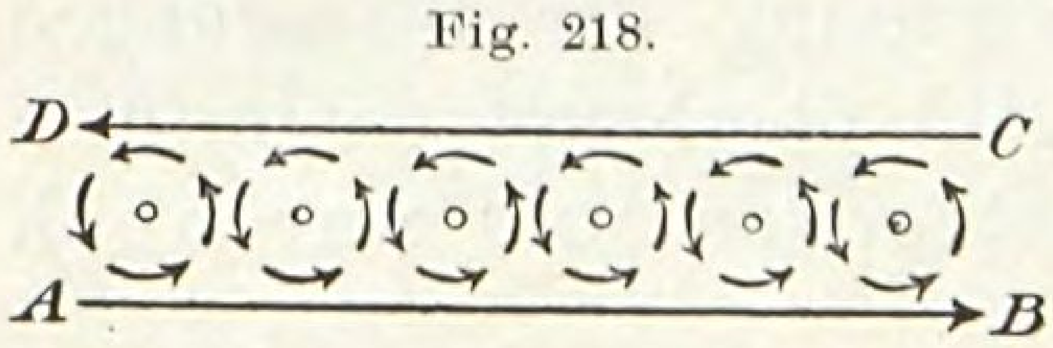
Bekanntlich hat Hertz den Versuch gemacht, in dieser Hinsicht die letzten Konsequenzen zu ziehen. Nach dem frühen Tode des genialen Forschers hat Helmholtz dessen Ideen herausgegeben. Damit ist an die Mathematiker und Physiker nicht nur die Aufforderung ergangen, das gesamte Gebiet ihres Faches auf neue Grundlagen zu stellen, sondern zugleich auch der Weg angedeutet, wie etwa die groſse Aufgabe zu lösen sei.

Das hier Gegebene kann nur als ein erster Einblick in die betreffenden Gebiete der Wissenschaft betrachtet werden, und mehr konnte bei der Anwendung rein elementarer Hilfsmittel kaum geboten werden.

277) Die elektrische Strahlung im Äther. In der vorangegangenen Erörterung ist nicht hinreichend berücksichtigt worden, welchen Einfluſs die elektrischen Verschiebungen auf die Moleküle ihrer Normalebene ausüben. Dies soll jetzt nachgeholt und damit die von Maxwell aufgestellte und von Helmholtz adoptierte Vorstellung über die Strahlung im Äther in ihrer reinen Gestalt klar gelegt werden.

Zwischen elektrischer und magnetischer Polarisation findet nach Maxwell volle Gegenseitigkeit statt. a) Die geradlinige elektrische Verschiebung bringt in der Normalebene magnetische Polarisation bei zirkularer Anordung der Moleküle hervor. Ist die positive Elektrizität aus der Zeichnungsebene in der Richtung auf den Betrachter hin herausgetreten, so giebt die Achsenlage SN jedes Molekularmagnets die Richtung an, die der Drehung des Uhrzeigers entgegengesetzt ist. b) Die geradlinige magnetische Verschiebung bringt ganz ebenso in der Normalebene elektrische Polarisation bei zirkularer Anordnung der Moleküle hervor. Tritt jedoch der Nordmagnetismus aus der Zeichnungsebene hervor, so geschieht die elektrische Drehungsverschiebung nicht wie vorher, der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt, sondern im Sinne derselben. Dieser Gegensatz entspricht dem von Wirkung und Gegenwirkung. c) Eine geradlinige Reihe zirkularer Polarisationen, mögen diese magnetischer, oder elektrischer Art sein, wirken so, wie zwei geradlinige Verschiebungen, die parallel zur Reihe in derselben Ebene stattfinden. Es ist dabei anzunehmen, daſs im Zwischenraum zwischen je zwei Kreisen die entgegengesetzten Drehungsverschiebungen einander aufheben, daſs jedoch an den beiden Auſsenrändern, wo die Richtungen übereinstimmen, eine einheitliche Verschiebung stattfindet, gegen die alles andere vernachlässigt werden kann. (Vgl. Fig. 218.)

Fig. 218.

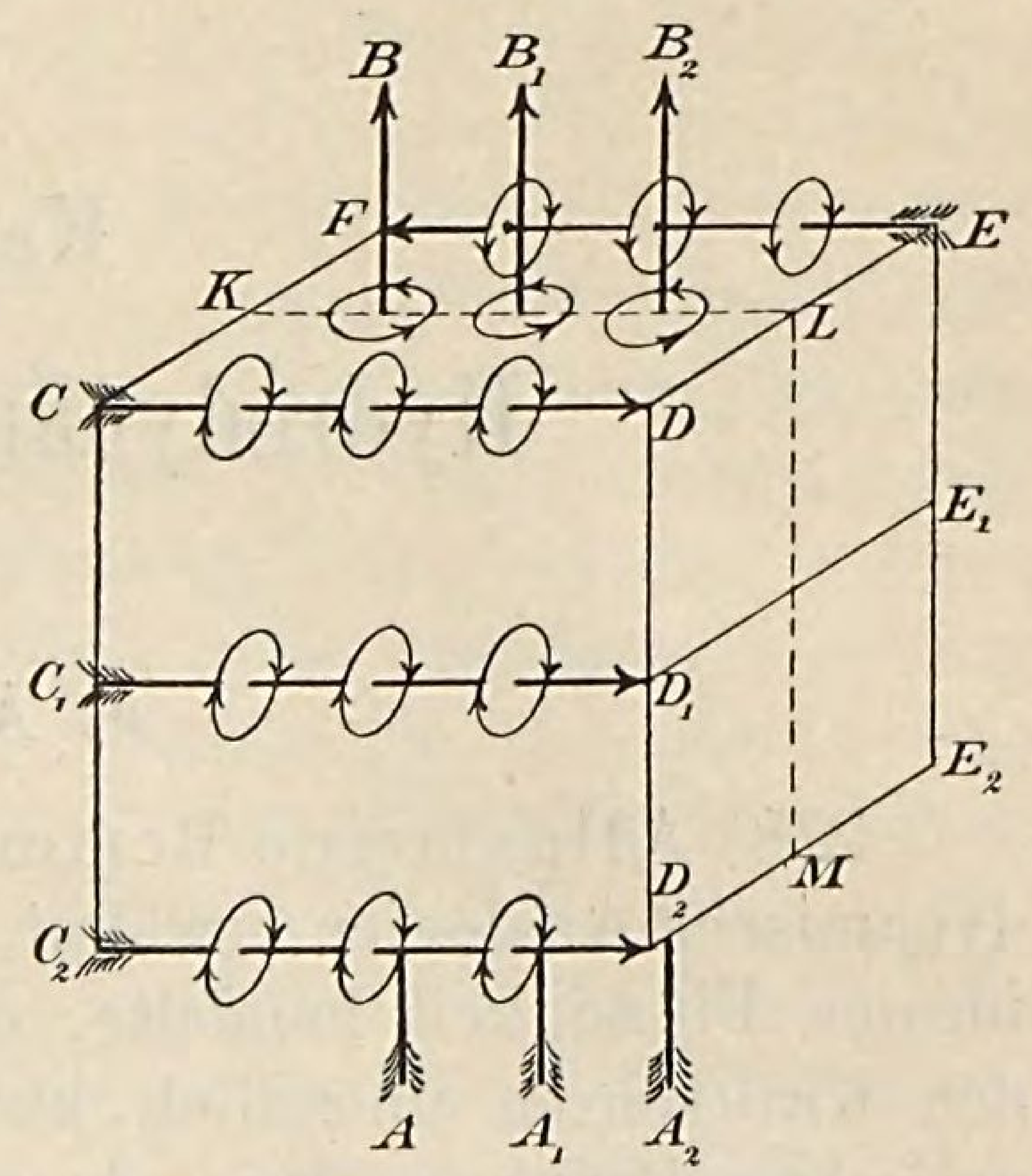


Giebt man zu, daſs diese drei Annahmen berechtigt und naturgemäſs sind und daſs sie im Einklang stehen mit den früheren Untersuchungen, so ergiebt sich das im folgenden dargestellte in ganz zwangsloser Weise.

In gröſserer Entfernung von dem die Strahlung veranlassenden Erreger kann man ein kleines Stück der Fläche, bis zu welcher der Vorgang fortgeschritten ist, als eben betrachten, möge sie selbst cylindrisch, kugelförmig oder sonst wie beschaffen sein. Diese Fläche sei die senkrechte Schnittfläche KLM des im Ätherraume befindlichen Würfels (Fig. 219). AB, A_1B_1, A_2B_2 seien senkrechte elektrische Verschiebungen in dieser Fläche, die in der oberen Horizontalfläche des Würfels und in jeder Parallelebene der letzteren die angedeuteten magnetischen Polarisationen herbeiführen, die durch horizontale Kreise dargestellt werden.

Nach der Annahme c) entstehen in jeder Horizontalschicht magnetische Verschiebungen CD, C_1D_1, C_2D_2 nach rechts gerichtet und ebensolche EF, E_1F_1, E_2F_2 nach links gerichtet. Durch diese magnetischen Verschiebungen aber entstehen elektrische Zirkularpolarisationen, die durch senkrecht stehende Kreise angedeutet sind.

Fig. 219.



An der Vorderfläche des Würfels geben diese aufsen eine elektrische Verschiebung nach oben, innen eine elektrische Verschiebung nach unten. An der Hinterfläche findet entsprechendes statt. Die beiden zu zeichnenden inneren Verschiebungen heben die ursprünglichen Verschiebungen AB u. s. w. auf, so dafs nur die gleich gerichteten äufseren elektrischen Verschiebungen bestehen bleiben.

Die neuen Verschiebungen veranlassen magnetische Polarisationen, die zu je zwei magnetischen Pfeilen Anlafs geben, von denen je einer bestehen bleibt, während der andere einen der Pfeile CD bezw. EF vernichtet. Also:

Die Gruppe AB der senkrechten elektrischen Verschiebungen ruft zwei Gruppen horizontaler magnetischer Verschiebungen CD und EF hervor. Diese rufen senkrechte elektrische Verschiebungen hervor, durch welche die erstgenannten aufgehoben werden, während vorn und hinten eine Gruppe gleich gerichteter neu entsteht. Jede von diesen wirkt nach vorn und hinten ebenso, wie die ursprüngliche Gruppe AB, hebt die magnetischen Horizontalverschiebungen CD und EF auf und setzt neue an ihre Stelle.

So findet abwechselnd, sowohl in der Richtung nach vorn und nach hinten, senkrechte elektrische und horizontale magnetische Verschiebung statt.

Auf dieser Grundvorstellung sind die Maxwellschen Hauptgleichungen aufzubauen, an deren Studium der Leser an der Hand von Maxwell-Weinstein, Helmholtz (Vorlesungen Bd. V) oder Tumlirz (Elektromagnetische Theorie des Lichtes, erschienen bei B. G. Teubner) nun gehen mag. Hier genüge es, ein Bild der elektrischen und magnetischen Schwingungen bezw. Verschiebungen innerhalb des Ätherraums zu geben, die, je nach ihrer Geschwindigkeit, den Eindruck von Licht-, Wärme- oder Elektrizitätsschwingungen machen.

Kapitel XIV.

Hydrodynamische Analogien.

a) Allgemeines.

278) Allgemeine Bemerkungen. Schon früher wurden hydrodynamische Analogien erwähnt, bei denen es sich um Bewegungen einer idealen Flüssigkeit handelte, die so erfolgten, als ob das Fliefsen in den Kraftröhren unendlich kleinen Querschnitts für irgend ein magnetisches Problem (bei nur positiven Massen konnte es auch ein Gravitationsproblem sein) geschehen müfste, und zwar ohne jede Reibung bei absoluter Inkompressibilität. Die Geschwindigkeit in jedem Punkte entsprach dabei nach Gröfse und Richtung der anziehenden oder abstofsenden Kraft des Potentialproblems, das Geschwindigkeitspotential entsprach der Kräftefunktion, d. h. dem eigentlichen Potential. Denkt man sich die Kanalwände weg, so hat man vorauszusetzen, dafs die mit nicht ganz gleichen Geschwindigkeiten aneinander hingleitenden Stromfäden keine Reibung aufeinander ausüben, so dafs die Flüssigkeitsteilchen nur fortschreitende Bewegungen erhalten, nicht aber sich um die eigene Achse drehen. Geschähe letzteres, so würde der Vorgang ein sehr komplizierter werden, der Raum, in dem es geschähe, würde aus dem Potentialproblem auszuscheiden sein. Man kann überhaupt für den ausgeschlossenen Teil keine Kräftefunktion ausfindig machen, aus der sich die Bewegungen für den Raum ableiten liefsen. Dort giebt es kaum Gemeinschaftliches, fast nur Individuelles, man sagt, für diesen Raum existiere kein Potential.

Aufserdem mufs, da man auf die Trägheit nicht wohl verzichten kann, angenommen werden, dafs die Trägheit auf die Gröfse und Richtung der Bewegungen ohne Einflufs sei. Jedes Teilchen, welches auf einer Kurve zu wandern hat, will ja infolge der Trägheit diese verlassen. Man mufs annehmen, dafs dieses Bestreben, aus der Bahn zu weichen, irgendwie aufgehoben werde.

Im allgemeinen giebt man den Kraftröhren rechteckigen Querschnitt. Betrachtet man einen Rechteckskörper der Flüssigkeit mit den

Kanten a, b, c, der in einem solchen Kanale fließt, so bleibt er ein Rechteckskörper, jedoch ändern sich die Kantenlängen a, b, c. Da aber Inkompressibilität angenommen ist, so bleibt der Inhalt $abc = a_1 b_1 c_1$, also konstant. Die einem Würfel einbeschriebene Kugel verwandelt sich in ein einbeschriebenes Ellipsoid gleichen Inhalts, es findet für die verschiedenen Gestalten eines Teilchens Affinität in den kleinsten Teilen bei ungeändertem Rauminhalt statt.

Zu dieser Umwandelung ist in der Wirklichkeit ein gewisser Arbeitsaufwand nötig, so daſs eigentlich von einem freiwilligen stationären Zustande nicht die Rede sein kann. Von solchen Reibungswiderständen sehen wir ab, um den stationären Zustand zu ermöglichen. Zur Überwindung müſste eine Art von Triebkraft angenommen werden. Den Widerstand einer Zelle der potentiell gleichwertigen Einteilung gegen die betreffende Umformung des Wasserkörpers könnte man definieren als den Quotienten aus der Potentialdifferenz der beiden Grenzflächen (Geschwindigkeitspotential!) und der jeden Querschnitt passierenden Flüssigkeitsmenge. Dies würde eine Reduktion auf die Masseneinheit bedeuten, und damit ganz analog sein der Ausdrucksweise in der Elektrizitätslehre, wo der Widerstand einer Zelle ebenfalls aus dem Quotienten der Potentialunterschiede der beiden Grenzflächen und der passierenden Elektrizitätsmenge erklärt wird. Oben wurde von solchen Betrachtungen absichtlich abgesehen. Die für die Kräfte eines Potentialproblems geltenden Gleichungen $pw = p_1 w_1$, $pF = p_1 F_1$, $p = \varkappa \frac{V_1 - V_2}{w} = \varkappa G$ gingen einfach über in Gleichungen für die Geschwindigkeiten, welche lauteten

$$vw = v_1 w_1, \quad vF = v_1 F_1, \quad v = \varkappa \frac{V_1 - V_2}{w} = \varkappa G.$$

Besonders einfach wurde alles bei den zweidimensionalen Problemen des logarithmischen Potentials. Dort fand überall Einteilung in kleine Quadrate oder ähnliche Rechtecke statt. Die Affinität in den kleinsten Teilen wurde zur Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen. Die Geschwindigkeiten wurden umgekehrt proportional den Dimensionen der kleinen Quadrate. Zu jedem Probleme gehörte ein Vertauschungsproblem, d. h. Strom- und Potentiallinien konnten ihre Rollen wechseln.

Fig. 142 z. B. stellt das System der konfokalen Ellipsen und Hyperbeln dar. Ob die Bewegung in den hyperbolischen oder in den elliptischen Kanälen erfolgt, ist gleichgültig. In letzterem Falle kann man sich den Vorgang folgendermaſsen vorstellen. Das Gefäſs sei ein elliptischer Cylinder mit einer Einsatzwand, die der Brennlinie entspricht. Um diese Scheidewand herum denke man sich die Flüssigkeit in Bewegung gesetzt, z. B. mit Hilfe von Schaufeln. Nach einiger Zeit werden sich etwaige störende Wirbelbewegungen

beruhigen, allmählich tritt eine Art stationärer Zirkulation um die Scheidewand herum infolge der Beharrung ein. Diese ist zu untersuchen. Unter den angegebenen Voraussetzungen erfolgt sie so, wie die Figur sie beschreibt.

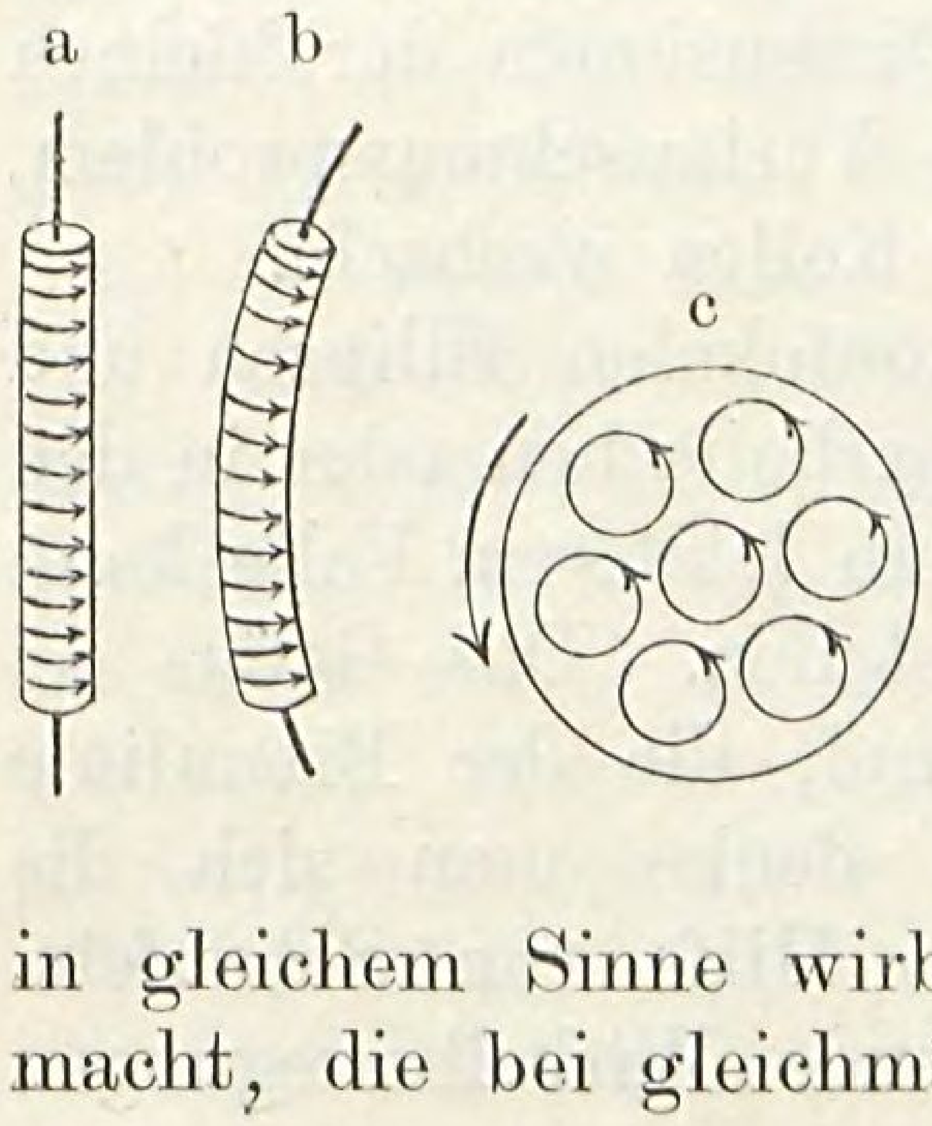
Entsprechendes findet bei anderen Problemen zweidimensionaler Art statt. Bei Mehrpunktproblemen bezw. ihren Vertauschungsproblemen kann man Einsätze entbehren, es ist aber für die Anschauung gut, sich Cylinder geringen Durchmessers an Stelle der Punkte zu denken, wobei das Zirkulieren der Flüssigkeit verständlicher wird. Man vgl. z. B. Fig. 125, 127, 129, 130. So lassen sich alle Strömungsnetze hydrodynamisch deuten.

Helmholtz ist es gewesen, dem es gelang, den Einfluſs von Wirbelbewegungen auf den umgebenden wirbellosen Wasserraum und die gegenseitigen Einwirkungen der Wirbel unter sich in den Grundzügen aufzuklären, indem er die betreffenden Bewegungsgleichungen integrierte. Da hier von höherer Analysis ganz abzusehen ist, müssen wir auf die Wiedergabe seiner Rechnungen verzichten. Das neu erschlossene Gebiet ist aber von derartigem Interesse, daſs der Versuch gemacht werden soll, mit Hilfe der von Helmholtz aufgedeckten elektromagnetischen Analogien die stattfindenden Bewegungen zu beschreiben, wobei nur Sätze benutzt werden sollen, die früher abgeleitet wurden. Leser, die der höheren Analysis mächtig sind, würden auf die „Gesammelten Abhandlungen“ von Helmholtz, Bd. I, auf die „Mechanik“ von Kirchhoff, auf Auerbachs „Theoretische Hydrodynamik“ und auf die Inauguraldissertation von Gröbli über Wirbelfäden (Zürich bei Zürcher u. Fugger) zu verweisen sein.

b) Wirbelbewegungen.

279) Analogien zwischen einem Wirbelfaden und einem elektrischen Strome. Man denke sich in unbegrenzter Wassermasse einen geraden oder gekrümmten Cylinder, in dem sich eine groſse Anzahl wirbelnder Elementarcylinder befinden. (Fig. 220.) Fig. c stellt den Querschnitt eines solchen Komplexes dar, durch den man an die Ampèresche Darstellung magnetischer Molekularströme erinnert wird, die durch einen Solenoidstrom ersetzt werden können. Es wird sich zeigen, daſs, wenn alle Elementarcylinder in gleichem Sinne wirbeln, auch der Gesamtcylinder eine Drehung macht, die bei gleichmäſsiger Drehung der Elementarwirbel um den

Fig. 220.



Mittelpunkt vor sich geht, bei ungleichmäßiger Drehung um den zu definierenden Schwerpunkt erfolgt. Ist der Querschnitt nicht kreisförmig, so hat er periodische Schwankungen durchzumachen u. s. w. Jeder Elementarwirbel wird als Wirbelfaden bezeichnet. Er besteht aus unzähligen Wirbellinien (parallel zu seiner Mittellinie). Die Randgeschwindigkeit seiner Wirbelbewegung an jeder Stelle wird als Geschwindigkeit des Wirbelfadens an dieser Stelle bezeichnet.

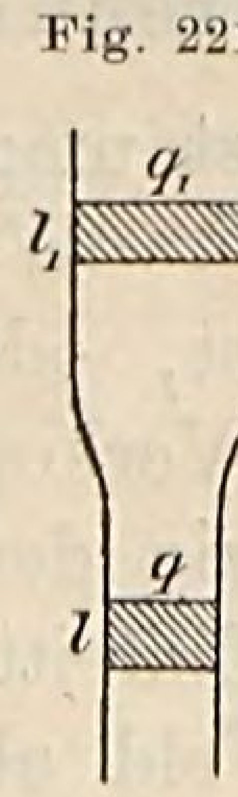
Das Produkt aus Randgeschwindigkeit und Querschnitt heißt Intensität des Wirbelfadens.

Wir vergleichen den stationären elektrischen Strom im Drahte und seine elektromagnetisch polarisierte Umgebung mit dem Wirbelfaden im Wasser, die auf die nordmagnetische Einheit ausgeübte Kraftwirkung des ersteren mit der Geschwindigkeit, die der Wirbel einem in entsprechender Lage befindlichen Wasserteilchen giebt. Die Analogien, die von Helmholtz entdeckt sind, sollen beschrieben werden. Vorläufig kann man sich dabei den Wirbelfaden im allgemeinen als geradlinig denken.

a) Der stationäre elektrische Strom hat in allen Teilen des Drahtes dieselbe Intensität, d. h. durch den Querschnitt fließt überall dieselbe Elektrizitätsmenge. Der Querschnitt darf dabei nirgends gleich Null werden, da sonst die hypothetische Flüssigkeit mit unendlicher Geschwindigkeit bezw. Dichte fließen müsste. Der Strom muß also entweder geschlossen sein, oder sich beiderseits ins Unendliche ausdehnen. Analog:

Der Wirbelfaden hat in allen Teilen dieselbe Intensität $J = q\varkappa$, wo q den Querschnitt, $\varkappa$ die Randgeschwindigkeit der Wirbelbewegung bedeutet. Der Querschnitt darf nirgends gleich Null werden, da sonst unendlich große Randgeschwindigkeiten stattfinden würden. Der Wirbelfaden erstreckt sich also entweder ins Unbegrenzte, oder er läuft in sich selbst zurück, oder er endigt dort, wo die Flüssigkeit zu Ende ist.

Fig. 221.



Es ist also $q : q_1 = v_1 : v$. Fig. 221 gilt sowohl für gleiche Stromvolumina, als auch für gleiche Volumina eines Wirbelfadens. Bei gleichwertiger Einteilung ist $ql = q_1 l_1$, also $q : q_1 = l_1 : l$. Aus beiden Proportionen folgt $v_1 : v = l_1 : l$. Also:

Die Wirbelgeschwindigkeit am Rande ist umgekehrt proportional dem Querschnitt und direkt proportional den Längen gleicher Volumina des Wirbelfadens.

b) Der stationäre Strom giebt zwar der Verbindungslinie zusammengehöriger Magnetpole eine Richtung, aber er ruft im Dielektri-

kum keine Ströme hervor. Nur wenn aufser ihm noch Stromleiter oder Ströme vorhanden sind, tritt besonderes ein. Analog:

Ein Wirbelfaden ruft in der wirbellosen Umgebung keine Wirbelbewegungen hervor. Nur wenn noch andere Wirbelfäden vorhanden sind, tritt besonderes ein. Folglich:

Der Wirbelfaden nimmt kein einziges der nicht wirbelnden Moleküle seiner Umgebung in sich auf.

Darf man von der Reibung absehen, so behält er, wie ein stationärer Strom, in allen Teilen dieselbe Energie. Folglich:

Der Wirbelfaden besteht stets aus denselben Wasserteilchen, behält also auch (der Inkompressibilität wegen) stets dasselbe Volumen. Läfst man ihn dünner und dünner werden, so wird er zur Wirbellinie, von der nun konsequenterweise dasselbe gilt.

c) Bewegung des Stromleiters ändert die Intensität und Energie des Stromes nicht, sobald nicht andere Stromleiter in der Nähe sind. Folglich:

Fortschreitende Bewegung eines Wirbels ändert seine Intensität und Energie nicht, sobald nicht andere Wirbel in der Nähe sind.

d) Nach Nr. 248 bezw. Nr. 257 bewegt ein geradliniger Leiter von der Intensität J_1 die Einheit des Nordpols senkrecht gegen die durch Pol und Leiter bestimmte Ebene mit der Kraft

$$p = \frac{\varkappa J_1}{\varrho} = \frac{2\varkappa_1 J_1}{\varrho}.$$

Analog:

Ein gerader Wirbelfaden von der Intensität J giebt jedem Wasserteilchen in der Entfernung ϱ eine Geschwindigkeit $v = \frac{J}{\pi\varrho}$ senkrecht gegen die durch Faden und Wasserteilchen bestimmte Ebene und zwar im Sinne der Wirbeldrehung. (Man setzt $\frac{J}{\pi}$ an Stelle von $2\varkappa_1 J_1$.) Die Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional ϱ.

Wodurch dies geschieht, ob durch Reibung, was wahrscheinlich ist, oder durch irgend eine von Hertz und anderen angenommene „Verkoppelung der Moleküle", das sei dahin gestellt. So gut aber, wie der elektrische Strom vom Momente des Entstehens an bis zum Eintritt des stationären Zustandes Energie an das ihn umgebende Feld abgeben mufs, so hat auch der Wirbel Energie abzugeben, bis die stationäre Bewegung der Teilchen des Feldes herbeigeführt ist. Von da ab bleibt seine Energie konstant. Die in Bewegung gesetzten Wasserteilchen drehen sich um die Querschnittsachse des Fadens, aber

nicht um die eigne Achse, so daſs man nur von fortschreitender Bewegung zu reden braucht.

e) Das Stromteilchen $AB = l$ übt nach Figur 198 und der zugehörigen Erläuterung auf die in der Entfernung s von ihm in der Entfernung $\varrho = s \sin\alpha$ vom Faden befindliche nordmagnetische Einheit die ablenkende Kraft

$$p = \frac{2\varkappa_1 J F_2}{s^3} = \frac{\varkappa_1 J_1 l \sin\alpha}{s^2}$$

aus, wo F_2 die vom Teilchen und dem Stromelemente l gebildete Dreiecksfläche ist. Setzt man auch hier $\frac{J}{\pi}$ an Stelle von $2\varkappa_1 J_1$, so gilt analog:

Jedes Teilchen des Wirbelfadens vom Volumen ql und der Wirbelgeschwindigkeit $\varkappa$, also von der Intensität $q\varkappa = J$, giebt jedem Wasserteilchen, welches von ihm die Entfernung s, von der Drehachse die Entfernung $\varrho = s \sin\alpha$ hat, die Geschwindigkeit

$$v = \frac{Jl \sin\alpha}{\pi s^2} = \frac{q\varkappa l \sin\alpha}{\pi s^2} = \frac{q\varkappa F}{\pi s^3},$$

wo F dieselbe Bedeutung, wie vorher hat. Das Drehungsbestreben führt also nach Erreichung des stationären Zustandes zu einer Geschwindigkeit, die direkt proportional dem Ausdrucke $q\varkappa l \sin\alpha$ und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstands s ist.

Genauere Vorstellungen von einem Wirbelfaden werden sich aus dem Folgenden ergeben.

280) Zwei und mehrere Elementarfäden.

a) Befinden sich im Wasserraum zwei oder mehrere Wirbelfäden von gleichen Intensitäten und übereinstimmendem Drehungssinn, so ist A bestrebt dem Wirbel B und seiner Umgebung die fortschreitende Geschwindigkeit $v_b = \frac{J}{\pi\varrho}$ zu geben. B wirkt in demselben Sinne auf A ein. Es resultiert für beide Wirbelfäden eine Drehung um den Halbierungspunkt S der Strecke AB. Denkt man sich die Intensitäten der Wirbel A und B dort als Massen angebracht, so ist S der Schwerpunkt. Beide Wirbel wirken auf die Gerade AB so drehend ein, als ob jeder ein Kräftepaar wäre. (Vgl. das Aufsetzen zweier Kreisel in die Vertiefungen A und B eines

Fig. 222.

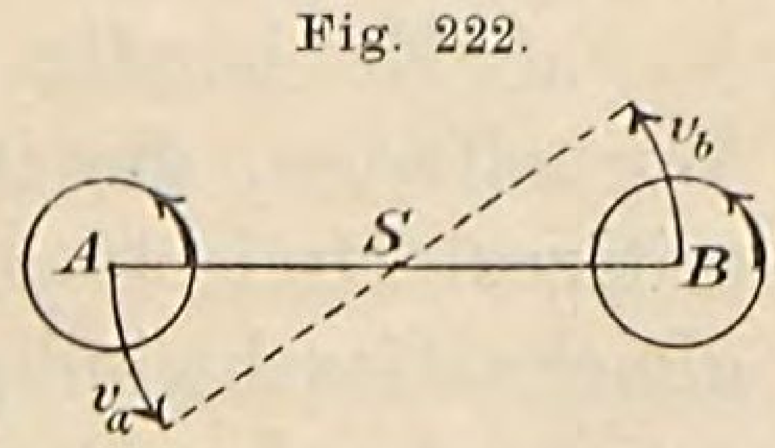
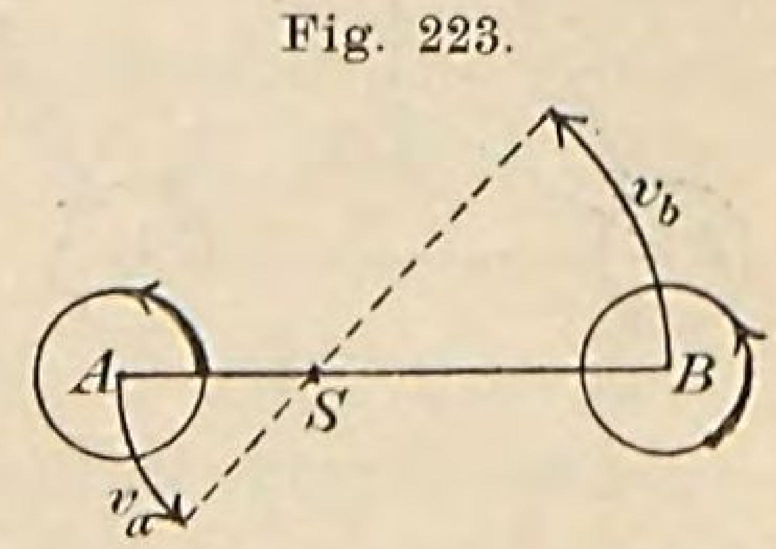


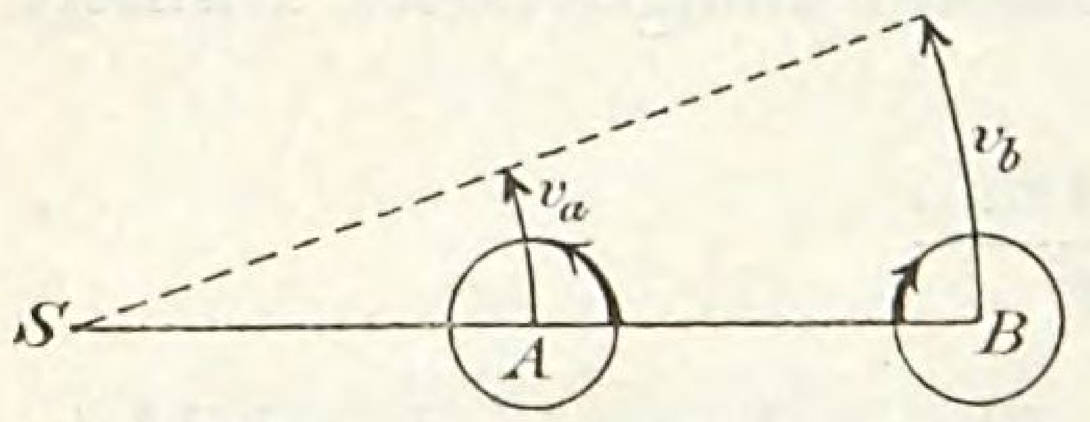
Fig. 223.



um S drehbaren Balkens, wobei eine Drehung des letzteren entsteht. Schmidtsche Kreisel-Versuche.)

b) Verhalten sich die Intensitäten der beiden Wirbel wie 2:1, so teilt der Drehungspunkt S die Linie ebenso, wie die Massen 2 und 1 in A bezw. B, denn $\frac{J_a}{\pi\varrho} : \frac{J_b}{\pi\varrho} = 2:1$. (Fig. 223.)

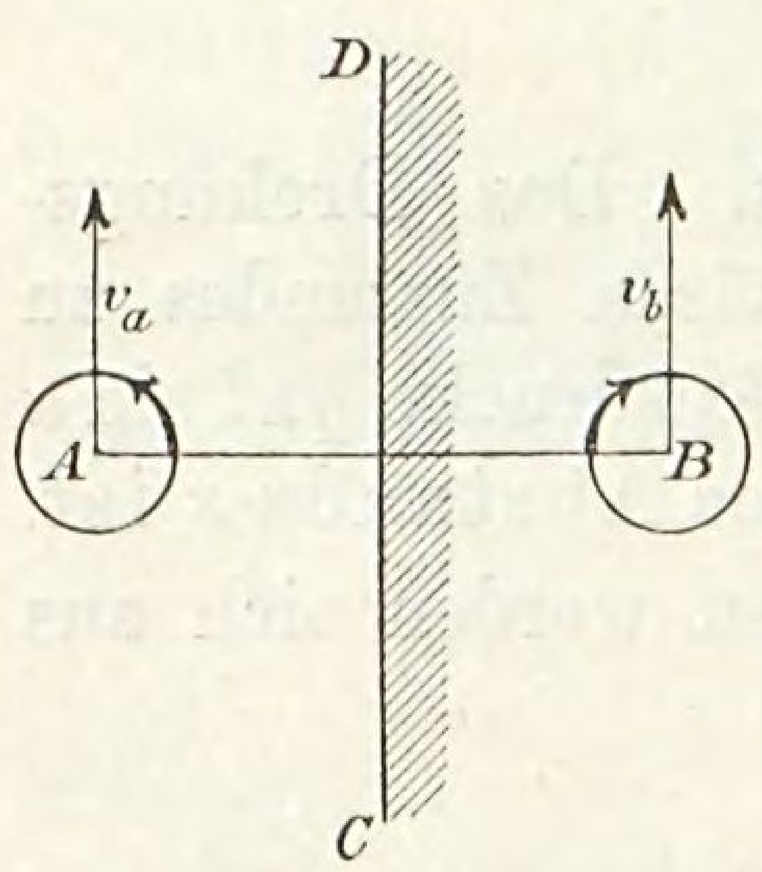
Fig. 224.



c) Drehen die Wirbel entgegengesetzt, so ist es ähnlich, wie bei entgegengesetzten Kräften (bezw. Massen). Der Schwerpunkt fällt aufserhalb. Auch jetzt ist er das Centrum der Drehbewegung. (Fig. 224.)

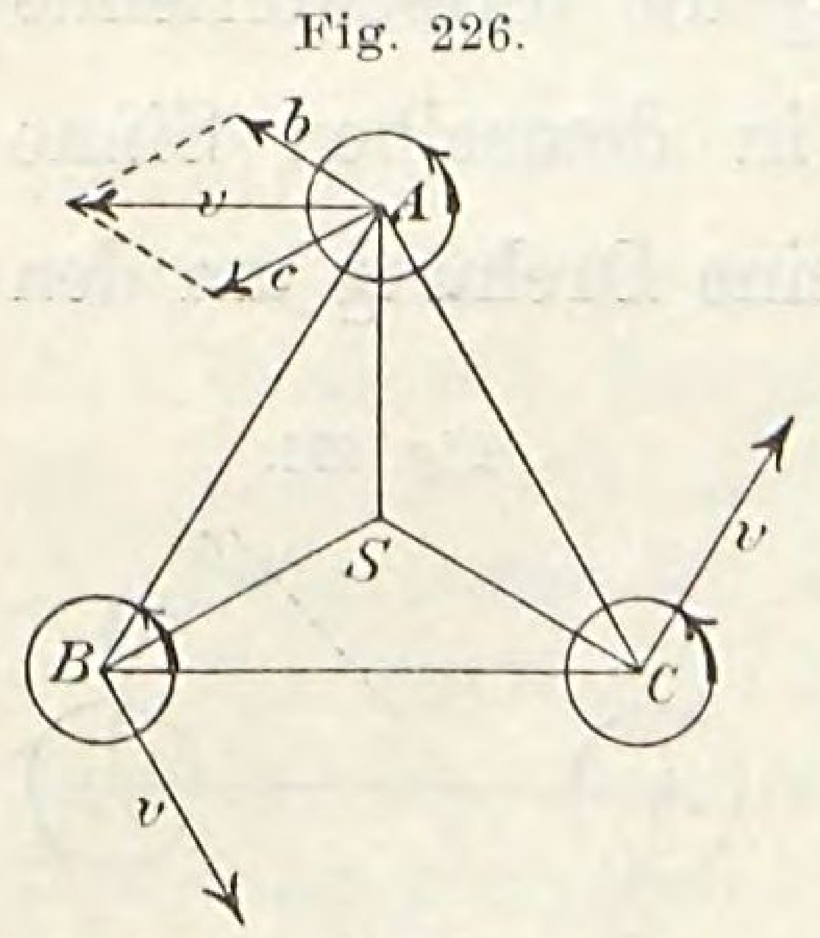
d) Sind dabei die Intensitäten absolut genommen einander gleich, so fällt S in unendliche Entfernung, wie bei einem Kräftepaar, beide Wirbel wandern mit der Geschwindigkeit $\frac{J}{\pi\varrho}$ in derselben Richtung vorwärts. In diesem Falle ist B das Spiegelbild von A. Man kann die Mittellinie CD als feste Wand betrachten und B entfernen, ohne dafs sich für A etwas ändert. A wandert in der Nähe einer festen Wand parallel derselben vorwärts mit der Geschwindigkeit $\frac{J}{\pi\varrho}$. Es verhält sich wie ein Schwimmer, der mit der linken Hand richtig rudert, mit der Rechten aber eine Gegenbewegung macht. In der That wird links von A alles Wasser zurückgetrieben, rechts von A eine weit kleinere Wassermenge vorwärts getrieben. Durch die Differenz der Gegenwirkungen beider Aktionen entsteht die Geschwindigkeit von A.

Fig. 225.



Ähnlich ist es, wenn A und B (ohne die Wand) aufeinander wirken. A rudert richtig mit der linken, B mit der rechten Hand, jeder falsch mit der anderen Hand. Das Wasser aufserhalb AB wird rückwärts, das zwischen AB vorwärts getrieben, in der Mitte naturgemäfs schneller, als A und B schwimmen.

Fig. 226.



e) Es handle sich um drei gleichwertige Wirbelfäden, die in der Zeichnung ein gleichseitiges Dreieck bilden. Jeder erhält zwei gleiche Geschwindigkeiten senkrecht gegen die entsprechenden Dreiecksseiten, deren Resultante senkrecht zur Mittellinie steht. So entsteht Drehungsbewegung um den Mittelpunkt S des Dreiecks ohne sonstige Änderungen.

f) Ebenso ist es bei jeder Anordnung nach den Ecken eines regelmäſsigen Polygons, ebenso bei homogener Ausfüllung einer Kreisfläche mit gleichwertigen Wirbeln. Stets entsteht Drehung um den Mittelpunkt.

g) Sind drei gleichwertige Wirbel allgemein gelagert und bildet man die Resultanten, so stehen diese im allgemeinen nicht mehr senkrecht auf den Schwerpunktstransversalen, der Schwerpunkt ruht bei der Bewegung, aber die Gestalt des Dreiecks macht periodische Änderungen durch, da die einzelnen Wirbel sich bald von S entfernen, bald in gröſsere Nähe gelangen. (Figur für $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = -1$ siehe bei Gröbli, Seite 22.) Die Untersuchung des Gestaltenwechsels ist elementar nicht durchzuführen. Ebenso treten Wandelungen der Gestalt ein, wenn die Wirbel eine Ellipsenfläche gleichmäſsig erfüllen, worüber man Kirchhoffs Mechanik vergleiche.

Stets aber ruht der Schwerpunkt des Komplexes von Wirbeln.

Diesen Schwerpunkt findet man, wenn man jeden Wirbel durch eine seiner Intensität entsprechende Masse ersetzt.

Das Ruhen des Schwerpunktes gilt nicht nur von den Wirbelcylindern, die aus Wirbelfäden bestehen, sondern auch von den aus Wirbellinien bestehenden Wirbelfäden, sobald man sich im Normalschnitt die Punkte der Wirbellinien mit Massen belegt denkt, die ihren Umdrehungsgeschwindigkeiten proportional sind.

Damit ist die genauere Vorstellung des Wirbelfadens geschaffen, die oben unverständlich geblieben sein würde. Auch erkennt man jetzt, warum oben von Strombewegungen und fortschreitenden Bewegungen der Wirbelfäden gesprochen wurde.

Von den krummlinigen Wirbelfäden sollen nur unendlich dünn zu denkende kreisförmige Wirbelringe behandelt werden, die aus den unten anzugebenden Gründen von hervorragendster Wichtigkeit für die neueren physikalischen Theorien geworden sind. Sämtliche Wirbellinien eines solchen Ringes sind als kreisförmig aufzufassen. Jeder Raucher kann bekanntlich solche Ringe sichtbar hervorbringen. Bei ruhigem Wetter bildet der auspuffende Dampf einer stillstehenden Lokomotive oder eines Dampfrohrs bisweilen sehr schöne Wirbelringe. Mit Hilfe einer Kreisscheibe (eines Löffels) hat Helmholtz solche im Wasser hervorgebracht, auch halbkreisförmige, deren freie Enden an der Oberfläche der Flüssigkeit ausliefen.

Was oben über geradlinige Wirbelfäden gesagt wurde, gilt, beiläufig bemerkt, auch dann, wenn die Flüssigkeit normal gegen solche durch Ebenen begrenzt ist, also z. B. für senkrechte Fäden in Teichen von überall gleicher Tiefe. Es handelt sich eben dann um zweidimensionale Probleme.

281) Ein vereinzelter kreisförmiger Wirbelring. In Nr. 257 und an Fig. 196 war die Wirkung eines Kreisstroms von Intensität J_1 auf einen Punkt seiner Achse berechnet worden, wenn für diesen der halbe Gesichtswinkel gleich γ war. Es ergab sich als Potential

$$1)\qquad V = \pi \varkappa J_1 (1 - \cos\gamma) = 2\varkappa_1 \pi J_1 (1 - \cos\gamma),$$

als anziehende bezw. abstofsende Kraft

$$2)\qquad p = \frac{r^2 \pi \varkappa J_1}{s^3} = \frac{F \varkappa J_1}{s^3} = \frac{2\varkappa_1 F J_1}{s^3},$$

wo s den Abstand des Einheitspols von der Peripherie, F die Fläche des Kreisstroms bedeutete. Für den Mittelpunkt des letzteren war

$$3)\qquad p_m = \frac{\varkappa \pi J_1}{r} = \frac{2\varkappa_1 \pi J_1}{r}.$$

Setzt man auch hier für $2\varkappa_1 J_1$ den Ausdruck $\frac{J}{\pi}$ ein, so erhält man für den kreisförmigen Wirbelring, der als unendlich dünn zu betrachten ist, die Gleichungen

$$1^*)\qquad V = J(1 - \cos\gamma)$$

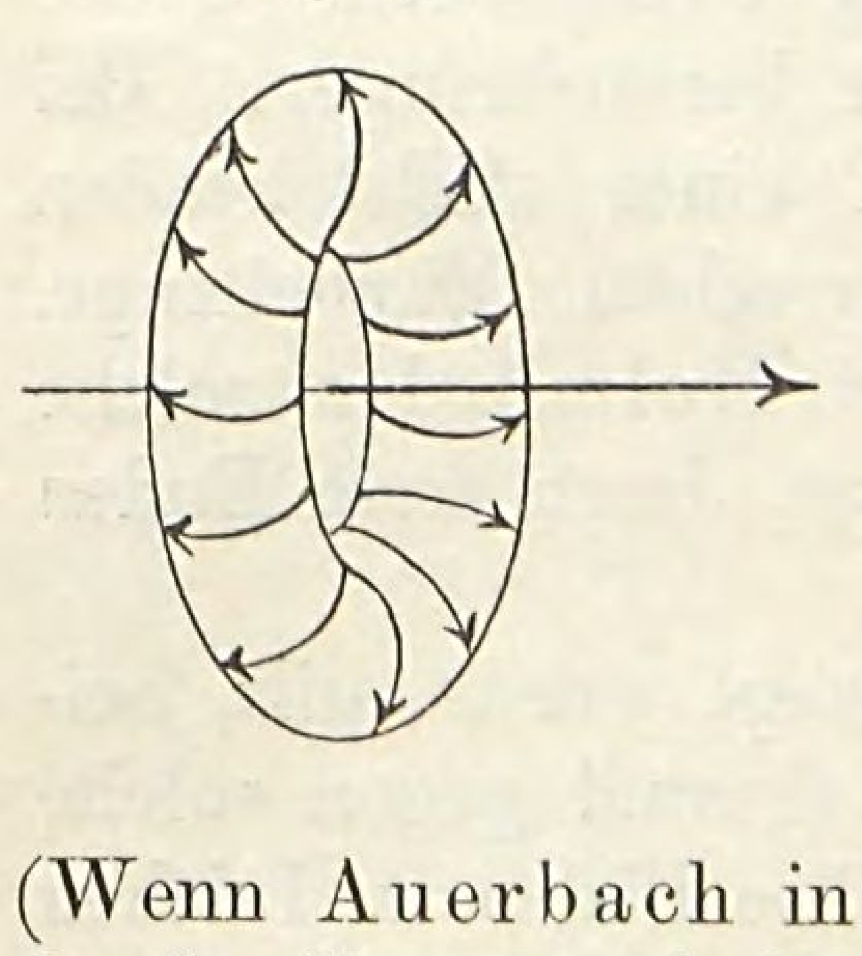
$$2^*)\qquad v = \frac{FJ}{\pi s^3}$$

$$3^*)\qquad v_m = \frac{J}{\pi r}.$$

Ist damit auch nur das Geschwindigkeitspotential für die Punkte der Achse und ihre Geschwindigkeit selbst berechnet, so reicht dies doch hin, ein allgemeines Bild von dem Vorgange zu geben.

Denkt man sich durch die Achse einen Meridianschnitt gelegt, so erhält man als Schnitt zwei entgegengesetzte Wirbel, die nach Nr. 289 aufeinander so einwirken, dafs beide vorwärts wandern. Da dasselbe mit je zweien geschieht, so erhält der gesamte Ring eine Fortbewegung in der Richtung des Pfeiles. Diese ist ganz naturgemäfs, weil durch das ganze Innere des Ringes nur wenig Wasser vorwärts getrieben wird, während alles Wasser, welches aufserhalb des zugehörigen Cylinders liegt, rückwärts gestofsen wird. Die Differenz der Gegenwirkungen treibt den Ring vorwärts.

Fig. 227.



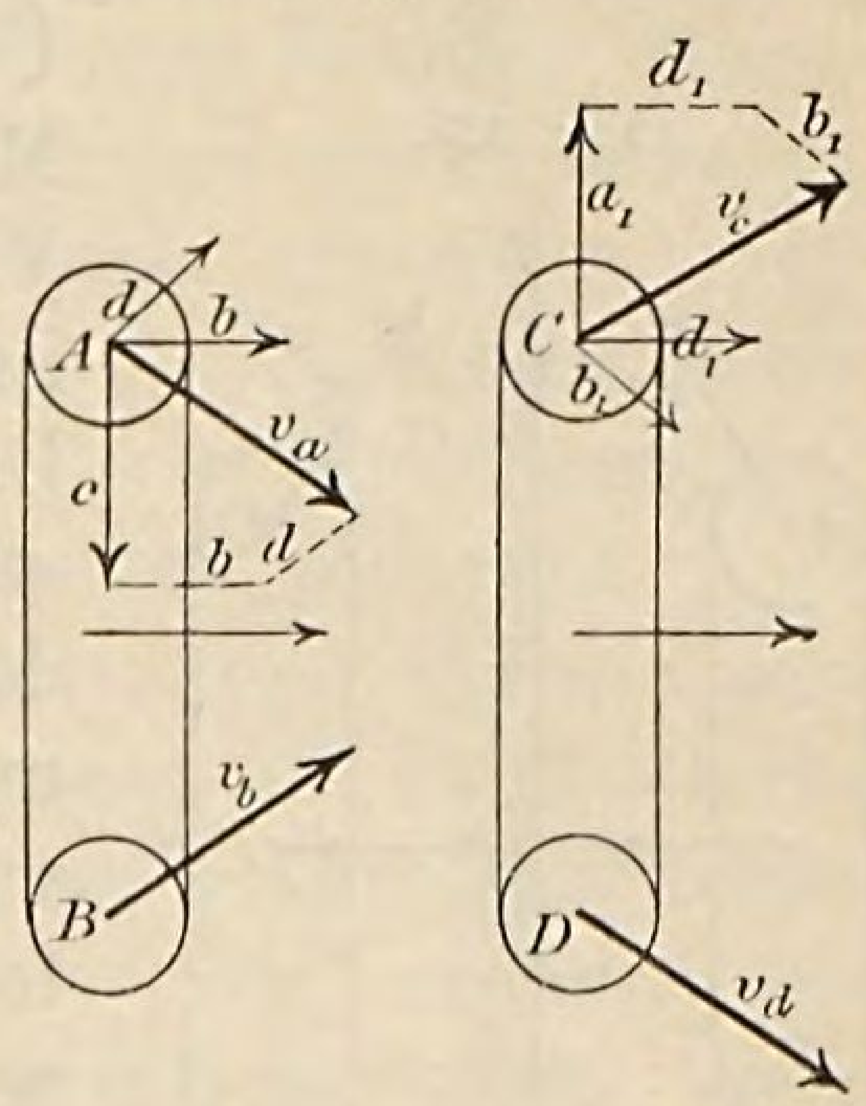
(Wenn Auerbach in der citierten Preisschrift sagt, der Ring würde durch die energisch durch sein Inneres strömenden Wassermassen mitgerissen, so wird die Wirkung mit der Ursache verwechselt. Der

Grund ist derselbe, wie bei jedem Meridianschnitt für sich und bei Fig. 225. Die Geschwindigkeit des Ringes selbst ist schwierig zu berechnen, da auf jeden seiner Wirbelteile von Länge l sämtliche anderen wirken.

Beim stationären Zustande ist die Geschwindigkeit des Ringes konstant, ebenso unveränderlich sind seine Dimensionen und seine Kreisgestalt, ebenso unveränderlich ist seine Intensität und Energie. Dabei ist natürlich von der Reibung ganz abgesehen, die in der Wirklichkeit die Ringe bald zur Auflösung gelangen läſst. Ohne die Reibung würde der Ring unveränderlich dem unendlichen Bereiche zuwandern.

282) Zwei parallele, gleichartige Wirbelringe. Helmholtz schildert, ohne den Beweis zu geben, das Verhalten parallel gestellter Wirbelringe. Kirchhoff citiert die Bemerkungen ebenfalls ohne Beweis. Beschränkt man sich auf die Betrachtung der Wirbel eines Meridianschnitts, so läſst sich der Vorgang einigermaſsen begründen, was hier versucht werden soll. Der Wirbel A erhält, abgesehen von den übrigen Einwirkungen, Bewegungsantriebe von B, C und D aus, die umgekehrt proportional den wirklichen Entfernungen sind. Die Resultanten für A und B, v_a und v_b sind so gerichtet, daſs man das Bestreben des Ringes erkennt, sich zu verkleinern, d. h. sich zusammen zu ziehen. Weil er stets dasselbe Volumen hat, schwellen dafür die Flächen A und B an. Weil ferner A und B bei gleichbleibender Energie einander näher rücken, wird die Wassergeschwindigkeit bei dem Schwerpunkte S und ebenso die Selbstkomponente, d. h. die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Wirbelringes verstärkt, während er sich beständig verkleinert.

Fig. 228.

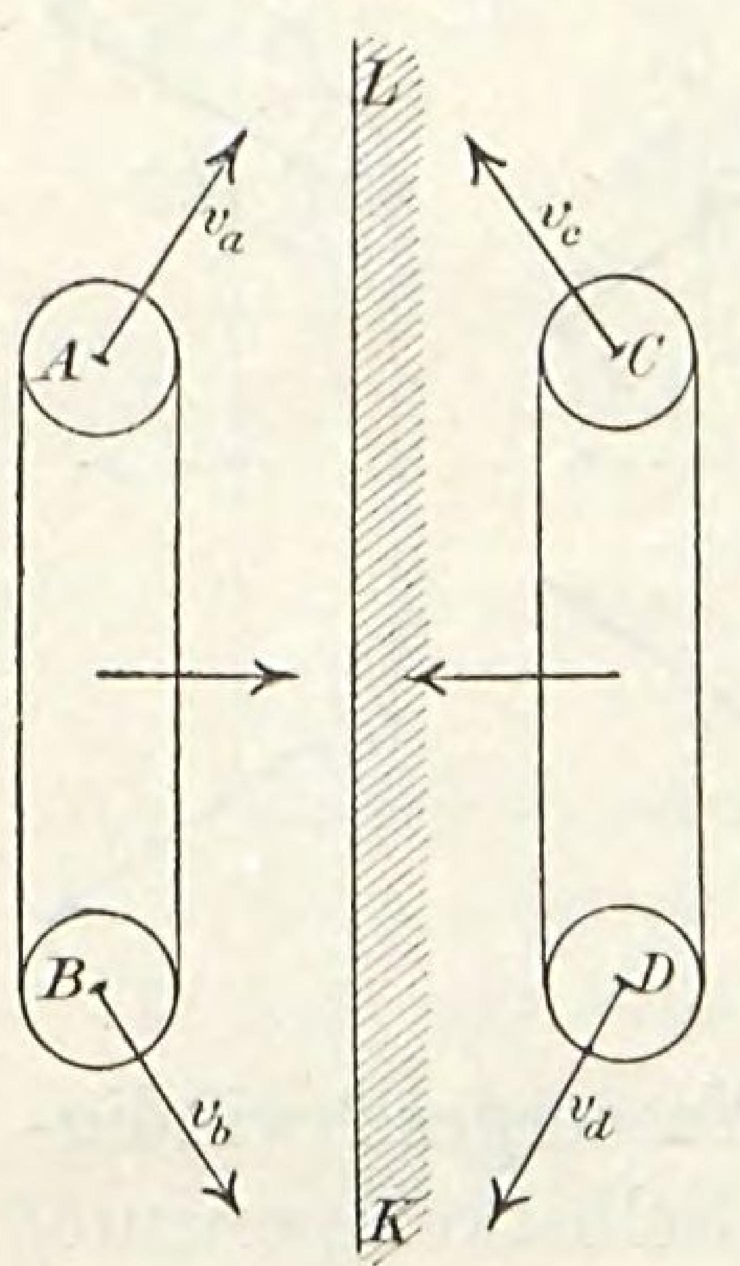


Entgegengesetztes geschieht bei C und D, wo die Resultanten v_c und v_d nach auſsen gehen. Der Hauptradius dieses Ringes vergröſsert, sein Querschnitt verkleinert sich. Weil C und D auseinanderrücken, wird die eigene fortschreitende Bewegung vermindert. Die Folge ist, daſs der Ring CD von AB eingeholt wird, daſs der kleiner gewordene und entsprechend beschleunigte AB durch den gröſser gewordenen und verlangsamten CD schnell hindurchschlüpft. Sofort verlangsamt sich AB, während CD beschleunigt wird, beide Ringe haben die Rollen vertauscht, im übrigen wiederholt sich der Vorgang. Er würde sich in Ewigkeit wiederholen, wenn keine Reibung vorhanden wäre.

Geschickte Raucher können auch diesen Vorgang, den Verfasser selbst bei Lokomotiven mehrfach beobachtet hat, wiederholen. Helmholtz hat ihn durch schnelle wiederholte Bewegungen eines Löffels im Wasser ebenfalls sichtbar gemacht. Das wechselnde Durcheinanderschlüpfen erscheint für den ersten Augenblick überraschend. Die Erscheinung wird aber verständlich, sobald man nur einen einzigen fortschreitenden Ring betrachtet. Bei diesem befinden sich bald die einen, bald die anderen Elementarwirbel aufsen, durchschlüpfen sich also gegenseitig. Das wechselnde Erweitern und Zusammenziehen, das Addieren und Subtrahieren der fortschreitenden Bewegung und der Drehung um die Mittellinie des Ringes, also die wechselnden Verlangsamungen und Beschleunigungen sind notwendig und selbstverständlich zugleich.

283) Zwei ungleichartige Wirbelringe. Fig. 229 stellt parallele Wirbellringe von entgegengesetzter Bewegung dar. Dieselbe Überlegung, wie oben, giebt für die Wirbel eines Meridianschnittes Bewegungsantriebe, die auf Vergröfserung des Durchmessers und Verlangsamung beider Ringe hinarbeiten. Da A und C, ebenso B und D einander immer näher rücken, wird im Einklang mit Fig. 134 das Parallellaufen mit der Symmetrielinie allmählich herbeigeführt, denn die übrigen Einwirkungen nehmen allmählich ab, weil die Entfernungen gröfser und gröfser werden. Dabei werden die einzelnen Wirbel schliefslich so dünn, dafs endlich die Ringe als aufgelöst zu betrachten sind.

Fig. 229.



Bezüglich der Symmetrieebenen kann man dieselben Betrachtungen anstellen, wie bei Fig. 134. Nähert sich der Ring AB bei seiner Wanderung einer Wand KL, so wirkt diese ebenso auf ihn, wie sein Spiegelbild CD, er verlangsamt seinen Gang, schwillt an und löfst sich allmählich auf.

284) Schlufsbemerkung über Wirbelfäden. Das hier Gegebene bestand nur aus Beschreibungen der Vorgänge auf Grund der von Helmholtz entdeckten Analogien. Die eigentlichen Beweise wurden nicht gegeben. Es handelte sich nur um einen flüchtigen Einblick in ein Gebiet, auf dem Cauchy, Hankel, Thomson, Beltrami, Roch, Dini, Lipschitz, Maxwell, Helmholtz, Kirchhoff, Tait, Rankine und andere erfolgreich gearbeitet haben. Diese Theorie ist um so wichtiger, als Thomson versucht hat, als Grundlage der

mathematischen Physik eine Theorie der Wirbelatome aufzubauen. Bekanntlich haben wir über die Natur der Materie zwei einander entgegengesetzte Hypothesen, die der Kontinuität, und die der diskreten Atome. Die Theorie bedient sich, je nach Bedarf, bald der einen, bald der anderen Anschauung. Das Bedürfnis, zwischen beiden zu vermitteln, wurde von jeher empfunden.

Rankine machte einen ersten Vermittelungsversuch. Thomson unternahm einen zweiten mit Hilfe der angedeuteten Lehre von den Wirbeln, die schon bei Maxwell eine so bedeutungsvolle Rolle spielten. Er wurde dazu veranlafst durch den konstanten Charakter der Wirbelringe und ihre der vollkommenen Elastizität entsprechenden Fähigkeit, sich auszudehnen oder zusammenzuziehen. Das Ganze hängt mit den Hertzschen Bestrebungen zusammen, die Kräfte aus der Mechanik zu eliminieren und die Vorgänge auf Bewegungsvorgänge zwischen den irgendwie verkoppelten Molekülen zurückzuführen.

Auch darüber haben Überlegungen stattgefunden, ob etwa der Begriff der Trägheit und der Energie entbehrt werden könnte. Diese Frage ist unentschieden geblieben. Während eine Gruppe von Physikern, wie Ostwald, die Energie als ein gegebenes Agens annehmen und das Energieprinzip als ein allgemeines Naturgesetz proklamieren, sind Hertz, Boltzmann, Plank und andere gegen diese Stellungnahme aufgetreten und auch Helmholtz hat sich ablehnend verhalten.

Man sieht daraus, dafs man sich zunächst mit der Theorie der Wirbelbewegungen zu beschäftigen hat, wenn man in die neueren physikalischen Theorien eindringen und an den augenblicklich geführten Geisteskämpfen teilnehmen will. Aus diesem Grunde erschien es zweckmäfsig, auch solchen Lesern, die noch nicht imstande sind, die Integration der hydrodynamischen Differentialgleichungen von Helmholtz zu verfolgen, wenigstens eine Beschreibung der einfachsten Bewegungsvorgänge auf dem Gebiete der Wirbelfäden und Wirbelringe zu geben.

Schliefslich sei darauf aufmerksam gemacht, dafs Dr. Rausenberger im Programm 1895 der Adlerflychtschule zu Frankfurt a. M. den Versuch gemacht hat, die Helmholtzschen Wirbelbewegungen für die Lehre von den Wirbelstürmen zu verwerten, wobei er auf seine Schrift über diesen Gegenstand im Jahrgange 1889 des Freien Deutschen Hochstifts verweist.

Von geringerer Bedeutung ist die nachstehend bearbeitete Analogie der elektrischen Strömung in ebenen Platten mit der von Dr. Forchheimer aufgestellten Theorie der Grundwasserbewegung in der Umgebung von Brunnenanlagen und Sickerschlitzen. Lassen sich hier auch berechtigte Einwände machen, so bietet die Auffassung doch mancherlei Interessantes.

c) Forchheimers Theorie der Grundwasserbewegung in der Umgebung von Brunnen und Sickerschlitzen.

285) Die Grundhypothese. Die Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover enthielt im 7. Hefte des Jahrgangs 1886 eine Abhandlung des Prof. Dr. Forchheimer über die Ergiebigkeit von Brunnenanlagen und Sickerschlitzen, die eine interessante Anwendung der besprochenen Isothermenscharen darbietet. Die Berechnungen schlossen sich nach eigner Angabe des Verfassers an unsere Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften an.

Die zu Grunde gelegte einfache Hypothese kann folgendermaſsen formuliert werden:

Die Geschwindigkeit einer stationären Strömung des Grundwassers ist proportional dem Gefällverhältnis seiner Oberfläche, im übrigen aber unabhängig von der Tiefe.

Gegen diese Annahme lassen sich zwar Bedenken erheben, aber als Annäherungsannahme darf man sie innerhalb gewisser Grenzen gelten lassen, da die Resultate durchaus nicht widerspruchsvoll erscheinen und einfach und faſslich auszusprechen sind. Andere Theorien haben entsprechendes noch nicht geleistet. Daher soll der Versuch gemacht werden, eine elementare Einführung auch in dieses interessante Gebiet zu geben, bei der ein einfacherer Gang, als der von Forchheimer gewählte, eingeschlagen werden soll.

Um für die Sache zu interessieren, schicken wir das Resultat voraus:

Die Projektion der Niveau- und Stromlinien der Grundwasserstände giebt ein isothermisches Netz. Ist $z = f(xy) + c$ die Potentialfläche für eine Wärme- oder Elektrizitätsströmung, so ist $z^2 = f(xy) + c$ oder $z = \sqrt{f(xy) + c}$ die Gleichung für die Oberfläche des Grundwassers bei der entsprechenden Strömung. Gemäſs der Proportion $1 : \sqrt{z} = \sqrt{z} : z$ hat man also nur für 1 und jede Ordinate die mittlere Proportionale zu konstruieren, um aus der einen dieser Flächen die andere abzuleiten.

286) Die Parallelströmung. Mit der einfachen Parallelströmung soll begonnen werden, und zwar an der Hand des folgenden Problems.

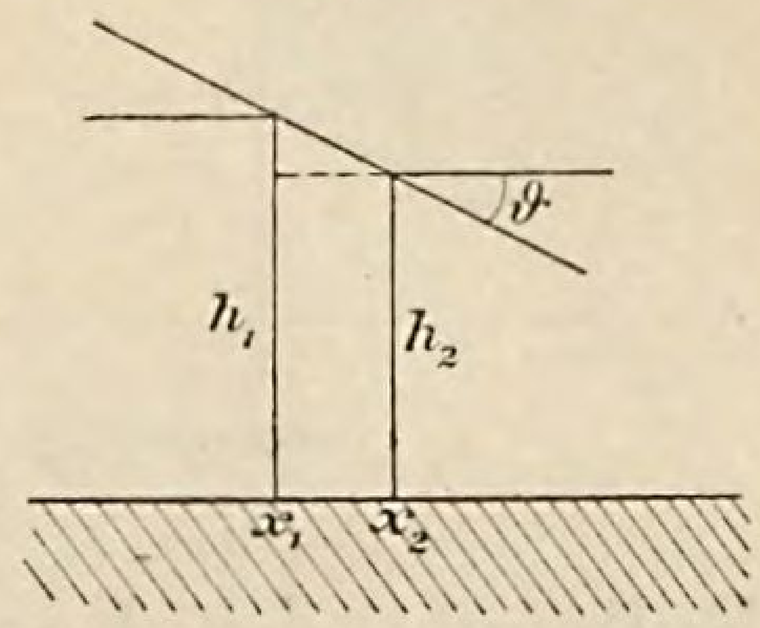
Man denke sich zwei Seen verschiedenen Wasserstandes durch einen geradlinigen, überall gleich breiten Damm voneinander getrennt, dessen Grenzflächen als senkrecht angenommen werden. In welcher Weise geschieht das Durchsickern des Wassers?

An jeder Stelle ist, der obigen Hypothese entsprechend,

$$1)\qquad v = -\varkappa \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} = -\varkappa \tan\vartheta,$$

wenn die Grundwasserströmung in der Richtung von links nach rechts vor sich geht. Hier ist $\varkappa$ eine konstante Gröſse, die der Durchlässigkeit des Erdmaterials entspricht, ϑ ist der (negative) Neigungswinkel der Grundwasseroberfläche. Die in der Zeiteinheit durch eine senkrechte Fläche, die auch die Strömungsrichtung senkrecht schneidet, passierende Wassermenge ist also

Fig. 230.



$$2)\qquad Q = -by\varkappa \tan\vartheta,$$

wenn b die Breite des Rechtecks, y die von der undurchlässigen Schicht bis zur Oberfläche gemessene Höhe ist. Da nun der Zustand als ein stationärer betrachtet werden soll, muſs durch ein anderes Rechteck von derselben Breite b, aber anderer Höhe y_1 und anderem Winkel ϑ_1 dieselbe Menge

$$2^*)\qquad Q = -by_1\varkappa \tan\vartheta_1$$

gehen. Daraus folgt aber

$$-by\varkappa \tan\vartheta = -by_1\varkappa \tan\vartheta_1$$

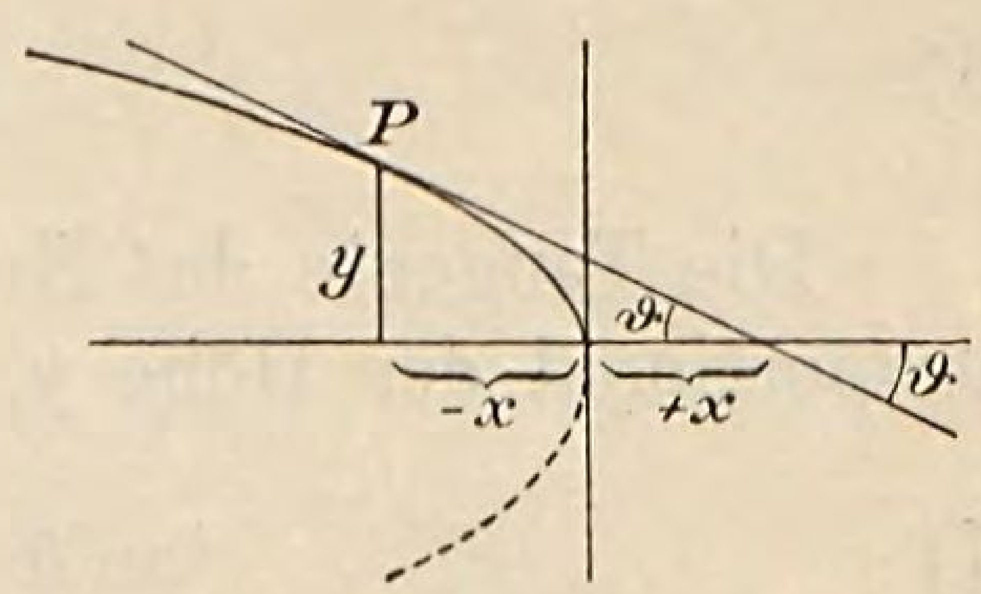
oder

$$3)\qquad \frac{y}{y_1} = \frac{\tan\vartheta_1}{\tan\vartheta}.$$

Die Einstellung des Grundwassers geschieht also stets so, daſs die Höhen umgekehrt proportional den Tangenten der Neigung seiner Oberfläche sind.

Durch die Gleichung 3) ist aber eine Parabel charakterisiert, deren Achse in der undurchlässigen Schicht liegt. Für jeden Punkt P ist nämlich bei dieser Kurve $\tan\alpha = -\frac{y}{2x}$, also ist für zwei Parabelpunkte

Fig. 231.



$$\frac{\tan\vartheta_1}{\tan\vartheta} = \frac{-\frac{y_1}{2x_1}}{-\frac{y}{2x}} = \frac{y_1}{y}\,\frac{x}{x_1}.$$

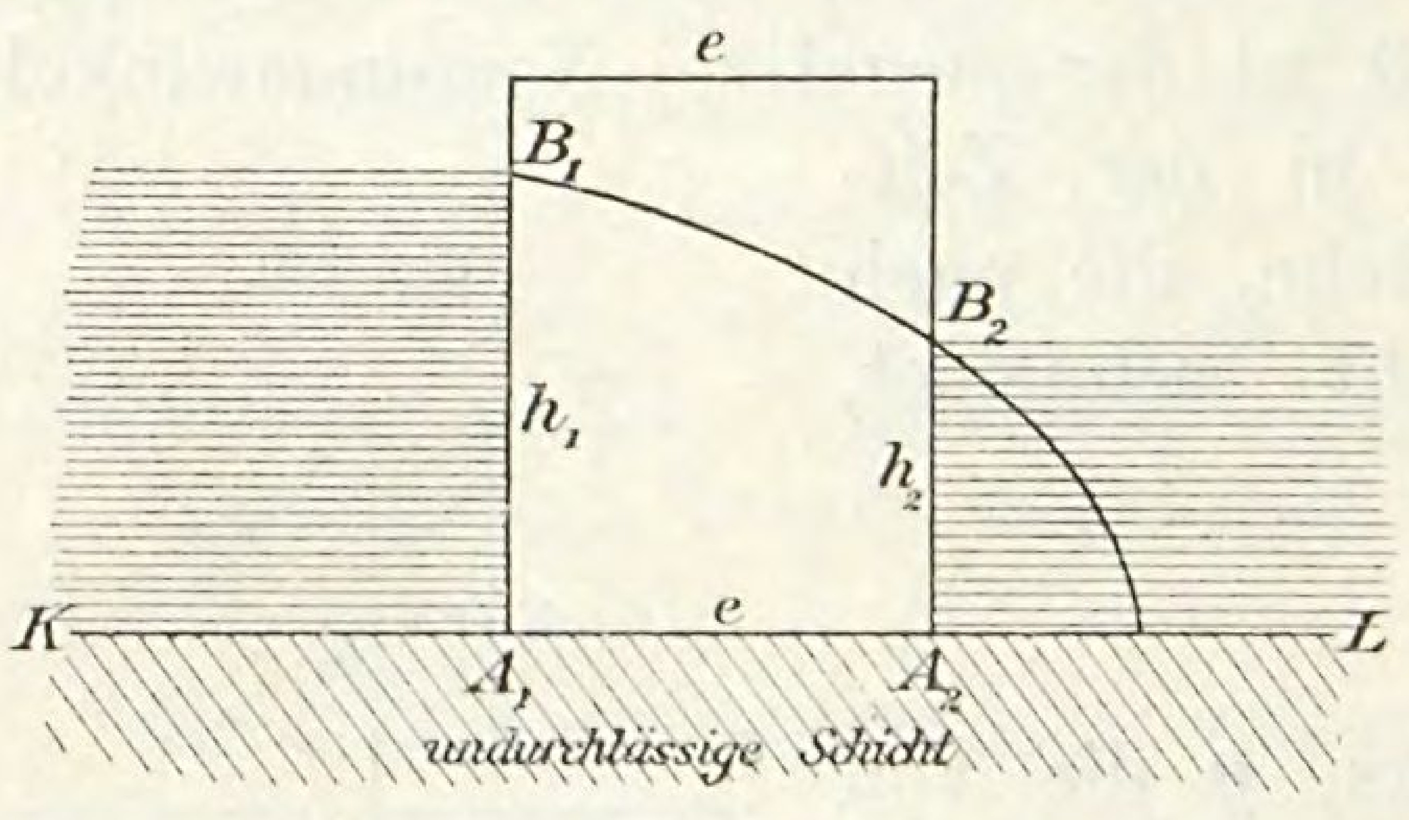
Nach bekannter Parabeleigenschaft ist zugleich $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}$, also

$$\frac{y}{y_1} = \frac{y_1}{y}\,\frac{x}{x_1}.$$

Da die rechten Seiten übereinstimmen, gilt dasselbe von den linken Seiten, und so folgt Gleichung 3).

Aus $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{x}{x_1}$ folgt $y^2 = y_1^2 \frac{x}{x_1} = 2 y_1 \frac{y_1}{2 x_1} x = 2 y_1 \tan \alpha_1 x$, oder nach 2*)

Fig. 232.



4) $$y^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x.$$

Es handelt sich also um diejenige Parabel, deren Achse in die Grenzlinie KL der undurchlässigen Schicht fällt, und die durch die Niveaupunkte B_1 und B_2 geht. Der Scheitel S ist Nullpunkt des Koordinatensystems.

Aus den besonderen Werten

$$h_1^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x_1 \quad \text{und} \quad h_2^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa} x_2$$

folgt zunächst

$$h_1^2 - h_2^2 = -\frac{2Q}{b\varkappa}(x_1 - x_2) = \frac{2Q}{b\varkappa}(x_2 - x_1) = \frac{2Q}{b\varkappa} e,$$

so dafs

5) $$Q = \frac{b\varkappa\,(h_1^2 - h_2^2)}{2e}$$

ist. Folglich:

Der Sickerverlust ist umgekehrt proportional der Dammbreite e, direkt proportional der Länge b, der Durchlafskonstanten $\varkappa$ und der Differenz der Quadrate der Grenzhöhen h_1 und h_2.

Nach 5) läfst sich die Parabelgleichung 4) umformen in

6) $$y^2 = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{e} x.$$

Die Tangente des Neigungswinkels für jede Stelle ist umgekehrt proportional der Höhe y, nämlich

7) $$\tan \vartheta = -\frac{Q}{b\varkappa y} = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{2ey},$$

die Geschwindigkeit ist ebenfalls umgekehrt proportional der Höhe y, da

8) $$v = -\varkappa \tan \vartheta = \varkappa \frac{h_1^2 - h_2^2}{2ey}.$$

Die Entfernung $A_1 S$ ist nach 6)

$$x_1 = -\frac{e h_1^2}{h_1^2 - h_2^2} = -\frac{e}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}.$$

Den Höchstwert des Sickerverlustes erhält man für $h_2 = 0$. Er ist gleich $\frac{b \varkappa h_1^2}{2e}$. Die zugehörige Geschwindigkeit würde unendlich grofs sein, da nach 8) $y = 0$ in den Nenner treten würde.

[Dieser praktisch unmögliche Grenzfall ist der schwache Punkt der Theorie, der sich zunächst dadurch erledigt, dafs das ausströmende Wasser stets eine bestimmte endliche Höhe h_2 hat, so dafs der Grenzfall überhaupt niemals erreicht wird. Er entspricht der unendlichen Geschwindigkeit der Elektrizität bei punktförmigen Elektroden. Bedenklich aber bleibt, dafs in der Nähe von S Geschwindigkeiten stattfinden würden, welche die überhaupt mögliche Ausflufsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2 g h_1}$ übertreffen, die der Dammbreite $e = 0$ entspricht. Es handelt sich also um eine Annäherungstheorie, die nur brauchbar sein kann, wenn $A_2 S$ nicht zu kleine Werte annimmt.]

Wichtig für unsere Zwecke ist nun folgendes: Die Gleichung

$$y = -\frac{2Q}{b\varkappa} x$$

würde eine ebene Schrägfläche geben, wie sie bei der Parallelströmung der Wärme und Elektrizität auftrat. Hier aber handelt es sich um

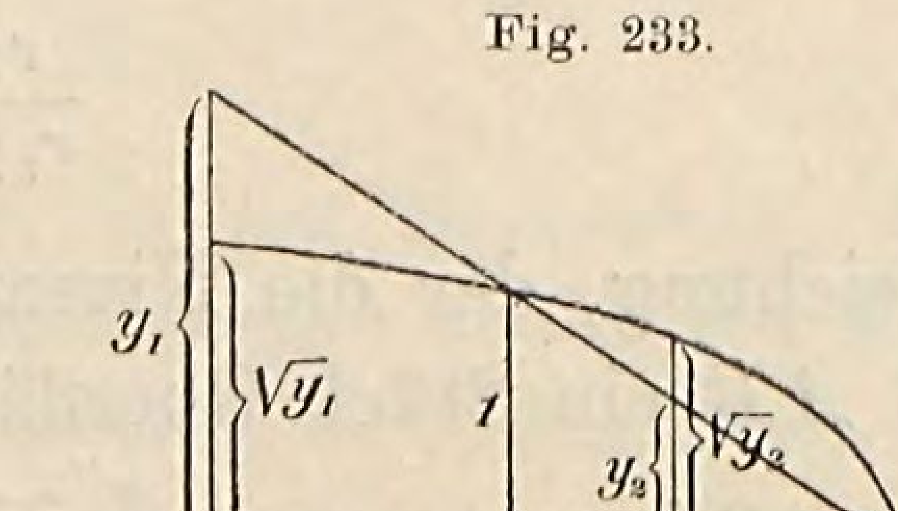
$$y = \sqrt{-\frac{2Q}{b\varkappa} x}.$$

Man kann also die zweite Fläche aus der ersten dadurch ableiten, dafs man an jeder Stelle geometrisch die Quadratwurzel der Ordinate bildet. Gemäfs der Proportion

$$1 : \sqrt{y} = \sqrt{y} : y$$

handelt es sich um die Konstruktion der mittleren Proportionalen zu 1 und y. (Fig. 233.)

Fig. 233.



Für den Fall der Parallelströmung hat sich also das vorausgesagte Resultat bestätigt.

Liegt die undurchlässige Schicht in unendlicher Tiefe, so werden die Dimensionen der Parabel unendlich grofs, d. h. es handelt sich um die gerade Linie $B_1 B_2$. Für diesen Fall stimmt also die Potentialfläche der Grundwasserströmung mit

der der elektrischen Strömung nach dem Ohmschen Gesetze überein. Der Umstand, daſs Prof. Forchheimer den Fall unendlicher Tiefe an die Spitze seiner Abhandlung stellt, erschwert ihr Studium und läſst die Theorie als künstlicher erscheinen, als sie in Wirklichkeit ist.

287) Radialströmung. Das Grundwasser ströme von allen Seiten her in stationärer Weise einem Brunnen mit kontinuierlichem Betriebe zu. Um mathematische Einfachheit zu erhalten denke man sich eine etwa aus Dünensand bestehende kreisförmige, eigentlich cylindrisch begrenzte Insel im Meere und in ihrer Mitte einen bis zur horizontal gedachten undurchlässigen Schicht reichenden Brunnenschacht. Der ursprüngliche Grundwasserstand entspricht dann der Meeresoberfläche. Durch den Pumpbetrieb senkt sich der Wasserstand im Brunnen so lange, bis infolge der wachsenden Steilheit der Oberfläche des Grundwassers dessen Nachströmen stark genug geworden ist, um die Wasserentnahme auszugleichen. Von da ab bleibt seine Oberfläche konstant.

Jetzt ist nach der Theorie an jeder Stelle

$$1) \qquad v = + \varkappa \tan \vartheta,$$

denn $\tan \vartheta$ ist der Senkung wegen für jeden Radius negativ, aber auch v ist negativ, weil die Strömung dem zunehmenden Radius entgegengerichtet ist.

Die in der Zeiteinheit jeden der koncentrischen Cylinder durchströmende Wassermasse ist also

$$2) \qquad Q = 2 r \pi y \varkappa \tan \vartheta,$$

wo r den Radius, y die Höhe des Cylinders, von der Grundschicht aus gemessen, bedeutet. Für einen bestimmten Cylinder sei

$$2^*) \qquad Q = 2 r_1 \pi y_1 \varkappa \tan \vartheta_1.$$

Aus der Gleichsetzung der linken Seiten folgt

$$r y \tan \vartheta = r_1 y_1 \tan \vartheta_1,$$

also ist

$$3) \qquad \frac{r y}{r_1 y_1} = \frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta},$$

eine Gleichung, der die Niveaufläche genügen muſs.

Ist AB ein Stück Oberfläche, jetzt steigend gedacht, so ist nach Gleichung 3) wo $\tan \vartheta = \frac{y'' - y'}{r'' - r'}$ zu setzen ist

$$3^*) \qquad y(y'' - y') = r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \frac{r'' - r'}{r} = \frac{c_1}{r}(r'' - r').$$

Die linke Seite kann aufgefafst werden als Schicht eines Dreiecks, welches in jeder Höhe y den Querschnitt y hat, dessen Inhalt von irgend einer Höhe y_1 bis zu einer andern y von der Gröfse $\frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}$ ist. Den Ausdruck rechts kann man auffassen als Horizontalstreifen einer Fläche, die in jeder Höhe r den Querschnitt $\frac{c_1}{r}$ hat, d. h. einer gleichseitigen Hyperbel, die bekanntlich von der Höhe 1 bis zur Höhe r gemessen den Inhalt $c_1 \overset{e}{\lg} r - c_1 \overset{e}{\lg} 1 = c_1 \overset{e}{\lg} r$ hat. Nun stimmen nach 3*) je zwei zusammengehörige Streifen beider Flächen überein, rechnet man also die letztere von 1 bis r, die erstere vom zugehörigen y_1 bis zum zugehörigen y, so mufs die Summe der Schichten der einen gleich der entsprechenden Summe der andern sein, d. h. es mufs werden

Fig. 234.

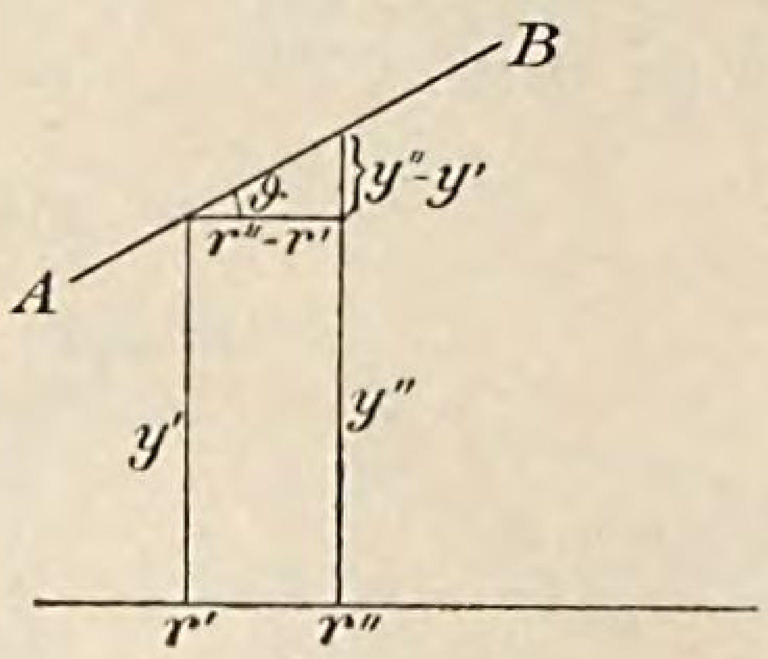
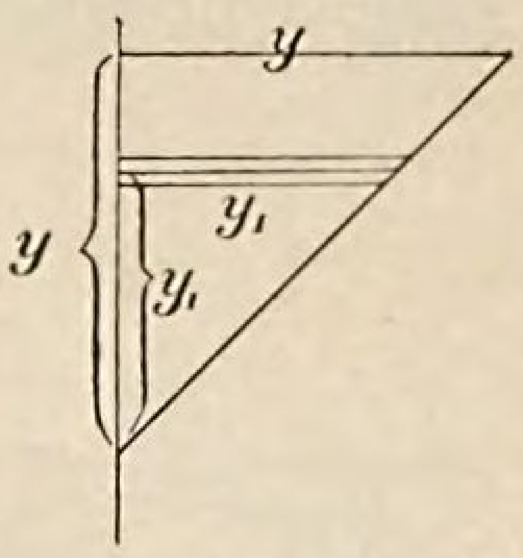


Fig. 235.



$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} = c_1 \lg r = r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \lg r$$

oder

$$y^2 = 2\, r_1 y_1 \tan \vartheta_1 \lg r + y_1^2.$$

Dieser Gleichung müssen also auch die Koordinaten der Kurven des Grundwasserstandes genügen.

Die Gleichung läfst sich unter Berücksichtigung von 2*) auch schreiben

4) $$y^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2$$

oder auch

4*) $$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2}.$$

Nun steht aber diese Gleichung zur Gleichung

5) $$y = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r + y_1^2,$$

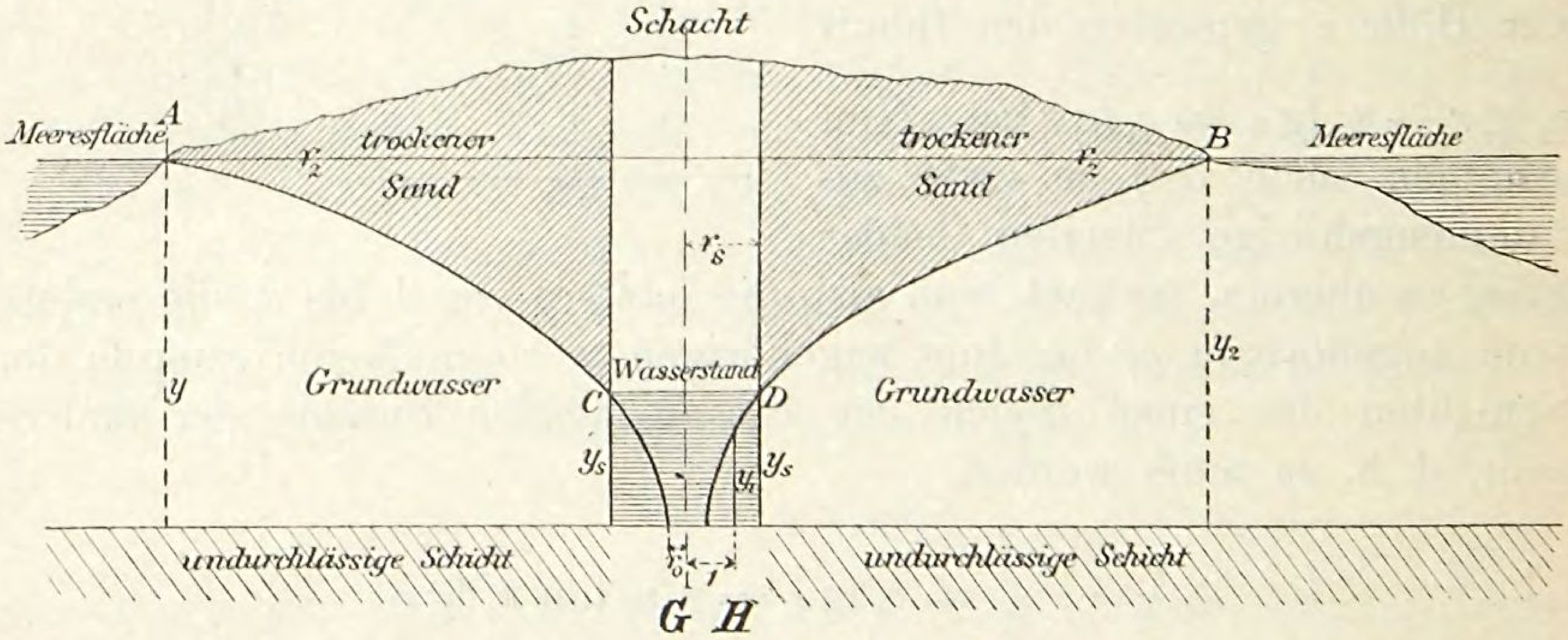
die eine logarithmische Linie darstellt, in der Beziehung, dafs die Ordinaten der Kurve 4*) die Quadratwurzeln aus denen der Kurve 5) sind, d. h. dafs jede Ordinate von 4*) gemäfs der Proportion

$$1 : \sqrt{y_1} = \sqrt{y_1} : y_1$$

als mittlere Proportionale zur Strecke 1 und zur Ordinate y_1 konstruiert werden kann. Dies entspricht der im Anfang gegebenen Voraussagung.

Die durch 5) dargestellte Potentialfläche entspricht dem Falle der Ausströmung der Elektrizität aus einem Punkte der unbegrenzten Platte, der die Elektrizität auf einem sehr groſsen Kreise zugeleitet wurde. Bei 4) handelt es sich um die entsprechende Wasserstandsfläche, deren Ordinaten durch Wurzelausziehung gefunden werden. Wie man die logarithmische Potentialfläche elementar konstruieren kann, so kann man auch die Niveaufläche für radiale Grundwasserströmung elementar konstruieren. Vgl. Fig. 121.

Fig. 236.



Die Zeichnung stellt den Vorgang schematisch dar. $AB = 2\,r_2$ ist der Durchmesser der Insel und zugleich die Linie des ursprünglichen Grundwasserstandes. HDB ist eine der durch Gleichung 4) dargestellten Kurven.

Ist r_s der Radius des Schachtes und y_s die zu r_s gehörige Ordinate der Kurve, y_2 die zu r_2 gehörige, so folgt nach 4) für diese Stellen

$$y_2^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r_2 + y_1^2,$$

$$y_s^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg r_s + y_1^2,$$

also durch beiderseitige Subtraktion

$$6) \qquad y_2^2 - y_s^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r_2 - \lg r_s) = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg \left(\frac{r_2}{r_s}\right).$$

Die dem Wasserstande y_s des Brunnens zugehörige Wasserentnahme Q, d. h. seine Ergiebigkeit für diese Einstellung, ist

$$7) \qquad Q = \frac{\pi \varkappa \left(y_2^2 - y_s^2\right)}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\pi \varkappa \left(y_2^2 - y_s^2\right)}{\lg \left(\frac{r_2}{r_s}\right)}.$$

Die Ergiebigkeit bei stationärem Betriebe ist also umgekehrt proportional dem Logarithmus des Radienverhältnisses $\frac{r_2}{r_s}$ und direkt proportional der Durchläſsigkeitskonstante $\varkappa$ und der Quadratdifferenz der Grenzhöhen, d. h. dem Ausdrucke $\left(y_2^2 - y_s^2\right)$.

Die Analogie mit den Formeln für die Parallelströmung fällt sofort in die Augen. Nach 6), wo für y_2 das allgemeine y zu setzen ist, läſst sich die Gleichung der Niveaufläche auch schreiben

$$8) \qquad y^2 - y_s^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r - \lg r_s),$$

oder, indem man den Wert von Q aus 7) einsetzt:

$$9) \qquad \frac{y^2 - y_s^2}{y_2^2 - y_s^2} = \frac{\lg r - \lg r_s}{\lg r_2 - \lg r_s} = \frac{\lg \frac{r}{r_s}}{\lg \frac{r_2}{r_s}}.$$

Damit ist eine rein geometrische Gleichung gefunden, die nur von gemessenen Längen abhängig ist.

Wäre z. B. $r_2 = 1000$ m, $r_s = 1$ m, $y_2 = 30$ m, $y_s = 20$ m, so würde die Gleichung der Niveaufläche lauten

$$\frac{y^2 - 20^2}{30^2 - 20^2} = \frac{\overset{e}{\lg}\frac{r}{1}}{\overset{e}{\lg}\frac{1000}{1}} = \frac{\overset{e}{\lg} r}{\overset{e}{\lg} 1000} = \frac{\frac{1}{m}\overset{10}{\lg} r}{\frac{1}{m}\overset{10}{\lg} 1000} = \frac{\overset{10}{\lg} r}{\overset{10}{\lg} 1000} = \frac{\overset{10}{\lg} r}{3},$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{500}{3} \overset{10}{\lg} r + 400}.$$

Die Kurve trifft die Grundfläche an der Stelle, wo $\frac{500}{3} \overset{10}{\lg} r = -400$ ist, also $\lg r = -\frac{1200}{500} = -2{,}4$ oder $\lg \frac{1}{r} = 2{,}4$, d. h. $\frac{1}{r} = 251$, so daſs die Entfernung von der Schachtachse gleich $\frac{1}{251}$ m ist.

Jede Niveaukurve setzt sich auf die Grundschicht senkrecht auf, denn nach Gleichung 3) ist $\tan \vartheta = \frac{r_1 y_1 \vartheta_1}{r y}$, was für $y = 0$ unendlich wird und $\vartheta = 90^0$ macht.

Zum obigen ganz willkürlichen Beispiele gehört nach 7) die Ergiebigkeit

$$Q = \frac{\pi \varkappa (30^2 - 20^2)}{\overset{e}{\lg}\frac{1000}{1}} = \frac{500 \pi \varkappa}{\frac{1}{m}\overset{10}{\lg} 1000} = \frac{500 \pi \varkappa m}{\overset{10}{\lg} 1000} = \frac{500}{3} 0{,}434 \cdot \pi \varkappa = \sim 227 \varkappa.$$

Wäre z. B. $\varkappa = \frac{1}{200}$, so würde die Ergiebigkeit für jede Sekunde gleich 1,135 cbm sein. Kennt man umgekehrt durch Pumpversuche $\varkappa = 1$ cbm, so würde $\varkappa = \frac{1}{227}$ sein, und zwar für den entsprechenden Dünensand, für den nun alle Aufgaben leicht zu lösen sein werden, z. B. auch für die Parallelströmung.

Wäre z. B. ein Bassin zur Ebbezeit mit seiner Wasseroberfläche 10 m über der undurchlässigen Schicht, die Meeresoberfläche selbst 9 m und würde die Trennung, rein schematisch gedacht, durch einen Damm von Dünensand in der Breite von 20 m herbeigeführt, so würde der Sickerverlust nach den obigen Formeln für das laufende Meter der Dammlänge sein

$$Q = \frac{b\varkappa\left(h_1^2 - h_2^2\right)}{2\,e} = 1 \cdot \frac{1}{227}\left(10^2 - 9^2\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 20} = \frac{19}{9080} \text{ cbm} = \sim 2 \text{ Liter}$$

auf die Sekunde.

Dabei ist jedoch das unmögliche Schema der Figur angenommen, denn der Dünensand wird sich nicht mit senkrechten Wänden einstellen. Auch der Wert von $\varkappa$ ist hier ganz willkürlich im Anschlufs an das obige Beispiel angenommen.

Rückt die Wand des Schachtes allzunahe an die Stelle heran, wo die Kurve sich auf die Grundfläche aufsetzt, so werden aus denselben Gründen, wie bei der Parallelströmung, die Formeln unbrauchbar.

288) **Bemerkung.** Es fragt sich, ob, wie bei der Parallelströmung, für unendliche Tiefe der Grundschicht der Unterschied zwischen der jetzt behandelten Niveaufläche und den früheren Potentialflächen aufhört. Zu diesem Zwecke schreibe man Gleichung 8) in der Form

$$(y + y_s)(y - y_s) = \frac{Q}{\pi\varkappa}(\lg r - \lg r_s)$$

oder

$$y - y_s = \frac{Q}{\pi\varkappa\,(y + y_s)}(\lg r - \lg r_s).$$

Ist nun y und auch y_s sehr grofs, so kann man statt $y + y_s$ schreiben $2\,y_s$, denn der endliche Unterschied darf gegen $2\,y_s$ vernachlässigt werden. Dies verwandelt die Gleichung in

$$y - y_s = \frac{Q}{2\,\pi\varkappa y_s}(\lg r - \lg r_s).$$

Dies aber ist die Gleichung einer gewöhnlichen logarithmischen Linie. Die Niveaufläche für sehr grofse Tiefen stimmt also überein mit einer gewissen Potentialfläche für elektrische Strömung.

289) **Folgerungen.** Aus den Gleichungen lassen sich gewisse Proportionen ablesen. Bildet man z. B. Gleichung 7) für zwei Fälle,

die sich nur bezüglich der Verhältnisse $\frac{r_2}{r_s} = q$ und $\frac{r_2'}{r_s'} = q'$ unterscheiden, so erhält man durch Division für die Ergiebigkeiten das Verhältnis

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\lg\left(\frac{r_2'}{r_s'}\right)}{\lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right)} = \frac{\lg q'}{\lg q}.$$

Setzt man $q = e^n$, $q' = e^{n'}$, so folgt

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{n'}{n}.$$

Sollen sich die Ergiebigkeiten wie $1:2$ verhalten, so mufs $q = e^n$, $q' = e^{2n}$, also $q' = q^2$ sein, sollen sich die Ergiebigkeiten wie $1:n$ verhalten, so mufs $q' = q^n$ sein.

Projiziert man bei einer solchen Niveaufläche die zu den Höhen

$$\sqrt{c},\quad \sqrt{2c},\quad \sqrt{3c},\quad \sqrt{4c}, \ldots$$

gehörigen Niveaulinien auf die Grundfläche, so entstehen koncentrische Kreise, deren Radien in geometrischer Reihe aufeinander folgen, z. B. nach der Reihe

$$e^{c_1},\quad e^{2c_1},\quad e^{3c_1},\quad e^{4c_1}, \ldots$$

Dies folgt daraus, dafs bei der entsprechenden Potentialfläche für elektrische Strömung die zu diesen Kreisen gehörigen Ordinaten nach dem Gesetz

$$c,\quad 2c,\quad 3c,\quad 4c, \ldots$$

aufeinander folgen, für die Niveaufläche aber die Wurzeln auszuziehen sind.

Befindet sich der Brunnenschacht im Binnenlande auf ausgedehnter Grundwasser führender Ebene, so kann man die obigen Resultate mit um so gröfserer Annäherung als richtig benutzen, je ausgedehnter die Ebene bei homogenem Materiale ist. Allerdings liefse sich einwenden, dafs, je länger der Pumpbetrieb dauert, der Radius r_2, der dann Schnitte der Niveaukurve durch die Grundwasserebene giebt, gröfser und gröfser werden müsse. Dies ändert aber für die nähere Umgebung des Brunnens schliefslich doch nichts.

290) **Beispiele.**

a) Nachdem der Zusammenhang mit dem logarithmischen Potential einmal klar gelegt ist, lassen sich zahlreiche Resultate ohne weiteres aussprechen.

Liegt der Brunnenschacht auf kreisförmiger Insel excentrisch, so bilde man zu dem betreffenden Punkte P den reciproken Q und lege durch P und Q ein Kreisbüschel nebst zugeordneter Kreisschar. Vgl. Fig. 127. Die Kreise des Büschels sind Stromlinien, die Kreise der Schar sind Niveaulinien des Grundwassers. An Stelle der Gleichung 4*) tritt

$$y^2 = \frac{Q}{\pi \varkappa} \lg \frac{r_1}{r_2} + y_1^2$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r_1 - \lg r_2) + y_1^2}\,.$$

Befindet sich der Brunnen in der Umgebung einer geradlinigen Küste, so hat man zu P nur das Spiegelbild zu bilden und wie vorher zu verfahren.

b) Handelt es sich um zwei Brunnenschachte auf unbegrenzter Ebene, deren Betrieb ein gleichartiger ist, so wird Fig. 125 mafsgebend, d. h. die Stromlinien sind ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, die Niveaulinien konfokale Lemniskaten 2^ter^ Ordnung. An Stelle von Gleichung 4) tritt

$$y^2 = \frac{Q}{\varkappa \pi} \lg (r_1 r_2) + y_1^2$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r_1 + \lg r_2) + y_1^2}\,.$$

Sind die Ergiebigkeiten der Brunnen verschieden, verhalten sie sich z. B. wie $\nu_1 : \nu_2$, so handelt es sich um die Niveaukurven und Niveauflächen

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\lg r_1^{\nu_1} + \lg r^{\nu_2}) + y_1^2}$$

oder

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2) + y_1^2} = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} \lg (r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2}) + y_1^2}\,.$$

Ebenso wird bei n Brunnen von der Ergiebigkeit $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ die Gleichung

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi \varkappa} (\nu_1 \lg r_1 + \nu_2 \lg r_2 + \nu_3 \lg r_3 + \ldots + \nu_n \lg r_n) + y_1^2}$$

oder

$$y^2 - y_1^2 = \frac{Q}{\varkappa \pi} \sum \nu_1 \lg r.$$

Dem Leser bleibe es überlassen, weitere Übungsbeispiele zu bilden.

Geschieht z. B. das Auspumpen mit Hilfe eines Sickerschlitzes, so wird Fig. 140 in Kraft treten, bei der es sich um konfokale Ellipsen und Hyperbeln handelt. Die Gleichung geht über in

$$y^2 - y_1^2 = \frac{Q}{2\pi} \lg \left[\frac{p+q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - 1}\right],$$

wenn die Länge des Schlitzes gleich 1 gesetzt wird.

Durch Abbildungen wie $Z = \sqrt{2}$ kann man zu andern Formen der Sickerschlitze übergehen.

In allen Fällen erhält man Gleichungen von der Form

$$y^2 - y_1^2 = c \cdot V,$$

wo V das entsprechende logarithmische Potential ist.

Da aber dies nur noch den Wert von Übungsbeispielen hat, soll von weiterem abgesehen werden. Man versuche, andere Zeichnungen dieses Werkes oder der „Isogonalen Verwandtschaften“ entsprechend zu deuten.

291) Schlufswort. Der Leser hat in dem Vorgetragenen eine Reihe von Eigenschaften des Potentials und ziemlich viele Anwendungen dieser Funktion auf die Gebiete der Gravitation, der Elektrostatik und des Magnetismus, des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, auf die Lehre von den stationären Strömungen der Wärme, der Elektrizität und idealen inkompressiblen Flüssigkeiten, auf die Lehre von den freien Ausflufsstrahlen, von den Wirbelbewegungen und den Bewegungen des Grundwassers kennen gelernt. Der Zusammenhang mit den Faradayschen Kraftlinien führte zu den Faraday-Maxwellschen Anschauungen, zur Vorstellung der Wirbelfelder und zu den Hertzschen Schwingungen über. Auch über die Elastizitätslehre, über die Kapillartheorie und über die Lehre von den Hodographen hätten elementare Betrachtungen herangezogen werden können. Je weiter man aber eindringt, um so mehr macht sich das Bedürfnis geltend, mit den Waffen der höheren Analysis zu arbeiten. Die analytische Behandlung der Potentialtheorie wird jedoch jedem Leser erleichtert sein, der hier bereits einen ersten vorläufigen Einblick in diese Lehre erhalten hat.

Bezüglich der Gravitation findet man noch einiges Elementare in Schells „Theorie der Bewegung und der Kräfte“, wo mehrere Probleme über die Anziehung homogener Linien, Flächen und einfach gestalteter Körper geometrisch bezw. mit Hilfsmitteln der gewöhnlichen Arithmetik behandelt sind. Namentlich bei Schalen, die

durch ähnliche Ellipsoide begrenzt sind, kann die höhere Analysis entbehrt werden, wie schon Newton gezeigt hat. Vgl. die Zusätze.

In Schellbachs „Neuen Elementen der Mechanik“ findet man ebenfalls einige elementar behandelte Probleme aus der Lehre von der Gravitation, die hier absichtlich übergangen wurden, insbesondere die Lösung der Aufgabe, die Gestalt des Körpers gröfster Attraktion zu bestimmen.

Vorgeschrittene Leser mögen auf die Originalabhandlungen von Gaufs, auf die von Grube herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über die Kräfte, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirken, auf die Schrift von Clausius über das Potential und die Potentialfunktion und auf folgende Werke Neumanns verwiesen werden, die, wie das früher citierte, sämtlich bei Teubner erschienen sind: „Beiträge zur mathematischen Physik“, „Hydrodynamische Untersuchungen nebst Anhang über Elektrostatik und magnetische Induktion“, „Untersuchungen über das logarithmische Potential“. Endlich seien noch das Werk von Beer über die Elektrizitätslehre und Kirchhoffs Vorlesungen über mathematische Physik, auch die entsprechenden Vorlesungen des älteren Neumann genannt. Bezüglich der elektromagnetischen Theorie des Lichtes sei auf die Helmholtzschen Vorlesungen, herausgegeben von König und Runge (Hamburg und Leipzig bei Voss) und auf das entsprechende Werk von Tumlirz (bei B. G. Teubner erschienen) verwiesen. Auch der bald erscheinende 4. Band von Wüllners Experimentalphysik wird das Nötigste darüber enthalten. Auf Poincaré war bereits im Texte hingewiesen.

Mit diesen Andeutungen sei unsere elementare Einführung in die Theorie des Potentials und seiner wichtigsten Anwendungen beschlossen.

Kapitel XV. Anhang A.

Zusätze zur Lehre von der Gravitation und der Elektrostatik, Flächen zweiten Grades betreffend.

1) Übergang von der Kugel zum Ellipsoid. Man denke sich eine Kugel auf horizontaler Fläche ruhend. Jeden ihrer Horizontalschnitte verschiebe man horizontal so weit, dafs die Mittelpunkte eine schräge Gerade bilden; dann entsteht ein dreiachsiges Ellipsoid. [Das allgemeinste ist es noch nicht, weil seine Höhe bei vorliegender Stellung gleich dem Durchmesser des gröfsten Kreisschnittes ist. Man kann aber den Vorgang mit anderen Parallelschnitten wiederholen, was volle Allgemeinheit, sonst aber nichts Neues giebt.] Zwischen beiden Körpern besteht ein Affinitätsverhältnis. Jeder Geraden innerhalb des einen entspricht eine Gerade innerhalb des anderen, jeder Ebene eine Ebene, die durch Horizontalprojektion aufeinander bezogen sind.

Ganz ebenso gehen koncentrische Kugelschalen in „ähnlich begrenzte Ellipsoidschalen" über. Bei jeder in vier Punkten schneidenden Sehne sind bei der Hohlkugel, folglich auch bei der ähnlich begrenzten Ellipsoidschale, die „Aufsenstücke" gleich. Jeder ebene Schnitt der Ellipsoidschale giebt ähnliche Ellipsen. Entsprechende körperliche Teile beider Körper sind inhaltsgleich, was jedoch nicht von entsprechenden Flächen gilt.

2) Anziehung des Ellipsoids und der ähnlich begrenzten Ellipsoidschale im Innern.

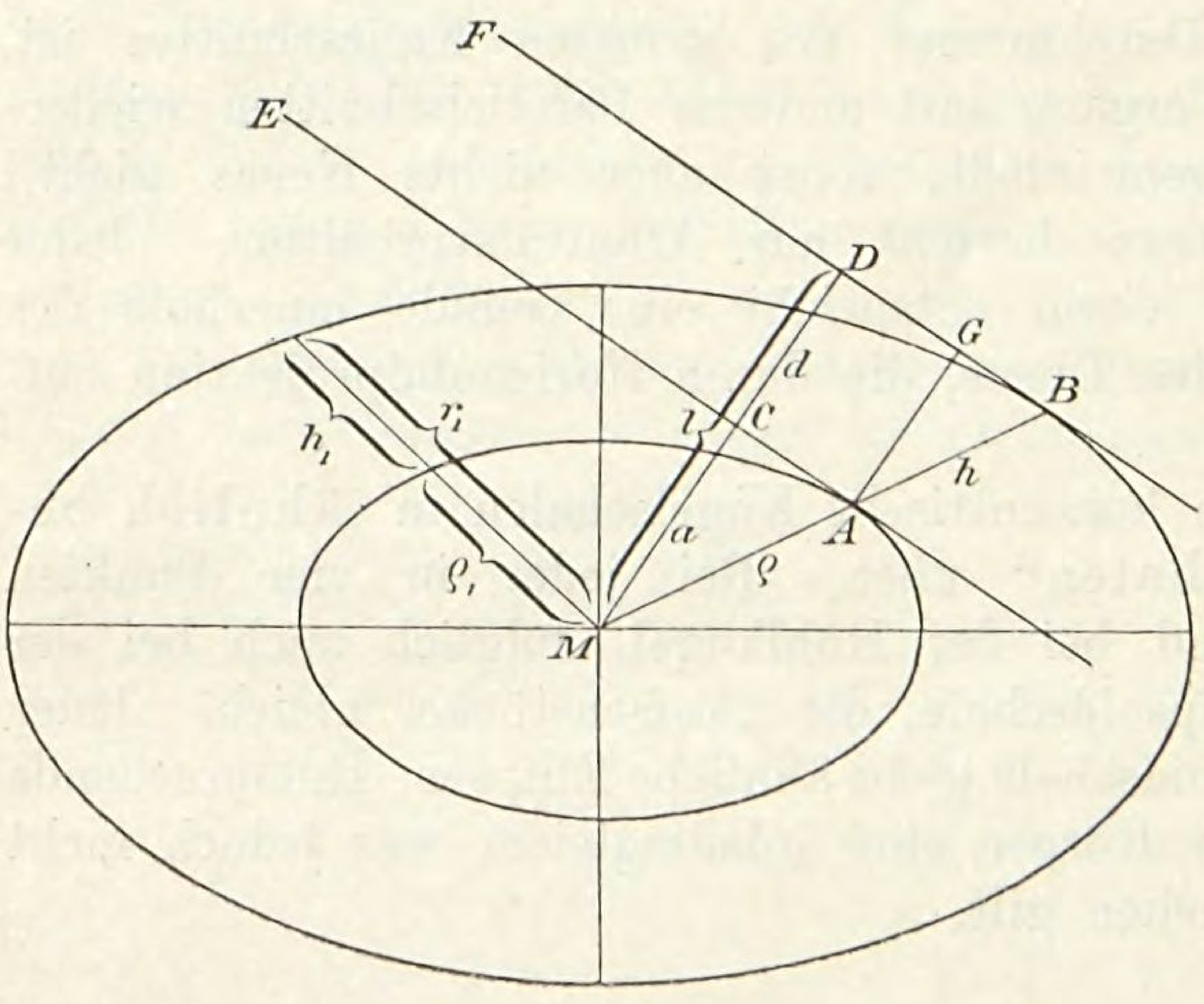
Man denke sich die Kugelschale dünn, jedoch körperlich. Nach Fig. 17 ist dann die Anziehung, die je zwei kleine Antipodenteile in Bezug auf einen Punkt Q auf die in diesem befindliche Masseneinheit ausüben, gleich Null, weil ihre Massen direkt proportional den Quadraten der Abstände, die Anziehungen jeder Einheit aber umgekehrt proportional diesen Abständen sind. Überträgt man den ent-

stehenden Kegel durch die obige Horizontalverschiebung in das Ellipsoid, so bleiben die Massen dieselben, aber auch $l_1^2 : l_2^2$ bleibt dasselbe Verhältnis (Parallelprojektion). Die Anziehung ist also auch hier gleich Null. Folglich ist zunächst die Anziehung einer dünnen, ähnlich begrenzten Ellipsoidschale gleich Null, das Potential in ihrem Innern demnach konstant. Nun kann man aber jede beliebig dicke Ellipsoidschale solcher Art in ähnliche dünne Schichten zerlegen. Folglich gilt der Satz:

Die Anziehung der homogenen ähnlich begrenzten Ellipsoidschale auf Massen, die im Hohlraum liegen, ist gleich Null. Im massiven Ellipsoid nimmt die Anziehung im Innern bis zu Null ab. In jedem Punkte des Innern wirkt nur noch die Anziehung des Kernes, der durch das ähnliche, durch den Punkt gelegte Ellipsoid begrenzt wird.

3) Geometrische Folgerung. MB in Fig. 237 sei ein Halbmesser der ähnlich begrenzten Ellipsoidschale. Die Tangentialebenen AE und BF (in A und B berührend) sind aus Ähnlichkeitsgründen parallel. $MD = l$ sei das von M aus auf die Ebene gefällte Lot. Dann ist in den Bezeichnungen der Figur $MA : MB = MC : MD$ oder $\varrho : r = a : l$. Ebenso ist $\varrho : h = a : d$ und $h : r = d : l$. Nun ist aber für alle Radien der ähnlich begrenzten Schale $\frac{h}{\varrho} = \frac{h_1}{\varrho_1}$, ebenso $\frac{h}{r} = \frac{h_1}{r_1}$, und $\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho_1}{r_1}$, so daſs jeder dieser Brüche für alle

Fig. 237.



Lagen des Radius und der Tangentialebene konstanten Wert behält. Statt CD kann auch die Parallele AG gesetzt werden. Dabei liegt G auſserhalb des Ellipsoids. Ist aber die Schale dünn, so rückt G nahe an B heran, der Abstand vom Ellipsoid aber wird unendlich klein zweiter Ordnung. [Man denke an die Sekanten-Tangentenformel der Kugel: Auſsenstück mal ganze Sekante gleich dem Quadrate der Tangente.] Dann darf man also $AG = d$ als die Dicke der Ellipsoidschale betrachten.

Jetzt ist wie vorher $\frac{d}{l} = \varkappa$, wo $\varkappa$ eine Konstante ist, also $d = \varkappa \cdot l$. Folglich:

Die Dicke einer ähnlich begrenzten dünnen Ellipsoidschale ist proportional dem vom Mittelpunkte auf die zugehörige Tangentialebene gefällten Lote.

4) Physikalische Folgerungen. Regelt man bei einer dünnen Ellipsoidschale die Dicke so, dafs diese proportional dem vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene gefällten Lote ist, so ist die Anziehung im Hohlraum gleich Null und das Potential ist dort konstant.

Fafst man nun die Massenbelegung als eine Flächenbelegung auf, so tritt an Stelle der Dicke d die Dichte δ der Belegung. Folglich:

Wird eine Ellipsoidfläche so mit Masse belegt, dafs die Dichte der Flächenbelegung an jeder Stelle proportional dem Abstande der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte ist, so ist die Anziehung dieser Belegung für den ganzen Innenraum gleich Null und das Potential ist dort konstant.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

Ladet man nun einen Konduktor mit Elektrizität, so ordnet sich diese nach den früheren Betrachtungen so auf der Oberfläche an, dafs das Potential im Innern konstant und die Anziehung Null ist, denn wäre dies nicht der Fall, so würden elektrische Scheidungskräfte eintreten. Folglich:

Ladet man einen ellipsoidischen Konduktor mit Elektrizität, so ist nach Eintreten des Gleichgewichtszustandes die Dichte an jeder Stelle proportional dem Abstande der zugehörigen Tangentialebene vom Mittelpunkte.

Die Dichte ist also am gröfsten im Endpunkte der längsten, am kleinsten am Endpunkte der kleinsten Hauptachse; sie ist konstant für diejenigen Punkte der Ellipsoidfläche, für welche der Abstand der Tangentialebenen konstant ist.

Diese Abstände spielten schon in Band I § 406 bei dem Culmannschen Centralellipsoid eine wichtige Rolle. Aufserdem sind sie von Bedeutung für die Hauptkrümmungsradien des Ellipsoids. (Vgl. Salmon Fiedler, analytische Geometrie des Raumes, I § 205.) Die Dichtigkeit steht also auch in Beziehung zur Lehre von den Trägheitsmomenten und der Flächenkrümmung.

Aufgabe. Den Abstand des Mittelpunktes von der zum Punkte $x_1 y_1 z_1$ gehörigen Tangentialebene zu berechnen.

Auflösung. Die Gleichung des Ellipsoides, die sich aus der der Kugel ebenso leicht durch Affinität ableiten läfst, wie die der Ellipse aus der des Kreises, möge sein

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dann ist die der Tangentialebene für den Oberflächenpunkt $x_1 y_1 z_1$ von der Form

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1.$$

Dies wird ganz ähnlich, wie bei der Tangentengleichung der Ellipse, elementar gezeigt. Setzt man hier $y_1 = 0$ und $z_1 = 0$, so folgt $x = \frac{a^2}{x_1}$ als Entfernung des Schnittpunktes für die X-Achse und die Tangentialebenen. Ebenso gilt für die anderen Achsen $y = \frac{b^2}{y_1}$, $z = \frac{c^2}{z_1}$. Demnach bildet das vom Mittelpunkte auf die Ebene gefällte Lot l mit den Achsen Winkel, die sich bestimmen aus

$$\cos\alpha = \frac{l}{x} = \frac{lx_1}{a^2}, \quad \cos\beta = \frac{l}{y} = \frac{ly_1}{b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{l}{z} = \frac{lz_1}{c^2}.$$

Aus

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

folgt demnach

$$l^2\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}\right) = 1,$$

demnach ist

$$l = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Folglich:

Die Dichte der elektrischen Belegung eines ellipsoidischen Konduktors ist proportional dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Ebenso ist die Dicke einer ähnlich begrenzten Ellipsoidschale diesem Ausdrucke proportional. Setzt man nämlich die Konstante

$$\frac{d}{l} = \frac{h}{\varrho} = \alpha,$$

so ist $d = l\alpha$, und damit ist die Proportionalität mit l klargelegt.

Aufgabe. Das Volumen einer dünnen ähnlich begrenzten Ellipsoidschale zu berechnen.

Auflösung. Setzt man $\frac{d}{l} = \frac{h}{\varrho} = \alpha$, so ist

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\varrho + h}{\varrho} = 1 + \frac{h}{\varrho} = 1 + \alpha,$$

also $r = \varrho\,(1 + \alpha)$. Daraus folgt für die Halbachsen

$$a_1 = a\,(1 + \alpha), \quad b_1 = b\,(1 + \alpha), \quad c_1 = c\,(1 + \alpha).$$

Ist der Inhalt des inneren Ellipsoids $J_2 = \frac{4}{3}\,abc\pi$, so ist nach dem Gesagten der des äußeren

$$J_1 = \tfrac{4}{3}\,a\,(1 + \alpha)\,b\,(1 + \alpha)\,c\,(1 + \alpha)\,\pi = \tfrac{4}{3}\,\pi abc\,(1 + \alpha)^3$$
$$= \tfrac{4}{3}\,\pi abc\,(1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3).$$

Nun war die Dicke als klein angenommen, also auch α als klein, man kann daher das Unendlichkleine höherer Ordnung vernachlässigen und (besonders für Flächenbelegungen) setzen $J_1 = \frac{4}{3}\,\pi abc\,(1 + 3\alpha)$. Daraus folgt

$$J_1 - J_2 = \tfrac{4}{3}\,abc\pi\,(1 + 3\alpha) - \tfrac{4}{3}\,abc\pi = 4\,abc\pi\alpha = 4\,abc\pi\,\frac{h}{\varrho}$$
$$= 4\,abc\pi\,\frac{d}{l}\cdot$$

Insbesondere folgt

$$d = l\alpha = \frac{l\,(J_1 - J_2)}{4\,abc\pi} = \frac{lJ}{4\,abc\pi} = \frac{J}{4\,abc\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}\,.$$

Ist also der Inhalt J einer dünnen Ellipsoidschale (ähnlicher Begrenzung) bekannt und sind die Hauptachsen a, b, c gegeben, so ist die Dicke an jeder Stelle x_1, y_1, z_1 nach der gegebenen Formel zu berechnen.

Physikalische Folgerungen. Wird ein ellipsoidischer Konduktor mit der elektrischen Menge E geladen, so ist die Dichte δ an jeder Stelle $x_1 y_1 z_1$

1) $$\delta = \frac{J}{4\pi abc}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_2^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}\,.$$

Für $y_1 = 0$ und $z_1 = 0$ folgt

$$\delta = \frac{E}{4\pi abc}\cdot\frac{a^2}{x_1} = \frac{Ea}{4\pi bcx_1}\,.$$

Dies gilt für die Schnittlinie mit der YZ-Ebene. Für $x_1 = a$, den Endpunkt der langen Achse, folgt

$$\delta_a = \frac{E}{4\pi abc} a = \frac{E}{4\pi bc},$$

für die Endpunkte der anderen Achsen ist

$$\delta_b = \frac{E}{4\pi abc} b = \frac{E}{4\pi ca}, \quad \delta_c = \frac{E}{4\pi abc} c = \frac{E}{4\pi ab}.$$

Aus der ersten Schreibweise folgt

$$\delta_a : \delta_b : \delta_c = a : b : c.$$

Um zum Sonderfalle der elliptischen Scheibe überzugehen, schreibe man die Formel 1) in der Form

$$\delta = \frac{E}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2 c^2}{a^4} + \frac{y_1^2 c^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^2}}}.$$

Aus der Ellipsoidformel folgt aber für den Punkt $x_1 y_1 z_1$

$$\frac{z_1^2}{c^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Einsetzung dieses Wertes giebt

$$\delta = \frac{E}{4ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2 c^2}{a^4} + \frac{y_1^2 c^2}{b^4} + 1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}}.$$

Ist hier $c = 0$, so handelt es sich um eine elliptische Platte mit den Halbachsen a und b. Und es folgt der Satz:

Ladet man eine dünne elliptische Platte mit den Halbachsen a und b mit der elektrischen Menge E, so wird die Dichte der Belegung in jedem Punkte $x_1 y_1$

2) $$\delta = \frac{E}{4ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}}}.$$

Handelt es sich um eine kreisförmige Platte, so wird

3) $$\delta = \frac{E}{4a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2}}} = \frac{E}{4a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = \frac{E}{4a\pi\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Bei 2) und 3) folgt aus der Gleichung der Kurven für die Randlinie die Dichtigkeit $\delta = \infty$. Handelt es sich um eine gerade Linie von der Länge a, so schreibe man Gleichung 2) in der Form

$$\delta = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - y_1^2}} = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - \left(b^2 - \frac{x_1^2}{a^2} b^2\right)}} = \frac{E}{4a\pi} \cdot \frac{1}{0},$$

was einen unendlich grofsen Wert giebt. Dies ist naturgemäfs, da jetzt die ganze Belegung sich auf der Randlinie befindet.

Macht man für die Formel 2) die elektrische Menge $E_1 = E \cdot n$, also n mal so grofs und zugleich $b_1 = nb$, so erhält man

$$\delta = \frac{nE}{4a(nb)\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{n^2 b^2}}}.$$

Für grofses n kann man dann $\frac{y_1^2}{n^2 b^2}$ gleich Null setzen und erhält

$$4)\quad \delta = \frac{nE}{4a(nb)\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}} = \frac{E_1}{4ab_1\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}} = \frac{E_1}{4b_1\pi\sqrt{a^2 - x_1^2}}.$$

Jetzt ist die Dichte nur von x_1 abhängig, d. h. es handelt sich um das in Nr. 194 und Fig. 140 dargestellte zweidimensionale Problem, welches auf konfokale Ellipsen und Hyperbeln bezw. deren Cylinder führt.

Für unsere Zwecke reicht es hin, daraus den Schlufs zu ziehen, dafs die Niveauflächen für den Fall 2) überhaupt konfokale Flächen zweiten Grades sind.

Influenzproblem. Man lege um eine elliptische Fläche eine konfokale Ellipse und durch ihre kleine Achse in normaler Ebene eine Ellipsenfläche, die ihre Brennpunkte in den Endpunkten der kleinen Achse der ersten Ellipse hat. Durch die beiden letzten Flächen läfst sich dann ein dreiachsiges Ellipsoid legen, für welches die erste Ellipse die Fokalellipse ist.

Wird nun die Fläche der Fokalellipse mit der Elektrizität $+E$ geladen, so sind nach obiger Bemerkung die Kraftlinien durch die Schnittkurven der konfokalen ein- und zweimanteligen Hyperboloide gegeben. Diese schneiden jedes der konfokalen Ellipsoide konfokal, beeinflussen also eine auf einem solchen bereits vorhandene Ladung nicht in ihrer Verteilung. War keine Ladung da, und leitet man die

Schale nach der Erde ab, so sammelt sich die Influenzelektrizität erster Ordnung $-E$ in gleicher Quantität an und ordnet sich nach Vorschrift der Formel 1) an. Die Wirkungen von $+E$ und $-E$ nach aufsen heben sich auf. Beide Ladungen wirken also nach aufsen, vom Vorzeichen abgesehen, in gleicher Weise.

Für die Influenzelektrizität gilt aber die Formel $p_1 = 4\pi\delta$ (vgl. Nr. 124), wo p_1 die Anziehung des Kernkörpers bezw. seiner Belegung ist. Folglich:

Ladet man eine elliptische Fläche mit der Elektrizität E, so ist die Wirkung in jedem Raumpunkt $x_1 y_1 z_1$ auf die Einheit

$$p = \frac{E}{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}},$$

wo a, b, c die Hauptachsen des durch den Punkt gelegten Ellipsoids sind. Die Richtung von p ist normal gegen diese Fläche. Die Kraftröhren gehorchen bezüglich ihrer Querschnitte der Gleichung $pF = p_1 F_1$.

Entsprechendes gilt von der Ladung jeder Ellipsoidfläche bezw. jedes ellipsoidischen Konduktors.

Nun kann man aber an Stelle der elektrischen Belegung eine Massenbelegung setzen, an Stelle der Dichte δ die entsprechende Dicke d der Schale mit ähnlicher Begrenzung. Folglich, wenn die Gravitationskonstante $\varkappa = 1$ gesetzt wird:

Eine ähnlich begrenzte Ellipsoidschale von der homogen verteilten Masse m wirkt auf jeden Raumpunkt $x_1 y_1 z_1$ in der Stärke

$$p = \frac{m}{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}},$$

wo a, b, c die Halbachsen des durch den Punkt gelegten konfokalen Ellipsoids sind. Die Richtung ist normal gegen diese Fläche. Diese ist also Niveaufläche.

Hat man zwei Schalen, deren Aufsenflächen konfokale Ellipsoide sind, deren Innenflächen bezw. Dicken sich nach dem Gesetz der ähnlichen Begrenzung richten, so wirken beide nach aufsen identisch, wenn die Massen gleich sind, sie wirken im Verhältnis der Massen, wenn diese verschieden sind.

Dieser Satz gilt auch von zwei homogenen massiven Ellipsoiden (Mac Laurin).

Damit sind durch einfache physikalische Überlegungen Sätze der Gravitationstheorie (und Elektrostatik) abgeleitet, die von hervorragenden Analytikern entdeckt und von Chasles elementar bewiesen wurden. Näheres findet man bei Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte in dem Abschnitte Potential.

Die besonderen Fälle der Drehungsellipsoide, die der Belegung der Flächen von Fokalhyperbeln und von ein- und zweimanteligen Hyperboloiden lassen sich hieran anschliefsen. Dies sei jedoch dem Studium oder der eigenen Arbeit des Lesers überlassen.

Kapitel XVI. Anhang B.

Von den Einheiten und Dimensionen.

Früher betrachtete man gewisse Gewichte als die Krafteinheiten und leitete aus ihnen die Massen mit Hilfe der Gleichung $m = \frac{p}{g}$ ab, wo $g = 9{,}81$ die Freifallbeschleunigung im luftleeren Raume bedeutet. Das Gewicht eines Kilogrammstückes schwankt aber auf der Erdoberfläche sehr bedeutend, erstens wegen der Drehung der Erde, die am Äquator eine Centrifugalkraft hervorruft, durch welche die Schwerkraft vermindert wird, zweitens infolge der mit dieser Drehung zusammenhängenden Abplattung, welche die Schwere ebenfalls vom Äquator nach den Polen hin abnehmen läſst. Auf Grund genauer Messungen hat man für die geographische Breite φ die Formel

$$g = 978{,}009 + 5{,}190 \sin^2 \varphi$$

aufgestellt. Nach Sabine handelt es sich um Schwankungen zwischen 978,009 und 983,089. Darüber vergleiche man die physikaſischen Lehrbücher. Ein Kilogrammgewicht übt also auf eine Federwage am Pol eine andere Wirkung aus, als am Äquator, es ist also für feinere Messungen eine veränderliche Krafteinheit. Auch mit der Meereshöhe und in der Tiefe der Schachte ändert sich das Gewicht.

Bedenkt man ferner, daſs auf der Sonnenoberfläche dasselbe Kilogrammstück das 28,3 fache Gewicht angiebt, auf dem Monde das 0,16 fache, so sieht man wohl ein, daſs das Gewicht ein bedenklicher Ausgangspunkt für die Krafteinheiten der Wissenschaft ist.

Schon Gauſs fühlte sich veranlaſst, an Stelle des gebräuchlichen Systems von Einheiten ein solches zu setzen, welches für das gesamte Weltall und für alle denkbaren Verhältnisse passen sollte. Er nannte es wegen seiner Allgemeingültigkeit das absolute Maſssystem. Da dieses von der Elektrotechnik neuerdings allgemein angenommen worden ist, und da es auch die neueren physikalischen Lehrbücher beherrscht, kann es nicht mehr entbehrt werden. Auch in diesem Buche ist es vielfach zur Sprache gekommen.

Wir setzen die Einheiten für die Zeit, die Länge und für die Masse als Grundeinheiten fest und leiten die übrigen daraus ab. Dabei wird sich aber zeigen, dafs die Feststellung der Einheiten eine recht schwierige Aufgabe ist.

A. Die wichtigsten Einheiten der Mechanik.

a) Die Grundeinheiten.

1) Die Zeiteinheit.

Die allgemein gebräuchliche Zeiteinheit ist die Sekunde. Sie ist eine der am schwierigsten zu bestimmenden Einheiten. Es handelt sich um den 86 400$^{\text{sten}}$ Teil des mittleren Sonnentages. Die Zeitdauer von einer Kulmination der Sonne zur andern wechselt nämlich im Laufe des Jahres ganz beträchtlich, erstens deshalb, weil sich die Sonnenentfernung ändert, zweitens deshalb, weil die Wanderung der Erde mit veränderlicher Geschwindigkeit vor sich geht. Daher ist der Unterschied zwischen dem Sonnentage und dem fast konstanten Sterntage bald gröfser, bald kleiner. Die mittlere Länge des Sonnentages erhält man, indem man die Zeit des tropischen Jahres, d. h. 366,2422 Sterntage in 365,2422 gleich lange mittlere Tage einteilt, so dafs ein Sterntag gleich 23 Std. 56 Min. 4,091 Sek. mittlerer Zeit ist, dagegen ein mittlerer Tag = 24 Std. 3 Min. 56,555 Sek. Sternzeit. Der Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Zeit ergiebt sich aus der sogenannten Zeitgleichung, die uns sagt, um wie viel eine das ganze Jahr hindurch gleichmäfsig und richtig gehende Uhr täglich falsch geht, ein bekanntes scheinbares Paradoxon. Vgl. Nr. 23.

Dazu kommt noch, dafs die neuere Astronomie sogar die altehrwürdige Sekunde aus dem Reiche der Unveränderlichkeit verwiesen hat, da auch der Sterntag nicht konstant geblieben ist. Seit den Zeiten des Hipparch, also seit etwa 2000 Jahren, hat sich, wie aus der Theorie der Mondbewegung hervorgeht, der Sterntag um $\frac{1}{81}$ Sek. verlängert, also die Erddrehung entsprechend verlangsamt. Der Hauptgrund dafür ergiebt sich aus der feineren Theorie der Gezeiten (Ebbe und Flut). Vgl. Nr. 40. Aufserdem würde auch die etwaige Erkaltung der Erde, aus der wahrscheinlich eine Zusammenziehung folgen müfste, auf die Drehungsgeschwindigkeit einwirken, und zwar beschleunigend. Streng genommen übt auch jeder Meteorsteinfall eine allerdings geringfügige Wirkung aus. Bei astronomischen Rechnungen, die sich, wie die Rückwärtsbestimmungen der Sonnenfinsternisse, auf Jahrtausende erstrecken können, summieren sich nun allerdings diese kleinen Unterschiede zu erheblichen Gröfsen. Für technische Zwecke kann man

sich aber bei der obigen Definition der Sekunde beruhigen und gegebenenfalls jeder Spitzfindigkeit dadurch begegnen, dafs man sie als den 86 400sten Teil des jetzigen mittleren Sonnentages erklärt. Sonstige Zeiteinheiten werden hier nicht zur Sprache kommen.

2) Die Längeneinheit.

In Frankreich wurde durch Beschlufs vom 25. Juni 1800 der 10millionste Teil eines Quadranten des Erdmeridians als Einheit des Längenmafses gesetzlich vorgeschrieben und zwar auf Grund von Messungen und Berechnungen (Laplace) über die Abplattung der Erde. Der deutsche Astronom Bessel hat nachträglich in den Rechnungen einen Fehler nachgewiesen, der das Meter um ein weniges zu klein gemacht hat. (In Wahrheit hat der Meridianumfang der Erde nicht 40 000 000 m, sondern 40 003 423 m, der Äquatorumfang 40 070 368 m). Ein Platinstab, der bei 0^0 C diese Länge angiebt, ist in Paris als Normalmeter aufbewahrt. Seit 1889 ist in Paris noch ein Platin-Iridiumstab, mit entsprechenden Marken versehen, aufbewahrt worden. Kopien befinden sich in den Archiven der Länder, die sich seit 1867 dem metrischen System angeschlossen haben. — Jedenfalls war es praktischer, dieses leicht zu kontrollierende Mafs zu Grunde zu legen, als den Erdumfang, der auf jedem Meridian ein anderer sein kann (das Geoid ist durchaus kein genaues Drehungsellipsoid), und der sich aufserdem bei jeder Senkung von Kontinenten und ebenso bei dem etwaigen Abkühlungsprozefs der Erde mit den Jahrtausenden ändern wird. Von Interesse ist aber, dafs der Pariser Normalstab genau auf die Temperatur des schmelzenden Eises bei normalem Luftdruck gebracht werden mufs, um das richtige Mafs anzugeben, so dafs in Wirklichkeit die Wärmemessung zur Kontrolle der Raummessung heranzuziehen ist. Die aus dem Meter decimal abgeleiteten Einheiten sollen als bekannt vorausgesetzt werden, ebenso die Flächen- und Raumeinheiten.

3) Die Masseneinheit.

Als Einheit der Masse ist von dem zur Regelung der elektrischen Einheiten nach Paris berufenen Kongrefs am 21. September 1881 die Masse des als Gramm bekannten Gewichtsstückes angenommen worden. Es handelt sich um die Masse, die sich bezüglich der Anziehung durch die Erde an allen Orten ebenso verhält, wie die Masse eines Kubikcentimeters chemisch reinen Wassers im Zustande gröfster Dichtigkeit (fast genau 4^0 C). Also auch hier wird die Wärmemessung und sogar die Chemie zur Prüfung herangezogen. Auch für die Grammmasse hat man in Paris ein Urgramm aufbewahrt,

an dem sich die Messungen leichter bewerkstelligen lassen. Nach genauesten Messungen hat 1 cm^3 Wasser 1,000013 Urgrammmassen.

In gleicher Weise wird aus dem Kubikmeter die Masse der Tonne, aus dem Kubikdecimeter die des Kilogramms, aus dem Kubikmillimeter die des Milligramms abgeleitet.

(Da diese Ausdrücke im praktischen Leben als Gewichte aufgefafst werden, so soll hier stets, wenn es notwendig sein sollte, zwischen Massengramm und Gewichtsgramm u. s. w. geschieden werden.)

Aus den genannten drei Grundeinheiten läfst sich alles übrige ableiten.

Innerhalb des absoluten Mafssystems kommen also für die Physik und Technik im ganzen vier Möglichkeiten in Betracht:

a) das Meter-Tonnen-Sekunden-System,
b) das Decimeter-Kilogramm-Sekunden-System,
c) das Centimeter-Gramm-Sekunden-System,
d) das Millimeter-Milligramm-Sekunden-System.

Sämtliche sind gleichberechtigt, und mit der Einführung eines jeden von ihnen sind die übrigen miteingeführt, da ihre Mafse sich untereinander nur um Potenzen von 10 unterscheiden. Man wird das eine oder das andere anwenden, je nachdem Grofses oder Kleines zu messen ist.

Die Elektrotechnik hat das Centimeter-Gramm-Sekunden-System bereits eingeführt. Das auf noch kleinere Verhältnisse berechnete System unter d), welches von Gaufs und Weber für die elektrischen Mafsbestimmungen benutzt wurde, kann für die Technik aufser acht bleiben.

b) Die abgeleiteten Einheiten.

1) Die Geschwindigkeit ist bei gleichförmiger Bewegung der auf die Sekunde zurückgeführte Weg, also

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}.$$

Ist die Bewegung ungleichmäfsig, so ist für jeden Augenblick der unendlich kleine Weg durch die unendlich kleine Zeit zu dividieren. Der Ausdruck giebt an, wie weit sich der Punkt bezw. Körper in einer Zeiteinheit bewegen würde, wenn von jetzt ab die Bewegung konstant sein würde. Jedenfalls wird stets eine Anzahl von Längeneinheiten durch eine Anzahl von Zeiteinheiten dividiert. Sind die beiden Zahlen gleich, so ist die Geschwindigkeit $v = 1$, d. h. gleich der Einheit der Geschwindigkeit. Der obige Ausdruck bedeutet also folgendes:

$$\text{Anzahl der Geschwindigkeitseinheiten} = \frac{\text{Anzahl der Längeneinheiten}}{\text{Anzahl der Zeiteinheiten}}.$$

Es ist also stes

$$v = \frac{l}{t} = lt^{-1}.$$

Man nennt den Ausdruck lt^{-1} die Dimension der Geschwindigkeit. Mit den Benennungen l und t wird ebenso gerechnet, wie mit arithmetischen Zahlen a, b, c, x, u. s. w.

2) Die Beschleunigung. Bewegt sich ein Körper so, dafs seine Geschwindigkeit in gleichen Zeitteilchen gleiche Zunahmen erfährt, so sagt man, die Beschleunigung sei eine gleichmäfsige. Ist v_1 die Anfangs-, v_2 die Endgeschwindigkeit und dividiert man $v_2 - v_1$ durch die Anzahl der Sekunden, d. h. durch t, so erhält man die Geschwindigkeitszunahme für die Zeiteinheit; sie ist

$$g = \frac{v_2 - v_1}{t}.$$

Ist die Beschleunigung ungleichförmig, so handelt es sich für jeden Augenblick um eine unendlich kleine Geschwindigkeitsdifferenz, dividiert durch eine unendlich kleine Zeit. Die Dimension der Beschleunigung ist zu erkennen aus

$$\frac{v}{t} = \frac{\left(\frac{l}{t}\right)}{t} = \frac{l}{t^2} = lt^{-2}.$$

Sind die Zahlen im Zähler und Nenner gleich, so wird $g = 1$ und man hat die Einheit der Beschleunigung.

3) Die Kraft. Hat ein Körper die Masse m und wirkt auf ihn eine Kraft, die ihm, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, in der Sekunde die Beschleunigung g giebt, so sagt man, die Gröfse der Kraft sei $p = mg$, also

Kraft = Masse mal Beschleunigung.

Ist $m = 1$ und $g = 1$, so wird die Kraft gleich 1. Die Krafteinheit ist also diejenige Kraft, die der Masse 1 in der Zeit 1 die Beschleunigung 1 erteilt. Im C. G. S.-System ist die Krafteinheit die Kraft, die der Masse eines Gramms die Beschleunigung 1 cm erteilt. Diese Kraft wird nach Clausius Vorschlag als eine Dyne oder ein Dyn (von δύναμις, Kraft) bezeichnet.

Die Schwerkraft giebt bei uns jedem Körper im luftleeren Raume die Beschleunigung 9,81 m = 981 cm. Das Dyn giebt ihm die Be-

schleunigung 1 cm, also ist die Krafteinheit Dyn der 981te Teil des alten Gewichtsgramms.

Die Dimension der Kraft ergiebt sich aus $m \cdot (lt^{-2}) = lmt^{-2}$.

4) Die Arbeit. Wird eine Kraft p längs eines in ihrer Richtung liegenden Weges w überwunden, so sagt man, es sei die Arbeit $A = pw$ geleistet worden. Also:

Arbeit = Kraft mal Kraftweg.

Ist $p = 1$ und $w = 1$, so ist die Arbeit $A = 1$. Also:

Die Arbeitseinheit ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn der Widerstand 1 Dyn längs des Weges 1 cm überwunden wird. Diese Arbeit wird nach Clausius als 1 Erg (von ἔργον, Werk) bezeichnet.

Die frühere Arbeitseinheit Meterkilogramm war gleich 100000 Centimetergramm, also, da jedes Gewichtsgramm gleich 981 Dyn ist,

$$1 \text{ mkg} = 981 \cdot 10^5 \text{ Dyn}.$$

Die Dimension der Arbeit ergiebt sich aus pw als $(mlt^{-2})\,l$ oder l^2mt^{-2}.

5) Die Leistung. Wird in t Sekunden gleichmäſsig die Arbeit A geleistet, so kommt auf jede Sekunde die Leistung $L = \frac{A}{t}$. Unter Leistungsfähigkeit oder Leistung soll also stets die auf die Sekunde reduzierte Arbeit verstanden werden. Ist $A = 1$ und $t = 1$, so hat man die Leistung 1. Also:

Die Einheit der Leistung ist die sekundliche Arbeit von der Gröſse eines Erg. Sie wird als Sekundenerg bezeichnet.

Die Pferdestärke der Technik bedeutet eine sekundliche Leistung von 75 Meterkilogramm, sie ist also gleich $75 \cdot 10^5 \cdot 981$ Sekundenerg. Die Dimension von $L = \frac{A}{t}$ ergiebt sich aus $\frac{l^2mt^{-2}}{t}$ als l^2mt^{-3}.

Die sind die wichtigsten Einheiten der Mechanik.

Bisweilen sieht man sich veranlaſst, von einem der absoluten Maſssysteme zum andern überzugehen. Läſst man das Millimeter-Milligramm-Sekunden-System beiseite, und geht man vom C.G.S.-System nur zum Gröſseren, also zu dem in m über, so ergiebt sich folgende Tabelle:

Die Längenmaſse	verhalten sich wie	$1 : 10 : 10^2$
„ Flächenmaſse	„ „ „	$1 : 10^2 : 10^4$
„ Raummaſse und „ Masseneinheiten	„ „ „	$1 : 10^3 : 10^6$

Die Kraftmaſse	verhalten sich wie	$1 : 10^4 : 10^8$
„ Arbeitsmaſse und „ Leistungsmaſse	„ „ „	$1 : 10^5 : 10^{10}$.

Durch diese Potenzen von 10 sind die sogenannten Verwandler gegeben. Sie lassen sich aus den Ausdrücken für die Dimensionen ableiten.

Bemerkungen. Die Elektriker haben auf dem Pariser Kongreſs eine Anzahl von Einheiten eingeführt, die leider aus dieser allgemeinen Tabelle heraustreten. Unter Megadyn (Groſsdyn) versteht man 10^6 Dyn, unter Mikrodyn (Kleindyn) 10^{-6} Dyn. Ebenso ist das Megerg (Groſserg) $= 10^6$ Erg, das Mikrerg (Kleinerg) $= 10^{-6}$ Erg. Ferner ist 1 Joule = 10 Megerg $= 10^7$ Erg, 1 Watt = 1 Sekunden-Joule $= 10^7$ Sekundenerg, so daſs eine Pferdestärke abgerundet gleich 736 Watt ist.

Aufgabe. Für verschiedene Begriffe der Mechanik sollen die Dimensionen festgestellt werden.

Statisches Moment einer Kraft. Kraft mal Hebelarm giebt $(lmt^{-2})\, l = l^2mt^{-2}$. Vgl. Begriff der Arbeit.

Statisches Moment einer Masse. Masse mal Hebelarm giebt $ml = lm$.

Statisches Moment eines mathem. Körpers = (Inhalt l^3) mal Hebelarm giebt $l^3 \cdot l = l^4$.

Statisches Moment einer mathem. Fläche = (Fläche l^2) mal Hebelarm giebt $l^2 \cdot l = l^3$.

Statisches Moment einer mathem. Linie = (Länge l^1) mal Hebelarm giebt $l \cdot l = l^2$.

Statisches Moment eines mathem. Punktes = (l^0) mal Hebelarm giebt $l^0 \cdot l = l^1$.

Trägheitsmoment eines physischen Körpers (Masse). Masse mal Quadrat des Trägheitsradius giebt $ml^2 = l^2m$.

Trägheitsmoment	des	mathem.	Körpers	giebt	$l^3 \cdot l^2 = l^5$.
„	der	„	Fläche	„	$l^2 \cdot l^2 = l^4$.
„	„	„	Linie	„	$l \cdot l^2 = l^3$.
„	des	„	Punktes	„	$l^0 \cdot l^2 = l^2$.

Flächendruck $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ giebt $\frac{lmt^{-2}}{l^2} = l^{-1}mt^{-2}$ z. B. Zugspannung, Druckspannung, Tragmodul, Elastizitätsmodul, hydrostatischer Bodendruck, Seitendruck, Dampfdruck und dgl., alles auf die Flächeneinheit reduziert.

Dichte $= \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$ giebt $\frac{m}{l^3} = l^{-3}m$.

Widerstandsmoment einer Fläche (Querschnittsmodul) also $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Abstand}}$ giebt $\frac{l^4}{l} = l^3$.

Gravitationskonstante. Aus $p = \varkappa \frac{m \cdot m_1}{r^2}$ = Kraft folgt $\varkappa = \frac{pr^2}{mm_1}$. Dies giebt $\frac{(lmt^{-2})\, l^2}{m^2} = l^3 m^{-1} t^{-2}$.

Potential zwischen zwei Körpern $\frac{mm_1}{r} = \frac{pr}{\varkappa}$ giebt $l^{-1} m^2$.

Bei Berücksichtigung von $\varkappa$ erhält man $\varkappa \frac{mm_1}{r}$, was die Dimension einer Arbeit giebt, denn $(l^3 m^{-1} t^{-2}) \cdot \frac{m^2}{l} = l^2 m t^{-2}$.

Potentialfunktion. Aus $\frac{m}{r}$ folgt als Dimension $l^{-1} m$. Dabei ist die Dimension von $\varkappa$ und die der angezogenen Masseneinheit vernachlässigt. Oft wird diese Funktion kurz als Potential bezeichnet.

Bemerkung. Gleichungen der Mechanik müssen beiderseits homogen oder äquivalent sein, d. h. die Dimensionen müssen rechts und links übereinstimmen oder sich durcheinander ersetzen lassen (z. B. Wärmeeinheit = 425 mkg, also $W = l^2 m t^{-2}$).

Beispiel: Die Traggleichung für Biegungsfestigkeit $Pl = SZ$ hat links statisches Moment $l^2 m t^{-2}$, rechts Spannung mal Widerstandsmoment, also $(l^{-1} m t^{-2})\, l^3 = l^2 m t^{-2}$. Beides stimmt überein.

Bemerkung. 1 Cal $= 4{,}2 \cdot 10^7$ Erg; 1 Erg $= 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Cal.; 1 Watt $= 10^7$ Sek. Erg $= 0{,}24$ Cal. auf die Sekunde $= 0{,}00136$ Pferdestärke.

B. Die Einheiten des Magnetismus und ihre Dimensionen.

1) Magnetische Menge.

Die magnetischen Kräfte gehorchen der Gleichung $p = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$. Links steht die Anziehungs- oder Abstoſsungskraft. Rechts bedeuten μ_1 und μ_2 nicht ponderable, sondern magnetische Massen und Mengen. Man kann ihre Einheiten so bestimmen, daſs $\varkappa = 1$ ist. Dann wird $\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} = p$, also $\mu_1 \mu_2 = pr^2$. Sind die Mengen gleich, so folgt $\mu^2 = pr^2$, also $\mu = r\sqrt{p}$. Die Dimension der magnetischen Masse ist also zu bestimmen aus $l\sqrt{lmt^{-2}}$. Dies giebt als Dimension der magnetischen Menge μ den Ausdruck $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Dieser auf den ersten Blick wegen seiner Kompliziertheit befremdende Ausdruck ist dadurch entstanden, daſs man, um einfacher rechnen zu können, sich geeinigt hat, die Dimension der Konstanten $\varkappa$ zu vernachlässigen. μ wird auch Polstärke eines Magneten genannt.

Ist in $\mu = r\sqrt{p}$ $r = 1$ und $p = 1$, so wird $\mu = 1$.

Die magnetische Masseneinheit ist also diejenige magnetische Menge, die auf eine gleich grofse Menge in Entfernung 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübt. Die Menge von 10^8 solcher Einheiten heifst zu Ehren des berühmten Physikers ein Weber.

2) Magnetische Potentialfunktion einer Masse. $V = \frac{\mu}{r}$ $= \frac{\text{magnetische Masse}}{\text{Entfernung}}$ giebt $\frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l}$ oder als Dimension $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Hier sind dieselben Vereinfachungen vorgenommen wie beim Gravitationspotential bezw. seiner Funktion. Ist $m = 1$ und $r = 1$, so wird $V = 1$. Dadurch ist die Potentialeinheit definiert.

3) Magnetisches Potential zwischen zwei Massen. (Magnetische Energie).

$$\frac{\mu_1}{r} \cdot \mu_2 \text{ giebt } (l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1})\, l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1} = l^2 m t^{-2}.$$

Dies ist die Dimension einer Arbeit, der Name Energie ist also berechtigt. Zwischen zwei magnetischen Masseneinheiten herrscht in der Entfernung von 1 cm das Potential 1, d. h. es ist ein Erg Arbeit nötig, um die eine aus der Entfernung 1 von der festgehaltenen andern in unendliche Entfernung zu schaffen.

4) Potentialgefälle $= \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Abstand der Niveauflächen}}$ giebt $\frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l}$ (bezogen auf Einheit) oder die Dimension $l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

5) Feldstärke F in einem Punkte = Kraft, die ein Pol auf die in diesem Punkte befindliche magnetische Einheit ausübt. Dimension folgt aus $\frac{\text{Kraft}}{\text{magn. Menge}} = \frac{l m t^{-2}}{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

4) und 5) sind identisch, 5) ist die Erklärung von 4). Aus 5) folgt $F \cdot \mu$ = Feldstärke mal magn. Menge gleich Kraft; Potentialgefälle gleich der auf die magnetische Einheit ausgeübten Kraft.

6) Magnetisches Moment eines Magnets = Polstärke mal Länge des Magnets. Dimension $= \mu \cdot l = \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l = l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

7) Drehmoment eines Magnets von Polstärke μ und Länge l im homogenen Felde (z. B. dem des Erdmagnetismus) von Feldstärke F.

Es ist gleich $F \cdot \mu \cdot l \sin\alpha$, wenn der Stab mit der Kraftrichtung des Feldes den Winkel α bildet. Der Höchstwert ist $F\mu l$. Dimension $= \left(l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l = l^2 m t^{-2}$. (Vgl. Stat. Moment der Mechanik.)

8) Schwingungsdauer des Magnets im homog. magn. Felde $= 2\pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Drehmoment}}}$; Dimension ist $\sqrt{\frac{m l^2}{l^2 m t^{-2}}} = \sqrt{t^2} = t$, wie zu erwarten war.

9) Spezifischer Magnetismus $= \frac{\text{Magn. Moment}}{\text{Masse}} = \frac{l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{m}$ $= l^{\frac{5}{2}} m^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$.

10) Intensität der Magnetisierung $= \frac{\text{Magn. Moment}}{\text{Volumen}} = \frac{l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^3}$ $= l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

11) Zahl der Kraftlinien = Feldstärke mal Fläche $= \left(l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l^2$ $= l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

C. Einheiten der Elektrostatik.

1) Elektrische Menge. Sie wird, wie die des Magnetismus, aus $p = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$ für $\varkappa = 1$ abgeleitet. Ihre Dimension ist also ebenfalls $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Einheit der elektrischen Menge ist diejenige Menge, die auf eine gleich grofse in der Entfernung 1 cm die Anziehung 1 Dyn ausübt.

Die praktische Einheit der Elektrotechnik umfafst $3 \cdot 10^9$ solche Einheiten und heifst ein Coulomb.

2) Elektrische Potentialfunktion $= \frac{\mu}{r}$ giebt, wie beim Magnetismus, als Dimension $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Definition der Potentialeinheit: Ist $\mu = 1$ und $r = 1$, so ist das Potential = 1.

3) Elektrisches Potential in Bezug auf zwei Massen $\frac{\mu \cdot \mu_1}{r}$ hat die Dimension $\left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) = l^2 m t^{-2}$, es bedeutet also eine Arbeit.

Ist $\mu = 1$, $\mu_1 = 1$ und $r = 1$, so kostet es die Arbeit 1, die eine der Mengen unter Festhaltung der andern ins Unendliche zu ent-

fernen. Die zur Überwindung eines Potentialunterschiedes 1 (durch Fortbewegung der elektrischen Menge 1) nötige Arbeit ist ein Erg. Handelt es sich um die Arbeit $\frac{1}{3 \cdot 10^2}$ Erg, so heifst der Potentialunterschied ein Volt.

4) Dimension der Dichte $\delta = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}$ ist $\frac{\mu}{l^2} = \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}}{l^2} = l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

5) Oberflächenspannung $2\pi\delta^2$ hat die Dimension $\delta^2 = l^{-1} m t^{-2}$.

6) Kapazität eines Leiters ist die Ladung, die sein Potential um 1 erhöht, also Ladung reduziert auf die Einheit des Potentials d. h.

$$\text{Kapazität} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}} = \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l$$

Ist ein Coulomb Ladung nötig, um das Potential um 1 zu erhöhen, so nennt man die Kapazität ein Farad.

$$1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}} = \frac{3 \cdot 10^9}{\frac{1}{3 \cdot 10^2}} \text{ oder } 9 \cdot 10^{11} \text{ absolute Einheiten.}$$

7) Energie der Ladung $= \frac{1}{2} V \cdot \mu$, Dim. $= \left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \left(m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}\right) = l^2 m t^{-2}$, also die Dimension einer Arbeit. Vgl. Nr. 3.

8) Dimension der Dielektrizitätskonstante $= \frac{\text{Kap.}}{\text{Kap.}} = l^0 m^0 t^0$.

D. Erläuterung des galvanischen Stromes und seiner Gesetze, nebst Ableitung der Einheiten und ihrer Dimensionen.

Hat ein homogener Draht die Länge 1, den Querschnitt 1, und ist die Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpol, deren Bedeutung noch näher besprochen werden soll, gleich Eins, so braucht die Einheit der Elektrizitätsmenge, um einen der Querschnitte zu passieren, eine gewisse Zeit ϱ, die konstant ist, wenn die Strömung den Charakter einer stationären Strömung hat. Diese Zeit hängt von der chemischen Beschaffenheit, d. h. vom Material des Drahtes ab und steht in enger Beziehung zu der Geschwindigkeit der Elektrizität im Drahte. Die Dimension von ϱ ist t.

Folglich: In jeder Sekunde passiert durch jeden Querschnitt 1 eine Elektrizitätsmenge $\lambda = \frac{1}{\varrho}$. Ihre Dimension ist $\frac{1}{t}$ oder t^{-1}.

Man bezeichnet ϱ, weil es auf lauter Einheiten bezogen ist, als den spezifischen Widerstand des Drahtes; λ heifst sein Leitungskoeffizient oder das spezifische Leitungsvermögen.

Der spezifische Widerstand wird also gemessen durch die Zeit, die bei der Potentialdifferenz 1 nötig ist, um in einem Drahte von Länge 1 und Querschnitt 1 die elektrische Menge 1 durch jeden Querschnitt passieren zu lassen.

Der Leitungskoeffizient giebt an, welche Menge Elektrizität dabei in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt geht.

Hat nun der Stab die lfache Länge, so ist ein lfacher Widerstand zu überwinden, und daher geht, wie das Ohmsche Gesetz sagt, nur der l^{te} Teil der Elektrizitätsmenge λ durch jeden Querschnitt 1, sobald die Potentialdifferenz dieselbe ist. Aus dem Potentialgefälle $\frac{1}{1}$ ist eben $\frac{1}{l}$ geworden, aus der Menge λ wird daher $\frac{\lambda}{l}$.

Giebt man ferner dem Drahte den Ffachen Querschnitt, so wandert naturgemäfs in jeder Sekunde die Ffache Elektrizitätsmenge $\frac{\lambda}{l}F$ durch jeden Stabquerschnitt.

Ist endlich die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten nicht 1, sondern $D = V_1 - V_2$, die Anziehung jedes Poles auf die entgegengesetzte elektrische Einheit also D mal so grofs, als vorher, so geht in jeder Sekunde im Einklang mit dem Ohmschen Gesetz die Dfache Elektrizitätsmenge durch jeden Querschnitt, wie vorher, nämlich die Menge

$$J = \frac{\lambda}{l} F (V_1 - V_2).$$

Um zu sehen, ob diese Angaben dem Begriffe der Elektrizitätsmenge entsprechen, setze man an Stelle dieser Ausdrücke die bekannten Dimensionen. Man erhält als Dimension von J

$$\frac{t^{-1}}{l} l^2 \cdot \left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \quad \text{oder} \quad l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Nun hatte aber die Elektrizitätsmenge die Dimension $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$, hier steht also in der That $\frac{\text{Elektrizitätsmenge}}{\text{Zeit}}$, d. h. die sekundlich passierende Elektrizitätsmenge.

Man nennt den gefundenen Ausdruck die Stromstärke oder Intensität, so dafs

$$J = \frac{\lambda}{l} F (V_1 - V_2) = \lambda F \frac{V_1 - V_2}{l} = \lambda F G$$

ist, wo G das Potentialgefälle $\frac{V_1 - V_2}{l}$ für die Drahtlänge l bedeutet.

Die Stromstärke also ist die Menge von Elektrizität, die sekundlich durch jeden Querschnitt des Drahtes geht.

Sie ist proportional dem Leitungskoeffizienten λ, dem Querschnitte F, der Potentialdifferenz, und umgekehrt proportional der Länge des Drahtes; oder, sie ist proportional dem Leitungskoeffizienten, dem Querschnitte und dem Potentialgefälle.

Ist $J = \lambda F G = 1$, so sagt man, der Strom habe die Stärke 1 (C. G. S.-System). Ist $J = 3 \cdot 10^9$, d. h. passiert in jeder Sekunde durch F ein Coulomb $= 3 \cdot 10^9$ C. G. S.-Einheiten Elektrizitätsmenge, so sagt man, der Strom habe die Stärke 1 Ampère. Die Anzahl der Ampère giebt also an, wieviel Coulomb in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt passieren. Es ist 1 Ampère = 1 Sekunden-Coulomb. Man merke also:

Anzahl der Ampère = Anzahl der Coulomb auf die Sekunde $= \frac{\text{Menge}}{\text{Zeit}}$.

Ampère mal Zeit giebt die Elektrizitätsmenge. So kann man die Ladung eines Akkumulators gleich n Ampèrestunden setzen.

Um auch für die Potentialdifferenz etwas Greifbares zu erhalten, untersuche man das Produkt $(V_1 - V_2)\,J$ in Bezug auf seine Dimensionen. Man erhält

$$\left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \cdot \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}\right) = l^2 m t^{-3} = \frac{l^2 m t^{-2}}{t}.$$

Dies ist die Dimension einer Leistung oder einer sekundlichen Arbeit. Also:

Das Produkt aus Potentialdifferenz und Stromstärke ist äquivalent einer mechanischen Arbeitsleistung auf die Sekunde.

Folglich:

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Arbeit auf die Sekunde}}{\text{Elektrizitätsmenge auf die Sekunde}}$$

$$= \frac{\text{Arbeit in } t \text{ Sekunden}}{\text{Elektrizitätsmenge in } t \text{ Sekunden}} = \frac{\text{Stromarbeit}}{\text{Elektrizitätsmenge}},$$

letzteres für beliebige Zeit.

Man kann also die Potentialdifferenz deuten als die Stromarbeit, reduziert auf die Einheit der Elektrizitätsmenge. Ist z. B. in den Einheiten des C. G. S.-Systems die Stromarbeit gleich 1 und die Elektrizitätsmenge gleich 1, so hat man die Potentialdifferenz 1. Ist aber die Stromarbeit nicht gleich 1 Erg, sondern gleich $\frac{1}{3 \cdot 10^2}$ Erg, und die Elektrizitätsmenge gleich 1, so ist die Potentialdifferenz gleich $\frac{1}{3 \cdot 10^2}$ Einheiten des C. G. S.-Systems.

Diese Differenz bezeichnet man als 1 Volt. Demnach ist die Stromleistung von

$$(1 \text{ Volt}) \cdot (1 \text{ Ampère}) = \left(\frac{1}{3 \cdot 10^2}\right) \cdot (3 \cdot 10^9) \text{ Sek. Erg} = 10^7 \text{ Sek. Erg}$$
$$= 1 \text{ Sek. Joule} = 1 \text{ Watt},$$

und

$$\text{Anzahl der Volt gleich } \frac{\text{Sekundenleistung}}{\text{Anzahl der Ampère}},$$

oder

Anzahl der Volt gleich Sekundenleistung durch sekundliche Menge,

oder

$$\text{Anzahl der Volt gleich } \frac{\text{Arbeit}}{\text{Menge}} \text{ für beliebige Zeit } t.$$

Nun war

$$\frac{\lambda F}{l}(V_1 - V_2) = J,$$

also

$$\frac{V_1 - V_2}{J} = \frac{l}{\lambda F} = \varrho \frac{l}{F},$$

d. h. die Potentialdifferenz, die für jedes Ampère des Stromes nötig ist, ist gleich $\varrho \frac{l}{F}$.

Es war aber ϱ der spezifische Widerstand für $l = 1$ und $F = 1$. Nach dem Ohmschen Gesetze ist der wirkliche Widerstand proportional der Drahtlänge und umgekehrt proportional dem Querschnitte, und so hat man $r = \varrho \frac{l}{F}$ als Widerstand W des Drahtes zu betrachten. Dies giebt

$$\frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Stromstärke}} = \text{Widerstand}, \quad \frac{D}{J} = W.$$

Die Dimension des Widerstandes ist $t \cdot \frac{l}{l^2} = tl^{-1}$, also das Umkehrte einer Geschwindigkeit.

Bringt die Potentialdifferenz 1 Volt die Stromstärke 1 Ampère hervor, so sagt man, der Widerstand sei ein Ohm.

Also ist

$$1 \text{ Ohm} = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ampère}} = \frac{\frac{1}{300}}{3 \cdot 10^9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ Widerstandseinheiten}$$

des C. G. S.-Systems.

Man merke:

Anzahl der Volt = Anzahl der Ohm mal Anzahl der Ampère;

$$\text{Anzahl der Ampère} = \frac{\text{Anzahl der Volt}}{\text{Anzahl der Ohm}},$$

$$\text{Anzahl der Ohm} = \frac{\text{Anzahl der Volt}}{\text{Anzahl der Ampère}},$$

oder, wenn D die Potentialdifferenz ist,

$$D = W \cdot J, \quad J = \frac{D}{W}, \quad W = \frac{D}{J}.$$

Aus $DJ = L$ und $\frac{J}{D} = \frac{1}{W}$ folgt durch Multiplikation noch $J^2 = \frac{L}{W}$ oder $L = J^2 \cdot W$, d. h. Leistung gleich Widerstand mal Quadrat der Stromstärke.

Ist nun A das mechanische Äquivalent der Wärme, d. h. 1 Cal. $= 4{,}2 \cdot 10^7$ Erg, also 1 Erg $= 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Cal. und 1 Watt $= 0{,}24$ Cal. pro Sekunde, so ergiebt sich folgendes:

Aus $L = WJ^2$ folgt, dafs der Strom in der Zeit t die Wärmemenge

$$Q = \frac{WJ^2t}{A}$$

entwickeln kann. Ist z. B. der Widerstand in Ohm, die Stromstärke in Ampère gegeben, die Leistung also in Watt, so wird in t Sekunden $0{,}24\,J^2Wt$ Cal. Wärme erzeugt, sobald der Strom keine weitere Arbeit, weder mechanische noch sonstige leistet. Dies ist der Ausdruck für das Gesetz von Joule.

Man kann den Vorgang der Strömung im homogenen Drahte vergleichen mit der Strömung eines Flusses, der z. B. für die Horizontalstrecke l das gleichmäfsige Gefälle $(h_1 - h_2)$ hat, dessen normaler Querschnitt F überall derselbe ist, dessen Bett auf der ganzen Strecke dieselbe Beschaffenheit hat. Das Gefällverhältnis $\frac{h_1 - h_2}{l} = \tan\alpha$ kann als proportional der Geschwindigkeit v angenommen werden, die überall dieselbe ist (vgl. Theorie des Reibungswinkels, wobei $\mu = \tan\alpha$ ist). Die Tiefe des Flusses reguliert sich von selbst so, dafs die Wassermenge $F \cdot v$ der sekundlich zulaufenden Wassermenge gleich ist. Setzt man nun $v = \lambda \tan\alpha = \lambda \frac{h_1 - h_2}{l}$, so ist λ eine Art von Reibungskoeffizient, der dem Leitungskoeffizienten λ im Drahte entspricht. Er hängt ab von allerlei Widerständen, die das Flussbett darbietet, Reibungswiderstand, Unebenheiten aller Art, auf dem Grunde liegende Steine, festwurzelnde Wasserpflanzen u. dgl., so dafs λ um so kleiner ist, je mehr Hindernisse sich der Strömung entgegenstellen. (Vgl. Nr. 158 und 159.)

Welche Arbeit könnte nun der Flufs für die Strecke l und das Gefälle $h_1 - h_2$ leisten, wenn man das letztere am Anfangspunkte der Strecke l vollständig ausnutzte und z. B. in senkrechtem Schachte einen Turbinenbetrieb anlegte, dessen Untergraben die Strecke l giebt? Die sekundliche Arbeit ist dann, da Fv die sekundliche Wassermasse vom Gewichte $F \cdot v \cdot 1$ Tonnen (technischen Maſssystems) und $(h_1 - h_2)$ die Höhe in Metern ist, theoretisch gleich

$$Fv\,(h_1 - h_2) = F \cdot \lambda \cdot \frac{h_1 - h_2}{l}\,(h_1 - h_2) \text{ Metertonnen.}$$

Im ursprünglichen Strome wird diese zur Überwindung der Hindernisse aufgebraucht, denn die Strömung ist stationär, an jeder Stelle ist die Geschwindigkeit konstant, eine Beschleunigung also findet nicht statt. Dabei kann man $F \cdot v = \lambda F \cdot \frac{h_1 - h_2}{l}$ als Stromstärke (sekundliche Wassermenge) bezeichnen. Genau so war vorher $\lambda F \cdot \frac{V_1 - V_2}{l}$ die in jeder Sekunde den Draht passierende Elektrizitätsmenge. Das spezifische Gewicht des Wassers multipliziert mit der Höhendifferenz $(h_1 - h_2)$ entspricht der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$, das Gefällverhältnis $\frac{h_1 - h_2}{l}$ multipliziert mit dem spezifischen Gewicht 1 des Wassers entspricht dem Potentialgefälle $\frac{V_1 - V_2}{l}$. In beiden Fällen ist

Leistungsfähigkeit oder Stromarbeit gleich dem Produkte aus der sekundlichen Menge des Fluidums multipliziert mit der Potentialdifferenz.

Die ganze Arbeitsfähigkeit wird in beiden Fällen dazu aufgebraucht, sekundlich die betreffende Menge des Fluidums durch alle Hindernisse hindurchzudrängen.

Aufklärend ist auch folgendes Bild:

Zwei Wasserbecken seien durch eine Mauer voneinander getrennt. Dem oberen fliefse durch einen Bach sekundlich die Wassermenge Q zu, aus dem unteren fliefse ebenso viel durch einen Bach ab. Beide seien am Grunde durch ein Rohr verbunden.

Angenommen, das Rohr wäre zu weit, dann würde sich der Spiegel des oberen Teiches so lange senken, bis der Höhenunterschied $h_1 - h_2$ und damit der Arbeitsdruck klein genug ist, um nur noch die Wassermenge Q sekundlich durch das Rohr zu drängen. Dieser stationäre Zustand tritt ein, sobald die Leistungsfähigkeit $Q\,(h_1 - h_2)$ (pro Sekunde) gerade zur Überwindung der Bewegungshindernisse ausreicht.

Ist jetzt der Wasserstand des oberen Teiches für den beabsichtigten Zweck zu niedrig, so kann man ihn dadurch erhöhen, dafs man ent-

weder die Länge des Rohres vergröfsert, was den Reibungswiderstand vermehrt, oder ein Rohr mit geringerem Durchmesser einschaltet, bei dem die gröfsere Durchflufsgeschwindigkeit, die gefordert wird, den Widerstand ebenfalls verstärkt. Jetzt steigt das Wasser so lange, bis die Leistungsfähigkeit $Q(h_1 - h_2)$ grofs genug ist, um wiederum bei stationärem Zustande zur Überwindung der Hindernisse auszureichen.

Jetzt hat man dieselbe Stromstärke (Q in der Sekunde), die sekundliche Arbeit $Q(h_1 - h_2)$ mufs aber die doppelte sein, wenn jetzt die doppelte Widerstandsarbeit zu überwinden ist. Also: bei gleicher Stromstärke ist der Höhenunterschied (Potentialdifferenz) proportional der Widerstandsarbeit. — Führt aber der Bach nur noch die Hälfte des Wassers zu, so mufs die Widerstandsarbeit halbiert werden, wenn das Niveau bleiben soll. Beides ist der obigen Formel $\frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Stromstärke}} = \text{Widerstand}$ ganz analog.

E. Elektromagnetisches Mafssystem.

Während der galvanische Strom im elektrostatischen System an sich selbst gemessen wurde, wird er hier auf Grund seiner Wirkungen nach aufsen gemessen. Es handelt sich jetzt um dasselbe J, um dieselbe Potentialdifferenz $D = V_1 - V_2$, um denselben Widerstand W, die Dimensionen aber lauten anders. Aus ihrem Vergleiche ergiebt sich eine neue Gröfse v, die etwa gleich der Geschwindigkeit des Lichtes ist und als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen im Äther des Weltraumes betrachtet wird. Dafs die praktischen Einheiten Ampère, Volt und Ohm des neuen Mafssystemes trotzdem dieselben sind, wie die früheren, bedarf eines Beweises, der ebenfalls gegeben werden soll.

1) Stromstärke. Wie die Lehrbücher (vgl. Nr. 259) auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes beweisen, wirkt ein Kreisstrom von der Stromstärke J und der Kreisfläche F nach aufsen magnetisch wie ein Elementarmagnet vom Momente $M = \varkappa JF$. Es ist also $J = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{M}{F}$, und man kann die Einheiten so wählen, dafs $\varkappa = 1$ wird. Dann ist also

$$J = \frac{M}{F} = \frac{\text{mgn. Moment}}{\text{Kreisfläche}},$$

und die neue Dimension von J wird nach dem früheren

$$\frac{{}^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^2} = l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}.$$

Ist $M = 1$ und $F = 1$, so wird $J = 1$.

Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke hat man also bei der Fläche $r^2\pi = 1$ des Kreisstroms und dem magnetischen Momente 1 der Aufsenwirkung.

Als praktische Einheit aber hat man das Ampère $= \frac{1}{10}$ der letzten Einheit festgesetzt, und unten soll gezeigt werden, dafs dieses Ampère dasselbe ist, wie das früher definierte.

2) Elektromotorische Kraft oder Potentialdifferenz $D = V_1 - V$ (auch als Spannung bezeichnet).

Aus $D \cdot J =$ Leistung L folgt, wie früher $D = \frac{L}{J}$. Die neu gefundene Dimension von J giebt hier für D die Dimension

$$\frac{l^2 m t^{-3}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Ist die Leistung gleich 1 und die Stromstärke gleich 1, so ist auch $D = 1$, also:

Man hat die Einheit der Potentialdifferenz, sobald ein Strom von der Stärke 1 die innere Arbeit 1 leistet.

Als praktische Einheit aber hat man das 10^8fache dieser Einheit eingeführt und sie als Volt bezeichnet. Unten wird bewiesen, dafs dieses Volt mit dem früher definierten identisch ist.

3) Elektromagnetische Einheit des Widerstandes.

Aus $W = \frac{D}{J}$ ergiebt sich infolge der neuen Dimensionen von D und J ebenfalls eine neue Dimension, nämlich $\frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}} = l t^{-1}$, also die einer Geschwindigkeit v, was sehr bedeutungsvoll ist, denn diese Geschwindigkeit hat sich durch Messungen als eine solche von etwa 300 000 Kilometer = 30 000 000 000 cm = $3 \cdot 10^{10}$ cm (etwa 40 000 geogr. Meilen) herausgestellt, so dafs sie, wie die elektromagnetische Lichttheorie Maxwells behauptet, mit der des Lichtes übereinstimmt!*)

*) Die Lichtgeschwindigkeit in Kilometern pro Sekunde ist nach Fizeau 314 000, nach den Aberrationsberechnungen 308 000, nach Foucault 298 360, im Durchschnitt 306 790. Das Verhältnis der elektrischen Einheiten nach Weber, Maxwell und Thomson ist, entsprechend reduziert, 310 740, 288 000, 282 000, im Durchschnitt 293 580. Bei den Schwankungen zwischen den drei ersten Angaben und den Schwierigkeiten elektrischer Messungen ist volle Übereinstimmung

Ist $D = 1$ und $J = 1$, so hat man die Einheit des Widerstandes. Die Einheit des Widerstandes im elektromagnetischen Maſssystem hat man, sobald eine Potentialdifferenz von der Stärke 1 eine Stromstärke von der Stärke 1 hervorruft.

Als praktische Einheit aber hat man das Ohm $= 10^9$ solcher Einheiten festgesetzt, und es soll bewiesen werden, daſs dieses mit dem früher definierten Ohm übereinstimmt.

Vergleich der alten und neuen Einheiten und Dimensionen.

Für den Augenblick sollen J_s, D_s und W_s die Ausdrücke des elektrostatischen Systems sein, J_m, D_m, W_m die des elektromagnetischen. Bezüglich der Dimensionen hat man dann

$$\frac{J_s}{J_m} = \frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l t^{-1},$$

d. h. die Dimension einer Geschwindigkeit v. Ferner

$$\frac{D_s}{D_m} = \frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}} = \frac{t}{l},$$

also ist die Dimension die des reciproken Wertes $\frac{1}{v}$ einer Geschwindigkeit v.

Endlich ist $\frac{W_s}{W_m} = \frac{t l^{-1}}{l t^{-1}} = t^2 l^{-2}$, also die Dimension die des Quadrates vom reciproken Werte einer Geschwindigkeit v, nämlich von $\frac{1}{v^2}$.

Nach den Messungen ist, wie oben angegeben, v stets gleich $3 \cdot 10^{10}$ cm. Demnach ist

$$J_s = v J_m, \quad D_s = \frac{1}{v} D_m, \quad W_s = \frac{1}{v^2} W_m.$$

Giebt aber dieselbe Intensität elektrostatisch gemessen die vfache Zahl, als elektromagnetisch gemessen, so muſs die Einheit$_s = \frac{1}{v}$ Einheit$_m$ sein, d. h.

Für die Intensität ist 1 Einheit$_m = 3 \cdot 10^{10}$ Einheiten$_s$.

durchaus nicht ausgeschlossen. Daſs es sich um eine Geschwindigkeit v handelt, ergiebt die Dimension, daſs diese Geschwindigkeit in ihrer ersten Potenz mit der des Lichtes nahezu übereinstimmt, ist unter allen Umständen bemerkenswert, besonders, nachdem durch dis Hertzschen Entdeckungen die Faraday-Maxwellschen Anschauungen bestätigt worden sind.

Nun war 1 Ampère$_m$ = $\frac{1}{10}$ Einheit$_m$ gewählt, also ist

$$1 \text{ Ampère}_m = \tfrac{1}{10} \text{ Einheit}_m = \tfrac{1}{10}\, 3 \cdot 10^{10} \text{ Einheiten}_s = 3 \cdot 10^9 \text{ Einheiten}_s$$
$$= 1 \text{ Ampère}_s.$$

Die Übereinstimmung der beiden Ampère ist dadurch nachgewiesen.

Ferner folgt aus obigem für dieselbe Potentialdifferenz $D_s = \frac{1}{v} D_m$, daſs die Einheit$_s$ = v Einheiten$_m$ sein muſs. Folglich:

Für die Potentialdifferenz oder Leistungsfähigkeit ist

$$1 \text{ Einheit}_m = \frac{1}{v} \text{ Einheit}_s = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \text{ Einheit}_s.$$

Nun war aber

$$1 \text{ Volt}_m = 10^8 \text{ Einheiten}_m,$$

also ist

$$1 \text{ Volt}_m = 10^8 \text{ Einheiten}_m = 10^8 \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \text{ Einheiten}_s = \frac{1}{3 \cdot 10^2} \text{ Einheiten}_s$$
$$= 1 \text{ Volt}_s.$$

Also auch hier herrscht Übereinstimmung in den praktischen Einheiten.

Für den Widerstand ist entsprechend $W_s = \frac{1}{v^2} W_m$, also muſs sein

$$\text{Einheit}_s = v^2 \text{ Einheiten}_m.$$

Folglich: für den Widerstand ist

$$1 \text{ Einheit}_m = \frac{1}{v^2} \text{ Einheit}_s = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}} \text{ Einheit}_s.$$

Nun war gewählt als praktische Einheit

$$1 \text{ Ohm}_m = 10^9 \text{ Einheiten}_m,$$

also ist

$$1 \text{ Ohm}_m = 10^9 \text{ Einheiten}_m = 10^9 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{20}} \text{ Einheiten}_s = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ Einheiten}_s$$
$$= 1 \text{ Ohm}_s.$$

Die Übereinstimmung ist also für alle Einheiten nachgewiesen.

Bezüglich der beiden Pariser Kongresse sei eingeschaltet, daſs die Beschlüsse auf einem Kompromiſs beruhen, der dem Ideale durchaus nicht entspricht: So sagt z. B. Kohlrausch im Leitfaden der praktischen Physik (8. Aufl. 1896 bei Teubner erschienen) auf Seite 450 bezüglich des Ampère = $\frac{1}{10}$ Einheit$_m$ des C. G. S.-Systems:

„Dafs es ein Fehler war, die C. G. S.-Einheit durch 10 geteilt in die Praxis einzuführen, so dafs sie bei allen elektromagnetischen Beziehungen mit 10 zurückmultipliziert werden mufs, ist zu spät erkannt worden. Es giebt keinen zweckmäfsigen Ausweg, als den von der Technik adoptierten, dafs man im Elektromagnetismus nicht nach Ampère, sondern mit der Weberschen C. G. S.-Einheit rechnet."

Dies ist eben die oben definierte absolute Einheit$_{m}$.

Zweitens haben sich die Engländer den Beschlüssen des Pariser Kongresses von 1884 nicht vollständig angeschlossen. Sie haben z. B. das Ohm nicht der beschlossenen Einheit entsprechend angenommen, sondern gröfser, und zwar als das $\frac{1,063}{1,06}$ fache. Dies entspricht in der That den genaueren Messungen der neueren Zeit. Durch die deutsche physikalische Reichsanstalt ist dies im Anschlufs an die Arbeiten des Prof. Dr. Dorn offiziell anerkannt worden. Dazu vergleiche man die „Vorschläge zu gesetzlichen Bestimmungen über elektrische Mafseinheiten, entworfen durch das Kuratorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt; nebst kritischem Bericht über den wahrscheinlichsten Wert des Ohm nach den bisherigen Messungen, verfafst von Dr. Dorn." Berlin, bei J. Springer. 86 Seiten. Dort wird „Amper" statt Ampère gesagt.

Die Schlufsbemerkung lautet:

„Die Übereinstimmung derjenigen Resultate für das Ohm, welche nach meiner Kritik zu erheblichen Einwänden nicht Veranlassung geben, mufs eine ziemlich befriedigende genannt werden. Die Differenzen übersteigen nicht das Mafs dessen, was nach den Beobachtungsfehlern und infolge bekannter störender Ursachen (Magnetismus der Apparate z. B.) erwartet werden darf.

Wir werden darin eine Gewähr dafür erblicken dürfen, dafs die für das vorliegende Gebiet mafsgebenden Naturgesetze uns hinreichend bekannt sind. Dies wird auch nach dem weiteren, insbesondere durch Hertz uns erschlossenen Standpunkte aus wahrscheinlich."

Der Erlafs eines Gesetzes über das Ohm als Mafseinheit steht bevor. [Das Ideal kann, wie Verfasser vor längerer Zeit in der Zeitschrift Deutscher Ingenieure (Band 36, Seite 895 ff.) dargelegt hat, nur dann erreicht werden, wenn man festhält, dafs die Masseneinheiten in den verschiedenen absoluten Mafssystemen dem Gesetze $1 : 10^3 : 10^6$, die Krafteinheiten dem Gesetze $1 : 10^4 : 10^8$, die Arbeits- und Leistungsmafse dem Gesetze $1 : 10^5 : 10^{10}$ gehorchen, was alle Rechnungen beim Übergange aus dem einen ins andere überflüssig machen würde.]

Man kann sich über die elektromagnetischen Einheiten und Dimensionen noch folgendes merken.

Die Stromintensität hatte die Dimension $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Sie bedeutete $\frac{\text{Elektrizitätsmenge}}{\text{Zeit}}$, d. h. sekundliche Menge. Multipliziert man also mit t, so erhält man die elektrische Menge an sich, ohne Bezugnahme auf die Zeit. Ihre Dimension ist jetzt $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}$. (Im elektrostatischen System war sie $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.) Praktische Einheit 1 Coulomb gleich $\frac{1}{10}$ absolute Einheit pro Sekunde entspricht dem Ampère.

Das elektrochemische Äquivalent des Stromes von der Stärke 1 (C. G. S.), oder 1 Webersche Einheit zersetzt in der Sekunde 0,000933 g Wasser oder scheidet 0,01118 Silber aus. Ist das Äquivalentgewicht des auszuscheidenden Körpers gleich A, so scheidet er in der Sekunde $A \cdot 0{,}0001036$ g aus. (Sauerstoff hat $A = 16$.) 1 Ampère zersetzt (als $\frac{1}{10}$ Einheit$_m$) nur 0,0000933 g oder 0,0933 mg Wasser in der Sekunde aus, oder scheidet 0,00118 g = 1,18 mg Silber aus, allgemein von jedem Körper vom Äquivalentgewicht A die Menge $A \cdot 1{,}036$ mg in der Sekunde.

Es ist 1 Daniell = ∼ 1,1 Volt, 1 Bunsen = ∼ 1,9 Volt, 1 Akkumulator = 2 Volt, 1 legales Volt = 0,9972 Volt.

Kapazität = Elektrizitätsmenge pro Einheit des Potentials $= \frac{\text{Menge}}{\text{Potential}}$ ist elektromagnetisch gemessen von der Dimension

$$\frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}} = l^{-1} t^2.$$

Die praktische Einheit Farad ist $= 9 \cdot 10^{11}$ Einh.$_s$ $= 10^{-9}$ Einh.$_m$, wie sich aus dem obigen Umwandlungsfaktor ergiebt.

Ändert ein Strom seine Intensität, so ruft er im benachbarten geschlossenen Leiter (Spirale) einen Induktionsstrom hervor. Die Intensitätsänderung für unendlich kleine Zeit ist gleich $\frac{J_1 - J_2}{t_1 - t_2}$, also von der Dimension

$$\frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{t} = l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Dem ist proportional die elektromotorische Kraft des induzierten Stromes, die von der Dimension $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}$ ist.

Man erhält den überführenden Faktor, indem man setzt

$$(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2})\, x = l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Demnach ist x von der Dimension l. Folglich:

Der Induktionskoeffizient Π, das sogenannte elektrodynamische Potential, ist von der Dimension l.

Widerstand$_m$. 1 cm³ Quecksilber hat den Widerstand 94080 abs. Einheiten bei 0° C; 1 Ohm = 1,063 Siemenseinh. = 1,063 $\frac{m}{mm^2}$ Hg 0°, d. h. gleich einer Quecksilbersäule von 1,063 m Länge und 1 qmm Querschnitt bei 0° C.

Das frühere legale Ohm hatte nur 1,060 Siemenseinheiten, ist also gleich 0,9972 richtigen Ohm. Vgl. die Vorschläge der Technisch-Physik. Reichsanstalt.

Im Gesetz folgen die Definitionen der praktischen Einheiten folgendermaſsen aufeinander:

1 Ohm = 1,063 $\frac{m}{mm^2}$ Hg bei 0°; 1 Amp. = 1,118 mg Silber/Sek.; 1 Volt = 1 Ohm · 1 Amp.

Eine vortreffliche Einführung in die elektrischen Messungen und zuverlässige Angaben über die Werte der Konstanten, auch korrekte Tabellen, findet man in dem schon citierten:

„Leitfaden der praktischen Physik" von Dr. F. Kohlrausch, Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Druckfehler-Verzeichnis.

Seite 14, Zeile 9 von u. lies Leverrier statt Levervier,
„ 75 „ 22 von o. lies die statt der.

Holzmüller, Gustav,

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Bd.: 2

1898

Math.a. 114 m-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11867800-8